Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

# СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

Ворохта
25 лютого – 1 березня 2015

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

# СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
25 лютого – 1 березня 2015 року

Івано-Франківськ, 2015

**Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу:** Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р. – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2015. – 78 с.

**Організаційний комітет:**



У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей і повідомлень викладені в авторському варіанті та розміщені в алфавітному порядку за прізвищем (українською мовою) першого автора.

# On the Friedrichs extension of the Bessel operator

Ananieva Oleksandra Yuriivna

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk*

ananeva89@gmail.com

We consider the minimal operator $S(\nu;b)(A(\nu;\infty))$ and the maximal operator $S(\nu;b)^*(A(\nu;\infty)^*)$ generated by one-dimensional Bessel differential expression

$$\mathcal{A}(\nu) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \nu \in [0,1) \tag{1}$$

on the interval $[0;b]$, $b \in (0,\infty)$, or on the half–line $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$.

W.N. Everitt and H. Kalf [3] described the Friedrichs extension of the minimal operator on $\mathbb{R}_+$ by applying the principal solution.

We obtain a description of the domain of the Friedrichs extension $S(\nu;b)_F$ $(A(\nu;\infty)_F)$ in the framework of extension theory of symmetric operators by applying the technique of boundary triplets and the corresponding Weyl function (see e.g. [2]), and by using the quadratic form method. By $H^2[0,b]$ and $H_0^2[0,b]$ we denote the Sobolev spaces

$$H^2[0,b] := \{f \in L^2(0,b) : f, f' \in AC_{loc}(0,b), f'' \in L^2(0,b)\},$$
$$H_0^2[0,b] = \{f \in H^2[0,a] : f(0) = f'(0) = f(b) = f'(b) = 0\}.$$

**Proposition 1.** *If $\nu \in (0,1)$, then the domain of the Friedrichs extension $S(\nu;b)_F$ of the operator $S(\nu;b)$ on the interval $[0;b]$, $b \in (0,\infty)$ is*

$$dom(S_F(\nu;b)) = H_0^2[0,b] \dotplus span\{x^{1/2+\nu}(x-b), x^2(x-b)\}.$$

*If $\nu = 0$, then the domain of the Friedrichs extension $S(\nu;b)_F$ of the operator $S(\nu;b)$ on the interval $[0;b]$, $b \in (0,\infty)$ is*

$$dom(S_F(\nu;b)) = H_0^2[0,b] \dotplus span\{x^{1/2}(x-b), x^{1/2}\ln x(x-b)\},$$

**Proposition 2.** *Let $\nu \in [0,1)$.*

*(i)[3] The domain of the Friedrichs extension $A_F(\nu;\infty)$ of the operator $A(\nu;\infty)$ (on the half–line $\mathbb{R}_+$) is given by*

$$dom(A_F(\nu;\infty)) = \left\{ f \in dom(A(\nu;\infty)^*) : [f, x^{\frac{1}{2}+\nu}]_0 = 0 \right\}, \tag{2}$$

*where $[f,g]_x = f(x)\bar{g}'(x) - f'(x)\bar{g}(x)$;*
*(ii) The domain of the Friedrichs extension $A(\nu;\infty)_F$ of the operator $A(\nu;\infty)$ is given by*

$$dom(A_F(\nu;\infty)) = H_0^2(\mathbb{R}_+) \dotplus span\{x^{1/2+\nu}\varphi(x)\}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+). \tag{3}$$

We prove that the domains of the Friedrichs extensions in (2) and (3) coincide.

[1] *V. Alekseeva , A. Ananieva* On extensions of the Bessel operator on a finite interval and a half-line// J. Math. Sci. **187** (2012), no. 1, 1–8.

[2] V.A. Derkach, M.M. Malamud Generalized rezolvent and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. **95** (1991), no. 1, 1-95.

[3] *W.N. Everitt, H. Kalf* The Bessel differential equation and the Hankel transform// J. Comput. Appl. Math. **208** (2007), no. 1, 3–19.


# Про диференційовність за початковими даними розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами переносу


Арясова Ольга Вікторівна

*Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України*

oaryasova@gmail.com


Розглянемо $d$-вимірне стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(t,\varphi_t(x))dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(t,\varphi_t(x))dw_k(t), \\ \varphi_0(x) = x, \end{cases} \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^d, d \geq 1, m \geq 1$, $(w(t))_{t\geq 0} = (w_1(t),\ldots,w_m(t))_{t\geq 0}$ — $m$-вимірний вінерів процес, коефіцієнт переносу $a : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ і коефіцієнт дифузії $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ є борелівськими і обмеженими. Припустимо, що $\sigma$ задовольняє умову рівномірної елептичності і, крім того, $\sigma \in W^{0,1}_{2d+2,loc}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$.

За таких припущень на коефіцієнти існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1) (див. [1]).

Визначимо клас $K$ мір на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ таких, що

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{t_0\in[0,\infty),\ x\in\mathbb{R}^d} \int_{t_0}^{t_0+t} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi(s-t_0))^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2(s-t_0)}\right\} \nu(ds,dy) = 0.$$

Будемо казати, що заряд $\nu$ належить класу $K$, якщо $\nu^+$ і $\nu^-$ з класу $K$, де $\nu = \nu^+ - \nu^-$ — розклад Хана-Банаха заряду $\nu$.

Нехай $a^i(t,\cdot)$ при всіх $1 \leq i \leq d$ є функцією обмеженої варіації на $\mathbb{R}^d$. Припустимо, що при всіх $1 \leq i,j \leq d$, $1 \leq k \leq m$ заряди $\nu^{ij}(dt,dy) := \frac{\partial a^i}{\partial y_j}(t,dy)dt$ і $\left(\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial y_j}(s,y)\right)^{2+\rho} dsdy$ для деякого $\rho > 0$ належать класу $K$.

Ми одержуємо представлення для похідної $\nabla_x\varphi_t(x)$ в термінах параметрів початкового рівняння. Для цього використовується теорія адитивних функціоналів.

[1] А. Ю. Веретенников. О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений. *Матем. сб.*, 111, 1980.

# Spectrum of weighted Wiener type Banach algebra of infinite number of variables

Atamanyuk L.S.

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

Atamanyukl10@gmail.com

We consider weighted Wiener type Banach algebra of infinite many variables. The main result is a desription of the spectrum of this algebra.

let $c_{00}(\mathbb{Z})$ be a set of finite integer valued sequences

$$k = (k_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} = (k_1, \dots, k_l, 0, \dots),$$

$k_\alpha \in \mathbb{Z}$ for all $\alpha \in \mathbb{N}, |k| = \sum_\alpha |k_\alpha|$. A weight is a map $w : c_{00}(\mathbb{Z}) \to [1;\infty)$ satisfying $w(k+s) \leqslant w(k)w(s)$, where $w(k) = w(k_1, \dots, k_l, 0, \dots)$, $w(s) = w(s_1, \dots, s_r, 0, \dots)$, $k + s = (k_1 + s_1, \dots, k_n + s_n, 0, \dots)$. Let $W_0(w)$ be the space of all complex valued functions $f : l_\infty \to \mathbb{C}$ of the form:

$$f = \sum_{|k|=0}^{m} a_k e^{i(k,x)} := \sum_{|k|=0}^{m} a_{k_1,\dots,k_l} e^{i\sum_\alpha k_\alpha x_\alpha},$$

with the norm

$$\|f\| = \sum_{|k|=0}^{m} |a_k| w(k) = \sum_{|k|=0}^{m} |a_{k_1,\dots,k_l}| w(k_1, \dots, k_l, 0, \dots), \tag{1}$$

where $i$ is the imaginary unit, $(k, x) = \sum_\alpha k_\alpha x_\alpha, m \in \mathbb{N}$. Let us denote $W(w)$ the completion $W_0(w)$ with respect to the norm (2). Hence every element $f$ on $W(w)$ is of the form:

$$f = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k e^{i(k,x)} \tag{2}$$

and

$$\|f\| = \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| w(k). \tag{3}$$

**Lemma 1.** *Elements of the form* (2) *under condition* (1) *generate a weighted Banach-Wiener algebra.*

We describe multiplicative linear functionals on $W(w)$. Let

$$w(k_m) = w(0, \dots, k_m, 0, \dots),$$

$$\rho_{1,k_m} := \sup_{k_m<0} \sqrt[k_m]{w(k_m)} = \lim_{k_m\to-\infty} \sqrt[k_m]{w(k_m)}, \tag{4}$$

$$\rho_{2,k_m} := \inf_{k_m>0} \sqrt[k_m]{w(k_m)} = \lim_{k_m\to\infty} \sqrt[k_m]{w(k_m)}. \tag{5}$$

Then

$$0 < \rho_{1,k_m} \leqslant \rho_{2,k_m} < \infty.$$

For each $\lambda_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$, in the annulus $\rho_{1,k_\alpha} \leqslant |\lambda_\alpha| \leqslant \rho_{2,k_\alpha}$ define functionals $h_\lambda(f)$ on $W(w)$ by

$$h_\lambda(f) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\dots,k_l} \prod_\alpha \lambda_\alpha^{k_\alpha},$$

where $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l, 0, \dots)$.

**Theorem 1.** *Each multiplicative linear functional $\varphi$ on $W(w)$ is an $h_\lambda(f)$ for some $\lambda_\alpha$ in $\rho_{1,\alpha} \leqslant |\lambda_\alpha| \leqslant \rho_{2,\alpha}$.*


[1] Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. Classes of Linear Operators. - Birchauser Verlag, Basel, Switzerland: Vol.2, 1993.

[2] Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Аналог теоремы Винера для бесконечномерных банаховых пространств.* Математические заметки, февраль 2015, **2** (97), 191-202.

[3] Dales H.G. Automatic continuity: a survey. Bull. london Math.Soc.,10(1978), 129–183.

# The order of entire functions of bounded index in direction

Bandura Andriy Ivanovych, Kulinich Halyna Mykhaylivna

*Department of Higher Mathematics*
*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas*
andriykopanytsia@gmail.com

Main definitions and denotations see in [1]-[2].

Besides, we call $N_{\mathbf{b}}(F, L, \xi)$ the $L$-index of $F(z)$ at point $z = \xi$. If $L \equiv 1$ then It is easily seen that if $N_{\mathbf{b}}(F, L) < \infty$ then $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n}\{N_{\mathbf{b}}(F, L, \xi)\}$.

The index set $S_p$ of order $p$, $0 \le p \le N_{\mathbf{b}}(F, L)$, is by definition the set of all points $\xi$ such that $N_{\mathbf{b}}(F, L, \xi) = p$. For a given $z^0 \in \mathbb{C}^n$ let $\sigma_p(z^0) = \{r : \ |t| = r, z^0 + t\mathbf{b} \in S_p\}$, $0 \le p \le N_{\mathbf{b}}(F, L)$, and let $m_l(\sigma_p(z^0))$ denote the logarithmic measure of $\sigma_p(z^0) \cap [1, \infty)$, $m_l(\sigma_p) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} m_l(\sigma_p(z^0))$, $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$, $\rho(g_{z^0})$ denotes the order of $g_{z^0}(t)$.

Our main result is following.

**Theorem 1.** *Let $W = F(z)$ be a transcendental entire function of bounded index in direction $\mathbf{b}$ satisfying the linear partial differential equation*

$$P_0(z)\frac{\partial w^k}{\partial \mathbf{b}} + P_1(z)\frac{\partial w^k}{\partial \mathbf{b}} + \ldots + P_k(z)W(z) = 0,$$

*where $P_j(z)$ are polynomials of degree not exceeding $d$. If $m_l(\sigma_p) = \infty$ for some $n > 0$ then exists $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\rho(g_{z^0}) = 1$.*

[1] *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Entire functions of bounded $L$-index in direction // Matem. Studii. – 2007. – Vol. 27, No 1. – P. 30–52. (in Ukrainian)

[2] *Boo Sang Lee, Shah S. M.* The type of an entire function satisfying a linear differential equation // Arch. Math. – 1969. – V.20, No 6. – P. 616-622.

# Теорема про неперервність твірної функції гіллястого процесу з неперервним часом та міграцією.

Базилевич Ірина Богданівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

i_bazylevych@yahoo.com

Якимишин Христина Михайлівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

yakymyshyn1236@ukr.net

Розглядаємо однорідний гіллястий процес з неперервним часом з імміграцією та еміграцією [1]. У довільний момент часу $t \in [0; \infty)$ або з ймовірністю $P_k(t)$ в популяцію іммігрує $k$ частинок, або з ймовірністю $Q_r(t)$ з популяції емігрує $r$ частинок $(r = \overline{1, m})$, $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) + \sum_{r=1}^{m} Q_r(t) = 1$.

Процес еміграції та імміграції частинок позначимо через $\zeta(t)$, тобто

$$P\{\zeta(t) = k\} = P_k(t),\ k \geq 0, \quad P\{\zeta(t) = -r\} = Q_r(t),\ r = 1, \ldots, m.$$

Виберемо мале $\Delta t$ $(\Delta t \to 0)$. Припускаємо, що $P_0(\Delta t) = 1 + p_0 \Delta t + o(\Delta t)$, $P_k(\Delta t) = p_k \Delta t + o(\Delta t),\ k \geq 1, Q_r(\Delta t) = q_r \Delta t + o(\Delta t),\ 1 \leq r \leq m,\ \ \sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{r=1}^{m} q_r = 0$.

Позначимо через $\xi_i(\Delta t)$ $(i = \overline{1, \mu(t)})$ кількість нащадків $i$-ї частинки через час $\Delta t$, тобто в момент часу $t + \Delta t$, і будемо вважати, що

$$P\{\xi_i(t + \Delta t) = n | \xi(t) = 1\} = H_n(\Delta t) = \begin{cases} h_n \Delta t + o(\Delta t),\ n = 0,\, 2,\, 3,\, \ldots \\ 1 + h_n \Delta t + o(\Delta t),\ n = 1 \end{cases}$$

де $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n = 0,\ h_1 \leq 0,\ h_j \geq 0\, (j = 0,\, 2,\, \ldots),\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(\Delta t) = 1.$

Позначимо $F(t, s) = M s^{\xi_i(t)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(t) s^n$ та $h(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n s^n$ при $|s| \leq 1$.

**Theorem 1.** *$F_\mu(t, s)$ – твірна функція міграційного процесу неперервна по $t$, $s$.*

[1] Нагаев С.В., Хан Л.В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона - Вансона с миграцией, Теория вероятностей и ее применения., XXV, (1980), 523-534.

[2] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М . : Наука, 1971.

# Ймовірність банкрутства для випадку субекспоненційних розподілів виплат

Білинський А.Я. Кінаш О.М.

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
andrii.bilynskyi@gmail.com

Класична нерівність Лндберга, яку можна знайти в усіх базових підручниках з теорії ризику (див. зокрема [1, ст. 187]), дає експоненційні оцінки для ймовірності банкрутства у випадку, коли індивідуальні розміри виплат мають розподіли, "хвости"яких спадають з експоненційною швидкістю. Ця умова означає, що великі страхові позови і, відповідно, великі страхові виплати відбуваються рідко (з експоненційно малими ймовірностями). Таку схему називають "моделлю з малими виплатами". Але у багатьох реальних ситуаціях слід врахувати екстремальні події, тому розміри виплат будуть більш адекватно описуватися випадковими величинами, які мають розподіли з так званими "важкими хвостами до числа яких, зокрема, належать розподіли типу Парето. У цьому випадку сумарні виплати по суті будуть визначатися максимальним індивідуальним позовом. Даний ефект став особливо помітним на початку 2000 рр., коли страхові фірми змушені були відшкодовувати значні суми за страховими позовами, викликаними катастрофами: землетрусами, пожежами, повенями, терактами.

Нехай функція розподілу $F(x)$, $x \in R_+ = [0;\infty)$ задовольняє умову $F(x) < 1\ \forall x \in R_+$. Функція розподілу $F(x)$ назвемо субекспоненційною [1, ст. 189], якщо $\forall n \geq 2$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n_*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-F^{n_*}(x)}{1-F(x)} = n.$$

Надалі клас субекспоненційних функцій розподілу позначатимемо через $S$. Прокоментуємо ймовірнісну інтерпретацію формули: якщо $X_1, ..., X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини із функцією розподілу $F(x)$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, то

$$1 - F^{n_*}(x) = P\{S_n \geq X\}$$

і

$$P\left\{\max_{1\leq in} X_i \geq X\right\} = \overline{F^n}(x) \sim n\overline{F}(x), \text{ коли } x \to \infty.$$

Отже,

$$P\{S_n \geq X\} \sim P\left\{\max_{1\leq in} X_i \geq X\right\}.$$

Можемо зробити висновок, що асимптотичну поведінку суми виплат визначає одна дуже велика виплата. Це є однією з інтуїтивно бажаних властивостей розподілів з "важкими" хвостами, яка пояснює, чому $S$ може застосовуватися до моделювання великих виплат.

Зауважимо, що субекспоненційні розподіли були запропоновані Чистяковим [2] у контектсі теорії гілястих процесів.

Зауважимо, що клас $S$ є досить багатим. Зокрема до цього класу належать такі розподіли, як Лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу І та типу ІІ.

Зауважимо, що у випадку коли виплати розподілені за законом Парето $F(x) = 1 - \left(\dfrac{k}{x}\right)^{\alpha}, \alpha > 1, x > k$ та лог-нормальним законом. Результат отримано в [1, ст. 198-199].

Нами розглянуті інші випадки таких розподілів. Зокрема для розподілу Бенктандера ІІ типу отримана асимптотика ймовірності банкрутства задається наступним співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u) \sim \frac{\lambda}{(\alpha c - \lambda(1+\alpha))} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\alpha u^{\beta}}{\beta}\right), u \to \infty.$$


[1] *Зінченко Н. М.* Математичні методи в теорії ризику // навчальний посібник – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 224 с.

[2] *Chistyakov V. P.* A theorem on sums of irv and its applications to branching processes // Teor. Probability Appl. – 1969. – N 9 – P. 640-648.

# Про збіжність періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Боднар Д.І., Бубняк М.М., Возняк О.Г.

*Тернопільський національний економічний університет*

bodnar4755@ukr.net, mariabubnyk@gmail.com, olvoz@ukr.net

Розглянемо $\overrightarrow{p}$-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{p}=(p_1,\ldots,p_N)$, $p_j\in\mathbb{N}$ $(j=\overline{1,N})$, $a_{i(k)}\in\mathbb{C}$, $i(k)\in\mathcal{I}$, $\mathcal{I}=\{i_1i_2\ldots i_k\colon 1\le i_k\le i_{k-1}; k\ge 1; i_0=N\}$, $N$ – фіксоване натуральне число. Причому елементи дробу (1) задовольняють умови: $a_{\underbrace{r\ldots r}_{q}}=a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $q\ge 1$ і $q=n\cdot p_r+s$; $r=\overline{1,N}$; $s=\overline{1,p_r}$, і $a_{i(m)\underbrace{r\ldots r}_{q}}=a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $m\ge 1$; $i(m)\in I$; $r<i_m$, $n\ge 1$. Покладемо $a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}=c_{r,s}$. Зауважимо, що індекс $s$ залежать від поверху $k$, на якому розміщений елемент $a_{i(k)}$ дробу (1) і періоду по $i_k$-ій вітці $p_{i_k}$. Значення $s$ одержуємо з наступних розкладів: $k=p_{i_k}n+s$, якщо $i_1=i_2=\ldots=i_k$, або $k-m=p_{i_k}n+s$, якшо $i_1\ge i_2\ge\ldots\ge i_m>i_{m+1}=\ldots=i_k$ $(n\ge 0)$.

**Theorem 1.** *Нехай елементи $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД (1) задовольняють умови $\sum_{l=1}^{q-1}|c_{l,1}|+|c_{q,j}|\le C\quad(q=\overline{1,N}; j=\overline{1,p_q})$.*

*Тоді дріб збігається і виконуються оцінки швидкості збіжності*

1. *Якщо $0<C<1/4$, то $|F-F_m|\le L\cdot\xi^m$, де $m>0$, $\xi=\dfrac{1-\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}}$, $L=4\dfrac{1+\xi}{1-\xi^3}$, $F_n$ – $n$-й підхідний дріб ГЛД (1), $F$ – значення цього дробу.*

2. *Якщо $C=1/4$, то $|F-F_m|\le\dfrac{4}{m+1}$ $(m>0)$.*

[1] *Антонова Т.М.* Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / Т. М. Антонова // Карпат. мат. публікації. – 2012. – **4**, № 2. – С. 165–174.

# Структура фундаментального розв'язку задачі Коші для одного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією

Буртняк Іван Володимирович, Малицька Ганна Петрівна

*Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника*

bvanya@meta.ua

В цій роботі ми досліджуємо фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння дифузії з інерцією, в якому інерція залежить від багатьох груп просторових змінних.

Нехай $x := (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}; x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}; ...; x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k}; ...; x_{p1}, x_{p2}, ..., x_{pn_p}; x_{p+11}, ..., x_{m1})$, $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_p > 1$, $n_k \in N$, $k = \overline{1,p}$, $p \in N$, $m \geq p$, $\sum\limits_{k=1}^{p} n_k + m - p = n$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} \partial_{x_{k\,j+1}} u(t,x) = \sum_{v=1}^{m} \partial^2_{x^2_{k1}} u(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(x), \ 0 \leq \tau < t \leq T < +\infty, \ x \in R^n, \tag{2}$$

де $u_0(x)$– досить гладка фінітна функція. Використовуючи перетворення Фур'є і теорію лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних ми знайшли явний вигляд ФРЗК (1), (2) $G(t-\tau, x, \xi)$.

$$G(t-\tau,x,\xi) = 2^{-n}\pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{\nu=1}^{p} \prod_{k=1}^{n_\nu} k(k+1)...(2k-2)(2k-1)^{-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-\mu}$$
$$\exp\left\{ -\sum_{\nu=1}^{m} |x_{\nu1} - \xi_{\nu1}|^2 (t-\tau)^{-1} 4^{-1} \right.$$
$$-\sum_{\nu=1}^{p} \Big[ 3\left| x_{\nu2} - \xi_{\nu2} + (x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1} \right|^2 (t-\tau)^{-3}$$
$$+180 |x_{\nu3} - \xi_{\nu3} + (x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1} + (x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1}\Big|^2 (t-\tau)^{-5}$$
$$+25200 |x_{\nu4} - \xi_{\nu4} + (x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1} + (x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2 10^{-1} +$$
$$(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^3 120^{-1}|^2 (t-\tau)^{-7} + ...$$
$$+(t-\tau)^{-(2k-1)} (k-1)^2 k^2 ... (2k-3)^2$$
$$(2k-1)|x_{\nu k} - \xi_{\nu k} + (t-\tau)(x_{\nu k-1} - \xi_{\nu k-1})2^{-1} + ... + \Big( x_{\nu k-j} - (-1)^j \xi_{\nu k-j} \Big)$$
$$(t-\tau)^j (j+1)...(k+j-2)((j-1)!)^{-1}((k-1)k...(2k-3))^{-1} + ...$$

$$+\left(x_{\nu 1}-(-1)^{k-1}\,\xi_{\nu 1}\right)(t-\tau)^{k-1}\left(2\,(k-1)\,k...\,(2k-3)\right)^{-1}\Big|^{2}+...$$
$$+\,(n_\nu-1)^2\,n_\nu^2...$$
$$(2n_\nu-3)^2\,(2n_\nu-1)\,(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}\,|x_{n_\nu}-\xi_{n_\nu}+$$
$$(t-\tau)\,(x_{n_\nu-1}-\xi_{n_\nu-1})\,2^{-1}+...$$
$$+\left(x_{\nu 1}-(-1)^{n_\nu-1}\,\xi_{\nu 1}\right)\,(t-\tau)^{n_\nu-1}\left(2\,(n_\nu-1)\,...\,(2n_\nu-3)\right)^{-1}\Big|^{2}\Big]\Big\},$$

$t-\tau>0,\ x\in R^n,\ \xi\in R^n.$

Отриманий результат можна перенести на системи Колмогорова.


[1] *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією// Вісн. нац. ун-ту "Львів. політехніка"Сер. Прикл. математика —2000.—№411. — С.221–228.


# Базис алгебри неперервних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$


Василишин Тарас Васильович

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

taras_vasylyshyn@mail.ru


Нехай $L_\infty[0,1]$ – простір комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на $[0,1]$. Вимірним автоморфізмом відрізка [0,1] називають бієкцію $\sigma:[0,1]\to[0,1]$ таку, що $\sigma$ і $\sigma^{-1}$ є вимірними і зберігають міру Лебега. Позначимо $\Xi$ групу всіх вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$. Функціонал $F:L_\infty[0,1]\to\mathbb{C}$ називають симетричним, якщо

$$F(x\circ\sigma)=F(x)$$

для всіх $x\in L_\infty[0,1]$ і всіх $\sigma\in\Xi$.

Нехай $\mathcal{P}_s(L_\infty[0,1])$ – алгебра всіх неперервних симетричних поліномів на $L_\infty[0,1]$. В роботі доведено, що так звані елементарні симетричні поліноми

$$R_n(x)=\int_{[0,1]}x^n(t)\,dt,$$

де $n\in\mathbb{N}$, утворюють алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(L_\infty[0,1])$.

# Гранична теорема для гіллястого випадкового процесу

Джуфер Галина Богданівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

tumkiv_gala@mail.ru

В даній роботі доведена гранична теорема для гіллястого процесу [1]. При цьому ми обмежимося випадком, коли доданки мають скінченні дисперсії. Дана теорема показує збіжність функції розподілу суми випадкового числа випадкових величин до функції розподілу деякого безмежно-подільного розподілу[2].Доведена теорема викликає значний інтерес, тому що окрім з'ясування факту про зближення фунцій розподілу сум випадкового числа випадкових величин, що являється гіллястим процесом з деяким безмежно-подільним розподілом, вона показує, що граничний розподіл гіллячтого процесу є безмежно-подільним.

[1] *Боровков А. А.*Теория вероятностей // Москва, Наука, ст.376-379, 1986

[2] *Гнеденко Б. В.*Предельные законы для сумм независимых случайных величин // Успехи матем. наук, вып. 10, 1944.

# Про розщеплення в деяких просторах аналітичних функцій

Дільний Володимир

*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка*

dilnyi@ukr.net

Позначимо через $W^p_\sigma$, $1 \le p \le 2$, $\sigma > 0$, простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій $f$ експоненціального типу $\le \sigma$, що належать $f \in L^p(\mathbb{R})$. Простір $W^p_\sigma$ може бути визначений також як простір цілих функцій, що задовільняють умову $A(0;2\pi)$, де

$$A(\alpha,\beta) := \sup_{\varphi\in(\alpha,\beta)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Позначимо через $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma \ge 0$, простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$ функцій, для яких виконується умова $A(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) < +\infty$.

**Задача 1.** *Чи кожна функція $f \in W^p_\sigma$, $1 \le p \le 2$, допускає розщеплення $f = f_2 - f_3$ з цілою функцією $f_2$, що задовільняє умову $B(0;\pi)$, де*

$$B(\hat\alpha, \hat\beta): \sup_{\varphi\in(\hat\alpha,\hat\beta)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

*і $f_3$ задовільняє умову $B(\pi; 2\pi)$?*

Позитивний розв'язок задачі 1 для $p = 1$ мав би наслідком розв'язок задачі про існування нетривіальних розв'язків одного рівняння типу згортки. Однак існують функції $f \in W^1_\sigma$, для яких вказане розщеплення неможливе. Тому доводиться розглядати задачу зі слабшими умовами, а саме наступну задачу 2.

**Задача 2.** *Чи кожна функція $f \in W^p_\sigma$, $1 \le p \le 2$, допускає розщеплення $f = f_4 - f_5$, де функції $f_4$ і $f_5$ аналітичні в $\mathbb{C}_+$, $f_4$ задовільняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і $f_5$ задовільняє умову $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?*

В доповіді буде показано, що Задача 1 розв'язується в загальному випадку негативно. Для розв'язності Задачі 2 знайдено достатні умови.

## Властивості лоскодромних мероморфних функцій

Добушовський Маркіян Степанович

*Львівський національний університет імені І. Франка*

mdobush19@gmail.com

Теорія мероморфних мультиплікативно-періодичних функцій була розроблена О. Раузенбергом[1]. Ж.Валірон[2] назвав ці функції локсодромними тому, що точки, в яких такі функції у випадку не дійсного $q$ набувають однакові значення, лежать на логарифмічних спіралях. В полярних координатах вони – прямі лінії. Локсодромні мероморфні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій.[3]

В доповіді розглядаються властивості локсодромних мероморфних функцій.

**Definition 1.** *Локсодрома ($\lambda o\xi o\zeta$-косий, $\delta\rho o\mu o\zeta$-шлях)- лінія на поверхні обертання, яка перетинає всі меридіани під однаковим кутом.*

**Definition 2.** *Нехай $q \in \mathbb{C}^*$ і $0 < |q| < 1$. Мероморфна функція $l : \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ називається локсодромною функцією з мультиплікатором $q$, якщо вона задовольняє умову*

$$l(qz) = l(z), \ \forall z \in \mathbb{C}^*. \tag{1}$$

**Теорема 3.** *a-точки локсодромної мероморфної функції лежать на скінченній кількості логарифмічних спіралей, їх кількість однакова в кожному напіввідкритому кільці $\{z : qR \leq |z| < R, R > 0\}$, незалежно від $a$.*


[1] *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470p

[2] *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 p.

[3] *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002, 381 p.


# Збіжність групи $\varphi$-відхилень рядів Тейлора


Гаєвський Микола Вікторович, Задерей Петро Васильович

*Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка,*

*Київський національний університет технологій та дизайну*

mgaevskij@gmail.com


Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D$ — розклад в ряд Тейлора-Маклорена аналітичної в крузі $D$ функції, $S_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ — частинна сума її ряду Тейлора-Маклорена, $r_n(f, z) = f(z) - S_n(f, z)$, $E_n(f)$ — найкраще наближення функції алгебраїчними поліномами порядку не вище $n$.

Розглянемо множину $H_\infty$ аналітичних в $D$ функцій з нормою $\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)|$. Нехай далі $\{\psi(k)\}$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$. Позначимо через $H_\infty^\psi$ клас функцій з $H_\infty$ для яких $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D$ є рядом Тейлора функції $f^\psi \in H_\infty$. Через $\Phi$ позначимо множину неспадних і неперервних на $(0, \infty)$ функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \leq e^{bu}$, для $u \in [0, 1]$ $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$, де $a = a(\varphi)$.

Мають місце такі твердження, що узагальнюють результати роботи [1].

*Теорема 1. Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$ та $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)| < \infty$, де $\triangle^2\psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2)$. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \varphi(|r_k(f, z)|) \leq M\varphi(QC_n(\psi)E_n(f^\psi)),$$

*де* $QC_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|$, $M = M(\varphi)$ *— деяка величина рівномірно обмежена по* $n, z$ *та* $f$.

*Теорема 2. Нехай* $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k)+i\psi_2(k)$ *та* $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)| < \infty$, *де* $\triangle^2\psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2)$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *— незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді для довільної функції* $f \in H_{\infty}^{\psi}$ *та будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива нерівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|r_k(f,z)|) \leq M\Big(n\lambda_n\varphi(QC_n(\psi)E_n(f^{\psi})) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(QC_k(\psi)E_k(f^{\psi}))\Big).$$


[1] *Ласурия Р. А.* Оценки группы $\varphi$-отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^{\psi}H_{\infty}(D)$ // Матем. заметки, 83:5 (2008), С.696–704


## Моногенні функції як метод дослідження бігармонічного рівняння


Грищук С. В.

*Інститут математики НАН України, Київ*

serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua


Асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею 1 будемо позначати символом $\mathbb{B}$, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє вимоги: $(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 \neq 0$. Розглянемо базис $\{e_1, e_2\}$ такого типу з наступною таблицею множення: $e_1 = 1, \quad e_2^2 = e_1 + 2ie_2$, де $i$ — уявна одиниця комплексної площини $\mathbb{C}$.

Розглянемо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$, де $a = z_1e_1 + z_2e_2 \in \mathbb{B}$ та $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Нехай $D_\zeta$ є областю площини $\mu := \{xe_1 + ye_2\}$, де $x, y$ — дійсні. Розглядаємо моногенні в $D_\zeta$ функції, тобто функції виду $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$:

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y)\,e_1 + U_2(x,y)\,ie_1 + U_3(x,y)\,e_2 + U_4(x,y)\,ie_2, \qquad (1)$$

$x, y \in \mathbb{R}$, що мають класичну похідну в кожній точці $\zeta$ з $D_\zeta$. Кожна компонента $U_k$, $k = \overline{1,4}$, є бігармонічною функцією в області $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \zeta = x + e_2y \in D_\zeta\}$ (див. [1]), тобто задовольняє бігармонічне рівняння в $D$:

$$\Delta^2 U(x,y) \equiv \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial y^4} = 0. \qquad (2)$$

В [1] одержано конструктивний опис усіх моногенних функцій і встановлено їх аналітичні властивості, аналогічні властивостям функціям комплексної змінної. В [2] розглянуто крайову задачу типу задачі Шварца для моногенних функцій, асоційовану з основною бігармонічною задачею, розроблено схему її редукції до відповідної крайової задачі у крузі. В [3] одержано вирази для розв'язків системи рівнянь рівноваги Ляме у зміщеннях через компоненти моногенних функції (1) і знайдено опис усіх моногенних функцій, асоційованих з розв'язком задачі Фламана для ізотропної півплощини.


[1] Грищук С. В., Плакса С. А. Моногенные функции в бигармонической плоскости // Доповіді НАН України. — 2009. — № 12. — С. 13–20.

[2] Gryshchuk S.V. *Power series and conformal mappings in one boundary value problem for monogenic functions of the biharmonic variable* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України.— 2014. — **11**, № 1. — P. 93 — 107.

[3] Грищук С. В. Гіперкомплексні моногенні функції в деяких задачах плоскої теорії пружності // Доповіді НАН України. — 2015. — у друці.


## Оператори симетричного зсуву на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій


Голубчак Олег Михайлович

*Івано-Франківський коледж Львівського національного аграрного університету*

oleggol@ukr.net


Нехай $P_s(\ell_1)$ — простір симетричних поліномів на $\ell_1$. Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа $n$, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n$ (див. [1]).

В доповіді буде розглянуто оператор симетричного зсуву $\Lambda_y : P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$, побудований таким чином, що

$$\Lambda_y(P)(x) = P(x \bullet y),$$

де $x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, ...)$ , $x, y \in \ell_1$. Доведено, що $\Lambda_y$ — необмежений при $y \neq 0$ і щільно визначений в гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій $H_s$ оператор та знайдено загальний вигляд спряженого оператора $\Lambda_y^*$.

Також в доповіді буде розглянуто та досліджено деякі властивості оператора типу диференціювання, побудовано оператори народження та знищення в просторі $H_s$.

[1] *Голубчак О. М.* Гільбертовий простір симетричних функцій на $\ell_1$ // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №3. – С. 49–52.

## Обмеженість інтегральних середніх $\delta$-субгармонійних локсодромних функцій

Гущак Ольга Богданівна,
Тарасюк Святослав Іванович

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
olya.khyl@ukr.net, svt.tarasyuk@gmail.com

Нехай $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Функцію $u(z)$, $\delta$-субгармонійну в $\mathbb{C}^*$, називають локсодромною (мультиплікативно періодичною) [1] з мультиплікатором $q$, якщо вона задовольняє умову

$$u(qz) = u(z)$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^*$. Зауважимо, що будь-яка субгармонійна локсодромна в $\mathbb{C}^*$ функція є тотожною сталою.

Позначимо

$$m_p(r,u) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta}|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

**Теорема** Нехай $u(z)-$ $\delta$-субгармонійна локсодромна в $\mathbb{C}^*$ функція. Тоді при будь-якому фіксованому $p \geq 1$ її інтегральні середні $m_p(r,u)$ обмежені на $\mathbb{R}_+$.

[1] *Kondratyuk A.A.* Loxodromic meromorphic and $\delta$- subharmonic functions// Reports and Studies Forestry and Natural Sciences. – 2014. –№14, P. 89-99.

# Шляхи застосування спектральної теорії узагальнених якобієвих ермітових матриць

Івасюк Іван Ярославович

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

vanobsb@gmail.com

Одним із важливих застосувань спектральної теорії класичних якобієвих матриць є її використання для розв'зку диференціально-різницевих рівнянь. Розглянемо відповідне застосування спектральної теорії узагальнених якобієвих ермітових матриць. Нехай $G$ – узагальнена якобієва ермітова матриця, спектральна теорія якої досліджується у роботах [1, 2]. Нехай її елементи неперервно диференційовним чином залежать від $t \in [0, T)$ $(T \leq \infty)$, тобто $G = G(t)$. Розглянемо рівняння Лакса типу

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)(t) = \dot{G}(t) = G(t)A(t) - A(t)G(t), \quad t \in [0, T), \tag{1}$$

де $A(t) = (\alpha_{j,k}(t))_{j,k=0}^{\infty}$, $\alpha_{j,k}(t) : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{j+1}$ – довільна нескінченна матриця. Рівняння Лакса є операторним узагальненням таких нелінійних диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь як ланцюжок Тоди, рівняння Кортевега-де-Фріза, одновимірне нелінійне рівняння Шредінгера, потік Шура та інших рівнянь. Аналогом ланцюжка Тоди для узагальнених якобієвих ермітових матриць, який відповідає рівнянню Лакса (1), являється така система диференціально-різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i(t) &= \frac{1}{2}(b_{i+1}(t)a_i(t) - a_i(t)b_i(t)), \\ \dot{b}_i(t) &= a_i^T(t)a_i(t) - a_{i-1}(t)a_{i-1}^T(t), \\ a_{-1}(t) &= c_{-1}(t) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [0, T). \end{aligned} \tag{2}$$

Для розвя'зку задачі Коші інтегрування ланцюжка типу Тоди (2) можна використати метод оберненої спектральної задачі, який застосовується до класичного нескінченного ланцюжка Тоди на півосі у роботі [3].

Інше природне застосування спектральної теорії узагальнених якобієвих ермітових матриць стосується відповідної узагальненої матричної проблеми моментів. А саме, нехай задана послідовність дійснозначних нескінченних матриць $s = (s_i)_{i=0}^{\infty}$, де $s_i = (s_{i;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{\infty}$. Необхідно відшукати та вивчити умови, які гарантують існування представлення

$$s_i = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^i d\Sigma(\lambda), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

де $d\Sigma(\lambda) = (d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda))_{\alpha,\beta=0}^{\infty}$ – деяка невід'ємна операторнозначна міра, значеннями якої є обмежені оператори в $\ell_2$ та яка є спектральною мірою, що відповідає деякій узагальненій якобієвій ермітовій матриці $G$.


[1] *Ivasiuk I.Ya.* Direct spectral problem for the generalized Jacobi Hermitian matrices/ *I.Ya. Ivasiuk*// Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – Vol.15, №1. – P.3–14.

[2] *Ivasiuk I.Ya.* Inverse spectral problem for some generalized Jacobi Hermitian matrices/ *I.Ya. Ivasiuk*// Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – Vol.15, №4. – P.333–355.

[3] *Berezanski Yu.M.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem/ *Yu.M. Berezanski*// Reports Math. Phys. – 1986. – Vol.24, №1. – P.21–47.


# Система $\mathbf{M_2^\theta/G/1/m}$ з двопетельним гістерезисним керуванням часом обслуговування та інтенсивнстю вхідного потоку


Жерновий Юрій Васильович, Жерновий Костянтин Юрійович

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

yu_zhernovyi@yahoo.com


Системи обслуговування з гістерезисним керуванням інтенсивностями вхідного потоку та обслуговування можуть слугувати адекватними моделями для оцінювання якості функціонування інформаційно-телекомукаційних систем в умовах перевантаження.

Ми вивчили систему обслуговування типу $\mathrm{M_2^\theta/G/1/m}$ з груповим надходженням замовлень, в якій застосовується двопороговий гістерезисний механізм керування часом обслуговування та інтенсивністю вхідного потоку з двома гістерезисними петлями. У систему надходять два незалежні потоки замовлень, один з яких блокується в режимі перевантаження.

Використовуються три режими керування інтенсивністю вхідного потоку: нормальний, режим часткового блокування і режим повного блокування. У нормальному режимі в систему допускаються замовлення першого і другого потоків, а функція розподілу часу обслуговування кожного замовлення дорівнює $F(x)$. У режимі часткового блокування приймаються на обслуговування лише замовлення першого потоку. Повне блокування вхідного потоку починається в момент, коли довжина черги стає рівною $m$. У режимах часткового та повного блокування час обслуговування замовлення розподілений за законом $\widetilde{F}(x)$. Перемикання режимів функціонування здійснюються в моменти завершення обслуговування замовлень.

Для визначення імовірнісних характеристик системи запропоновано підхід, який ми назвали методом потенціалів. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості та для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі, ймовірності обслуговування та стаціонарних характеристик черги. Отримані результати перевірено за допомогою імітаційної моделі, побудованої за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

## Апроксимаційна теорема для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку

Заболоцький Микола Васильович

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

m_zabol@franko.lviv.ua

Мостова Мар'яна Романівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

memyr23@gmail.com

Нехай $L$–клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій $v$ таких, що $rv'(r)/v(r) \to 0$ при $r \to +\infty$; $H_0(v)$ – клас цілих функцій $f$ нульового порядку, для яких $0 < \varlimsup\limits_{r\to+\infty} n(r,0,f)/v(r) < +\infty$.

Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню $\mu$-щільність, $1 < \mu \le 2$, якщо її можна покрити послідовністю таких кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \dots,$ $z_j \to \infty$, що

$$D_\mu(E)\colon = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu} \sum_{|z_j|\le r} r_j^\mu = \eta,\ 0 \le \eta < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо $C_\eta^\mu$.

Приймемо $F(z) = zf'(z)/f(z)$, $n(r, \alpha, \beta)$–кількість нулів цілої функції в секторі
$\{z\colon |z| \le r, \alpha \le arg\ z < \beta\}, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(v)$ мають $v$-щільність (кутову $v$-щільність), якщо існує границя

$$\Delta\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{v(r)} \left(\Delta(\alpha, \beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{v(r)}\right),$$

для всіх $\alpha$ і $\beta$, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi], 0 < \Delta < +\infty$.

**Theorem 1.** *Нехай $v \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(v)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ відповідно функцій $f_1$, $f_2$ мають $v$-щільність, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \leq 2$ існують $\delta > 0$ і множина $E$, $D_\mu(E) < \eta$, така, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon v(r), \quad z \notin E. \tag{1}$$

**Theorem 2.** *Нехай $v \in L$, $f \in H_0(v)$ і нулі $f$ мають кутову $v$-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^\mu$, $1 < \mu \leq 2$, така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{2}$$

# Умови Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ випадкових величин


Затула Дмитро Васильович

*Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет*

dm.zatula@gmail.com


Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ – деякий метричний простір, $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ – випадковий процес з простору $L_p(\Omega)$. Будемо досліджувати умови, за яких траєкторії процесу $X$ задовольняють умову Ліпшиця. Для цього розглянемо функцію $f$ таку, що

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leq\varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1.$$

Ця функція є модулем неперервності процесу $X$ з простору $L_p(\Omega)$ випадкових величин. Дослідження Ліпшицевої неперервності тісно пов'язане з оцінюванням ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\leq v} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}.$$

Наслідком оцінки цієї ймовірності є умова Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$.

Для гаусових процесів подібні результати отримано у роботі [2]. Вони були узагальнені для деяких класів процесів із просторів Орліча у монографії [1].

Ліпшицева неперервність випадкових процесів може бути застосована у вивченні швидкості наближення функцій тригонометричними поліномами. Зокрема, у роботі [3] досліджувалася апроксимація процесів з просторів $L_p(\Omega)$ тригонометричними сумами у просторі $L_q[0, 2\pi]$.

[1] *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes // Translations of Mathematical Monographs, 188. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[2] *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian processes // Ann. Probab. **1**, 1 (1973), c. 3–68.

[3] *Kamenshchikova O. E., Yanevich T. O.* An approximation of $L_p(\Omega)$ processes // Theory Probab. Math. Statist. **83** (2011), c. 71–82.

## Задача о тени и смежные вопросы

Ю.Б.Зелинский, И.Ю.Выговская, М.В.Стефанчук

*Ин-т математики НАН Украины, Киев*

zel@imath.kiev.ua

**Определение 1.** Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-выпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, если найдется $m$-мерная плоскость $L$, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \varnothing$; множество $E$ $m$-выпукло, если оно $m$-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

**Задача**(о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере $S^{n-1}$ и радиуса меньшего от радиуса сферы достаточно чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

**Теорема 1.** Для того чтобы центр $(n-1)$-сферы в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ принадлежал 1-оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере необходимо и достаточно $n+1$-го шара.

**Определение 2.** Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-полувыпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, если найдется $m$-мерная полуплоскость $P$, такая что $x \in P$ и $P \cap E = \varnothing$; множество $E$ $m$-полувыпукло, если оно $m$-полувыпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

**Теорема 2.** Для того чтобы центр окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) кругов радиуса не превышающего (меньшего) радиуса окружности и с центрами на этой окружности необходимо и достаточно трех кругов.

**Теорема 3.** Для того чтобы центр двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере достаточно десяти шаров.

[1] *Zelinskii Y., Vyhovska I., Stefanchuk M.* Generalized convex sets and shadows problem. // - arXiv[1501.06747]

# Одна характеризація майже відкритих множин з допомогою сильно нарізно неперервних функцій

Карлова Олена Олексіївна

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

maslenizza.ua@gmail.com

Нехай $X = \prod_{t\in T} X_t$ – добуток сім'ї множин $X_t$. Якщо $S \subseteq S_1 \subseteq T$, $a = (a_t)_{t\in T} \in X$, $x = (x_t)_{t\in S_1} \in \prod_{t\in S_1} X_t$, то символом $a_S^x$ ми позначимо точку $(y_t)_{t\in T}$, де $y_t = x_t$ при $t \in S$, і $y_t = a_t$ при $t \in T \setminus S$. Покладемо $\sigma_n(a) = \{x \in X : |\{t \in T : x_t \neq a_t\}| \leq n\}$ і $\sigma(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(a)$. Множина $A \subseteq X$ називається $\mathcal{S}$*-відкритою*, якщо $\sigma_1(x) \subseteq A$ для всіх $x \in A$.

Нехай $\mathcal{T}$ – деяка топологія на $\mathcal{S}$-відкритій множині $X \subseteq \prod_{t\in T} X_t$ і $(Y, d)$ – метричний простір. Функція $f : X \to Y$ називається *сильно нарізно неперервною в точці* $a \in X$ *відносно* $s$*-ої змінної*, якщо

$$\lim_{x\to a} d(f(x), f(x_s^a)) = 0.$$

Функція $f : X \to Y$ є *сильно нарізно неперервною в точці* $a \in X$, якщо $f$ сильно нарізно неперервна в точці $a$ відносно кожної змінної $t \in T$, і функція $f$ є *сильно нарізно неперервною на множині* $X$, якщо $f$ сильно нарізно неперервна в кожній точці $a \in X$ відносно кожної змінної $t \in T$.

Поняття сильно нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ було введене О. Дзаґнідзе [2], який встановив, що функція $f$ сильно нарізно неперервна на $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли $f$ неперервна. Продовжуючи ці дослідження, в [1] і [3] автори розглядали сильно нарізно неперервні функції, визначені на просторі послідовностей $\ell_2$, наділеному топологією, породженою $\ell_2$-нормою.

Через $\Box_{t\in T} X_t$ позначимо *бокс-добуток* просторів $X_t$, тобто, добуток $\prod_{t\in T} X_t$, наділений *ящиковою топологією*, базу якої утворюють множини вигляду $\prod_{t\in T} U_t$, де $U_t$ – відкрита підмножина $X_t$ для кожного $t \in T$. Якщо $(X_t)_{t\in T}$ – це сім'я пунктованих просторів (*пунктованим* називається простір $X$ з відміченою точкою $*_X \in X$), то символом $\boxdot_{t\in T} X_t$ ми позначимо *малий бокс-добуток* просторів $X_t$, тобто, множину $\sigma(*)$, наділена ящиковою топологією, індукованою з $\Box_{t\in T} X_t$; при цьому $* = (*_{X_t})_{t\in T}$.

Нехай $(X_t)_{t\in T}$ – сім'я пунктованих топологічних просторів. Множина $W \subseteq \sigma(*)$ називається *майже відкритою в* $\sigma(*)$, якщо для довільної скінченної множини $T_0 \subseteq T$ множина $\{z \in \prod_{t\in T_0} X_t : *^z_{T_0} \in W\}$ відкрита в просторі $\prod_{t\in T_0} X_t$, наділеному топологією поточкової збіжності.

**Theorem 1.** *Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність пунктованих просторів, кожний скінченний добуток яких є досконалим паракомпактом і $W \subseteq \sigma(*)$. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) *$W$ – відкрита в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$;*
2) *$W = f^{-1}((0,1])$ для деякої сильно нарізно неперервної функції $f : \sigma(*) \to [0,1]$.*


[1] J. Činčura, T. Šalát and T. Visnyai, *On separately continuous functions $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$*, Acta Acad. Paedagog. Agriensis, XXXI (2004), 11–18.

[2] O. Dzagnidze, *Separately continuous function in a new sense are continuous*, Real Anal. Exchange **24** (1998-99), 695–702.

[3] T. Visnyai, *Strongly separately continuous and separately quasicontinuous functions* $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$, Real Anal. Exchange 38:2 (2013), 499–510.


## Топологічна оцінка структурних змін нелінійної динаміки фінансово-економічних систем.


Квасній Марія Миколаївна

*Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України*

kvasnijmary@gmail.com


Сучасні фінансово-економічні системи, в умовах глобалізації та інтеграції у європейський та світовий фінансовий простір, еволюціонують. Еволюційна економіка, що базується на поведінкових реакціях систем, прагне до рівноваги, але рівновага може не досягатися, проте у таких системах динаміка настільки нестабільна, а варіація поведінки настільки велика, що приводить до зміни структури, зникнення, або появи деяких елементів системи тощо. Динаміку структури можна вивчати засобом топології [1, 2]. Автором запропонований метод побудови топологічних структур на множині станів системи для діагностування якісних змін структури фінансово-економічних систем, тобто, оцінки її динаміки. Суть методу полягає у використанні підходу Лагранжа до опису динаміки: фіксуємо стан ФЕС і спостерігаємо за його зміною по відношенню до попереднього стану. Для опису динаміки ФЕС за таким підходом вводимо узгоджені локальні системи координат. В якості системи координат вибираємо карти топологічного простору, побудовані на множині станів ФЕС. Перехід від однієї карти до іншої дозволяє діагностувати динаміку структури ФЕС.

З метою уникнення певних труднощів, які виникають при побудові топологічних просторів та карт на множині станів ФЕС, автором запропоновано метод моделювання структурних змін ФЕС на основі топологічних просторів одиничного відрізка, який полягає у виборі показника та обчисленні його характеристик, проведенні природної нормалізації, побудові топологічного простору на одиничному відрізку з природною топологією, де за кінці інтервалів беремо межі якісних оцінок показника. Визначаємо відображення із множини значень коефіцієнтів у побудований топологічний простір таким чином, щоб обернене відображення факторизувало множину значень коефіцієнтів відповідно до вибраних якісних оцінок показника.

Запропонований метод дає можливість діагностувати суттєві зміни стану, тобто фіксує перехід кількісних змін у якісні. Множина значень показників, що відповідають незначним змінам динаміки, попадає в один клас еквівалентності, тобто ототожнюється. Такий підхід дозволяє спостерігати за зміною структури зі зміною поведінки та виявляти структурні дисбаланси. [3].


[1] Городецький В. Основи топології в теоремах і задачах / В. Городецький, І. Житарюк. - Ч. 2. - 2003. - 183 с.

[2] Ершов Э. Б. Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа / Э. Б. Ершов // Экономика и математические методы. - 2003. - Т. 39. - № 2. - С. 53-67.

[3] Квасній М. М. Тополого-фрактальне моделювання динаміки регіонального розподілу секторів нефінансових корпорацій і домогосподарств / М. М. Квасній // Актуальні проблеми економіки. - 2010. - № 10. - С. 165-172.

# Теореми про існування розв'язків многозначних включень в евклідових просторах

Кліщук Богдан Анатолійович

*Інститут математики НАН України*

kban1988@gmail.com

В доповіді розглядаються деякі властивості многозначних відображень в евклідових просторах, зокрема теореми про існування розв'язків многозначних включень, звуження яких на деяку підмножину в замиканні області евклідового простору задовольняють "умовам типу гострого кута".

**Означення 1.** Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори. Відображення $F : X \to Y$ називається *многозначним*, якщо образом точки $x \in X$ є множина $F(x) \subset Y$.

**Означення 2.** Нехай $F_1$, $F_2 : X \to Y$ — два многозначні відображення. Відображення $F_2$ називається *звуженням* $F_1$, якщо $F_1(x) \supset F_2(x)$ для всіх точок $x \in X$.

Нехай $Y^*$ — дуальний простір до простору $Y$.

**Означення 3.** Відображення $F : A \to Y$ $(A \subset X)$ задовольняє *"умові когострого кута"* на $A$, якщо для кожної точки $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$, існує точка $x \in A$ така, що виконується умова $\mathrm{Re}\,\langle y, y^* \rangle \geq 0$ для всіх точок $y \in F(x)$.

Розглядаємо $E^n$ — $n$-вимірний евклідовий (дійсний або комплексний) простір, $\langle *, * \rangle$ — скалярний добуток в $E^n$, $conv\ A$ — опукла оболонка множини $A$.

**Теорема.** *Нехай $D$ — область евклідового простору $E^n = X$. Нехай $K \subset \overline{D}$ — підмножина в замиканні цієї області і нехай існує таке звуження многозначного відображення $F : \overline{D} \to E^n = Y$ на підмножину $K$, яке задовольняє "умові когострого кута" і $conv\ F(K)$ — компакт. Тоді, якщо $conv\ F(K) \subset F(\overline{D})$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

**Наслідок.** *Нехай $K \subset \overline{D}$ — підмножина області $\overline{D}$. Нехай многозначне відображення $F : \overline{D} \to E^n = Y$ має звуження $F_1$ на підмножину $K$, для якого $conv\ F_1(K)$ — компакт і $conv\ F_1(K) \subset F(\overline{D})$. Тоді, якщо $0 \notin F(\overline{D})$, то знайдеться точка $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$, для якої існує точка $x \in A$ така, що виконується умова $\mathrm{Re}\,\langle y, y^* \rangle < 0$ хоча б для деякого $y \in F(x)$.*

Використано результати робіт К. Солтанова [4], [2], [3] та Ю. Зелінського [1].

[1] *Солтанов К. Н.* О нелинейных отображениях и разрешимости нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1318—1323.

[2] *Soltanov K. N.* Remarks on Separation of Convex Sets, Fixed-Point Theorem and Applications in Theory of Linear Operators // Fixed Point Theory and Applications. — 2007. — 14 p.

[3] *Soltanov K. N.* On semi-continuous mappings, equations and inclusions in the Banach space // Hacettepe J. Math. Statist. — 2008. — Vol. 37. — P. 9—24.

[4] *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К.: Наукова думка, 1993. — 264 с.

[5] *Зелинский Ю. Б., Клищук Б. А., Ткачук М. В.* Теоремы о включении для многозначных отображений // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 7. — С. 1003—1005.

## Побудова та властивості деякого класу процесів Маркова

Кнопова Вікторія Павлівна

*Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України*

vicknopova@googlemail.com

Доповідь присвячено побудові деякого класу процесів Маркова в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо оператор

$$Lf(x) := a(x)\cdot\nabla f(x)+\int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x+u)-f(x)-u\cdot\nabla f(x)1_{\{\|u\|\le 1\}}\big)m(x,u)\mu(du) \tag{1}$$

визначений на функціях класу $C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$ –двічи неперервно диференційовних, та прямуючих до 0 на нескінченності.

У доповіді ми розглянемо три ключові моменти побудови процесу Маркова, генератор якого в просторі $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ неперервних функцій, що прямують до 0 на нескінченності, має зображення (2) на функціях класу $C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1) Використовуючи модифікований метод параметриксу, ми побудуємо функцію $p_t(x,y)$, що є "кандидатом"на розв'язок задачі Коші для оператору $\partial_t - L$;

2) Покажемо, що побудована функція є імовірнісною щільністю процесу Маркова $X$, що є розв'язком мартингальної задачі для $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$;

3) Покажемо, що оператор $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$ допускає замикання в $C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$, і це замикання співпадає з генератором $(A, D(A))$ процесу $X$. Далі, покажемо, що $p_t(x,y)$ є розв'язком задачі Коші для $\partial_t - A$, та є єдиним розв'язком мартингальної задачі для $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$.

Доповідь базується та сумісній роботі з О. М. Куликом [1].

[1] *V. Knopova, A. Kulik.* Intrinsic compound kernel estimates for the transition probability density of a Lévy type processes and their applications. Preprint 2014.

## Analysis on nonlinear homogeneous spaces

Kondratyuk Andriy Andriyovych

*Ivan Franko National University of Lviv*

kond@franko.lviv.ua

Different nonlinear homogeneous spaces $X$ (including the Klein spaces) are considered. The spaces of functions invariant with respect to some subgroups of transformations of $X$ are investigated.

## Darboux transformation of generalized Jacobi matrices

Ivan Kovalyov

*National Pedagogical Dragomanov University*

i.m.kovalyov@gmail.com

Let $\mathfrak{J}$ be a monic generalized Jacobi matrix, i.e. a three-diagonal block matrix of special form, introduced by M.Derevyagin and V. Derkach in 2004. Conditions for a monic generalized Jacobi matrix $\mathfrak{J}$ which ensure a factorization $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ with $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{U}$ being lower and upper triangular two-diagonal block matrices of special form are found. Analogues of Christoffel formulas for polynomials of the first and the second kind, corresponding to the Darboux transformation $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ are found.

Let $\{\mathfrak{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of real numbers and let a linear functional $\mathfrak{S}$ be defined on the set of all complex polynomials $\mathbb{C}[\lambda]$ by

$$\mathfrak{S}(\lambda^n) = \mathfrak{s}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

The functional $\mathfrak{S}$ is called *quasi* $-$ *definite* if all the principal submatrices of the Hankel matrix $(\mathfrak{s}_{i+k})_{i,k=0}^{n}$ are nonsingular for every $n \in \mathbb{Z}_+$. Associated with such functional is a sequence of monic polynomials $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ which are orthogonal with respect to $\mathfrak{S}$ and satisfy three-term recurrence relations

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + c_n P_n(\lambda) + b_n P_{n-1}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

where $b_n,\ c_n \in \mathbb{R},\ b_n \neq 0,\ b_0 = 1$ and initial conditions $P_{-1}(\lambda) = 0$ and $P_0(\lambda) = 1$. The matrix

$$J = \begin{pmatrix} c_0 & 1 & & \\ b_1 & c_1 & 1 & \\ & b_2 & c_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3}$$

is called the monic Jacobi matrix associated with the functional $\mathfrak{S}$. Let $\widetilde{\mathfrak{S}}(\lambda^n) := \mathfrak{s}_{n+1}$, $(n \in \mathbb{Z}_+)$. The functional $\widetilde{\mathfrak{S}}$ is *quasi* $-$ *definite* if and only if

$$P_n(0) \neq 0 \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

A sequence of monic polynomials $\{\widetilde{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ associated with the functional $\widetilde{\mathfrak{S}}$ is called *the Christoffel transform* of $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. In the quasi-definite case relations between $J$ and the monic Jacobi matrix $J^{(p)}$ associated with $\widetilde{\mathfrak{S}}$ were studied in [1]). As was shown in [1], a monic Jacobi matrix admits an $LU-$ factorization $J = LU$ with lower-triangular and upper-triangular two-diagonal matrices $L$ and $U$, respectively, if and only if (4) holds and in this case $J^{(p)}$ is shown to admit the representation $J^{(p)} = UL$. The monic Jacobi matrix $J^{(p)}$ is called *the Darboux transformation of* $J$.

Darboux transformations of monic Jacobi matrices which do not meet the condition (4) were studied in [3]. In this case the perturbed functional $\widetilde{\mathfrak{S}}$ defined above is not quasi-definite and as was shown in [3] the natural candidate for the Darboux transformation $\mathfrak{J}^{(p)}$ of such a matrix $J$ can be found in a class of generalized Jacobi matrices studied in [2]).

In the present note *Darboux transformation* of generalized Jacobi matrices associated with not quasi-define functionals $\mathfrak{S}$ are studied. The set of normal indices of the sequence $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_i\}_{i=0}^{\infty}$ is defined by

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \{\mathfrak{n}_j \in \mathbb{N} : \mathbf{d}_{\mathfrak{n}_j} \neq 0, j = 1, 2, \ldots\}, \quad \mathbf{d}_{n_j} = \det(\mathfrak{s}_{i+k})_{i,k=0}^{n_j-1}. \tag{5}$$

Associated with a not quasi-define functional $\mathfrak{S}$ is a system of polynomials of the first kind $P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ which are solutions of a system of difference equations

$$\mathfrak{b}_j y_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda) - \mathfrak{p}_j(\lambda) y_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) + y_{\mathfrak{n}_{j+1}}(\lambda) = 0 \qquad (\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_{j-1}}) \tag{6}$$

subject to the initial conditions $P_{\mathfrak{n}_{-1}}(\lambda) \equiv 0$ and $P_{\mathfrak{n}_0}(\lambda) \equiv 1$. The system (6) is associated with a monic generalized Jacobi matrix $\mathfrak{J}$ (see [2]). It is shown that a generalized Jacobi matrix $\mathfrak{J}$, admits an $\mathfrak{L}\mathfrak{U}-$factorization $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$, with lower-triangular and upper-triangular two-diagonal block matrices $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{U}$ if and only if

$$P_{\mathfrak{n}_j}(0) \neq 0, \quad \text{for all } j \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

It is shown that the monic generalized Jacobi matrix $\mathfrak{J}^{(p)}$, associated with the functional $\widetilde{\mathfrak{S}}$, can be represented as $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$. This monic generalized Jacobi matrix $\mathfrak{J}^{(p)}$ is called the Darboux transformation of $\mathfrak{J}$. Explicit formulas for Christoffel transforms of polynomials of the first kind $\widetilde{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ corresponding to the Darboux transformation $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ are found.


[1] M.I. Bueno, F. Marcellán, *Darboux transformation and perturbation of linear functionals*, Linear Algebra Appl., Vol. 384 (2004), 215-242.

[2] *M. Derevyagin, V.Derkach* Spectral problems for generalized Jacobi matrices// Linear Algebra Appl., Vol. 382 (2004), 1?24.

[3] M. Derevyagin, V.Derkach, *Darboux transformations of Jacobi matrices and Páde approximation*, Linear Algebra and Its Applications, vol. 435, no. 12, pp. 3056-3084, 2011.


## Синтетичний алгоритм на основі ідей ітеративного агрегування та апроксимації оберненого оператора


Копач Михайло Іванович

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"*

kopachm@gmail.com

Обшта Анатолій Феліксович

*Національний університет "Львівська політехніка"*

Шувар Богдан Антонович

*Національний університет "Львівська політехніка"*


Розглядаємо агрегаційно-ітеративний алгоритм, який поєднує ідею багатопараметричного методу ітеративного агрегування ([1], ст. 158–159) і його узагальнень з ідеєю апроксимації оберненого оператора ([1], ст. 150) як одного з проекційно-ітеративних методів [2] з оператором проектування банахового простору $E$ на його підростір $E_p$ розмірності $p < \infty$ (див. [3], ст. 468–482).

Нехай задане рівняння має вигляд:

$$x = A_1 x + A_2 x + b \quad (b \in E), \tag{1}$$

де $A_2 : E \to E$, $A_1 : E \to E_p$. Вважаємо, що $A_2$ має малий спектральний радіус. При великих $k$ оператор $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} A_2^i$ близький до оператора $(I - A_2)^{-1}$ ($I$ – тотожний оператор), причому для розмірності оператора $S_k A_1$ маємо $\dim S_k A_1 E = \dim A_1 E$. Рівняння (2) подамо у вигляді $x = S_k A_1 x + A_2^{k+1} x + S_k$ і шукаємо його розв'язок $x^*$ за допомогою ітераційного алгоритму $x_{n+1} = S_k A_1 x_{n+1} + A_2^{k+1} x_n + S_k b$ ($x_0 \in E, \ \ n = 0, 1, \ldots$), який в ([1], ст. 150) названий методом Я.Д. Мамедова. Синтетичний багатопараметричний агрегаційно-ітеративний алгоритм, досліджений в ([3], ст. 468–496), будуємо за допомогою формул:

$$x_{n+1} = S_k A_1 x_n + A_2^{k+1} x_n + \sum_{j=1}^{N} a_j(x_n)(y_{jn} - y_{j\ n+1}) + S_k b, \tag{2}$$

$$y_{i\ n+1} = \lambda_i y_{i\ n+1} - (\varphi_i, A_2^{k+1} x_n) - (\varphi_i, S_k b) \quad (i = \overline{1, N}) \tag{3}$$

де $(S_k A_1)^* \varphi_i^* = \lambda_i \varphi_i$, $(\varphi_i, a_j(x_n)) = 0 \quad (i, j = \overline{1, N}, i \neq j, n = 0, 1, \ldots)$, де $(S_k A_1)^*$ – спряжений з $S_k A_1$ оператор, $\varphi_i \in E_p, \varphi_i^* \in E_p^*$, $E_p^*$– спряжений з $E_p$ простір. Якщо, зокрема, $a_j(x_n) =^{df} (\varphi_j, x_n)^{-1} S_k A_1 x_n$ ($j = \overline{1, N}$), то агрегаційно-ітеративний алгоритм (2), (1) тотожний з багатопараметричним алгоритмом, що поєднує ідею методу Я.Д. Мамедова та ідею ітеративного-агрегування. Достатні умови збіжності цього алгоритму та його застосування до систем лінійних алгебраїчних рівнянь та до лінійних інтегральних рівнянь наведені в ([3], ст. 468–496).


[1] *Краснопольський М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. // М.: Наука, 1985. – 255 с.

[2] *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. // К.: Наук. думка, 1968. – 243 с.

[3] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. // Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 516 с.

# Про склеювання скінченної кількості дифузійних процесів на прямій

Копитко Б.І., Шевчук Р.В.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

bohdan.kopytko@gmail.com, r.v.shevchuk@gmail.com

Доповідь присвячена проблемі побудови двопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає неоднорідний марковський процес (не обов'язково неперервний) на прямій $\mathbb{R}$, розділеній на інтервали деяким скінченним набором точок $r_1,\ r_2,\ldots,r_n,\ n\in\mathbb{N}$, такий, що його частини у внутрішніх точках відповідних інтервалів збігаються із заданими там дифузійними процесами, а його поведінка в точках $r_i,\ i=\overline{1,n}$, описується заданими в них умовами спряження Феллера-Вентцеля ([1]). Ще $n$ умов спряження, які задаються в точках $r_1,\ r_2,\ldots,r_n$ відповідно, є відображжженням властивості феллеровості шуканого процесу.

Для розв'язання цієї задачі застосовано аналітичний метод. За такого підходу проблема побудови потрібної напівгрупи практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність останньої задачі встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних параболічних потенціалів простого шару.

Одержані результати узагальнюють аналогічні результати, одержані авторами раніше у роботі [2], де розглядався випадок лише однієї точки склеювання ($n=1$).

[1] *Вентцель А.Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР. Математика. – 1956. – **111**, №2. – С. 269–272.

[2] *Kopytko B.I., Shevchuk R.V.* On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition // Theory of Stochastic Processes. – 2011. – **17(33)**, No. 2. – P. 55–70.

# Статична одноперіодна модель дуополії диференційованих товарів з випадковими цінами

Косаревич Катерина Вікторівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
kosarevych_ktps@ukr.net

Розглядається статична одноперіодна модель цінової конкуренції для дуополії диференційованих товарів [1]-[3] з випадковими цінами.

Класична детермінована модель Бертрана [1] передбачає, що виробники встановлюють ціни, а ринок визначає об'єм, який може бути проданий по таких цінах. При цьому фірми призначають значення своїх стратегічних змінних одночасно, так що кожна не може прогнозувати реакцію конкурента на зроблений нею самою вибір. Метод аналізу дуополії, який пропонується в даній доповіді, виглядає ідентичним до пошуку рівноваги за Нешом [4] в детермінованій грі, де фірми використовують свої ціни в ролі стратегій. Проте ринкам цілком нових товарів притаманна ситуація, коли кожен виробник перебуває в умовах невизначеності щодо попиту на даний товар та приймає рішення про встановлення ціни на власний ризик. Тому в модифікованій моделі ціни є випадковими величинами, причому незалежними і такими, що їх закони розподілу належать деякому класу розподілів із змінюваним параметром.

В межах побудованої моделі запропоновано методику пошуку «виправленої» рівноваги за Нешом [5].

[1] *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // RAND J. Economics. — 1984. — 15, N 4. — P. 546–554.

[2] *Dixit A.K.* A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers // Bell J. Economics. — 1979. — 10, N 1. — P. 20–32.

[3] *Горбачук В.М.* Равновесия Курно-Нэша и Бертрана-Нэша для гетерогенной дуополии дифференциированных продуктов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. - С.29-37.

[4] *Nash J.F.* Noncooperative games // Ann.Math. - 1951. - No.45. - P.286-295.

[5] *Косаревич К.В.* Про існування та форму «виправленої» рівноваги за Нешом у грі з випадковими стратегіями для класу квадратичних функцій витрат // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2014. — Вип.11. — С. 108–113.

# Межові версії теорем збіжності для багатовимірних неперервних дробів

Кучмінська Христина Йосифівна

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

khkuchminska@gmail.com

Для багатовимірних неперервних дробів (гіллястих ланцюгових дробів, гіллястих ланцюгових дробів з нерівнознаними змінними, двовимірних неперервних дробів [1]) розглядаються теореми збіжності у термінах множин елементів і множин значень. Визначаются межові множини значень таких дробів у цих теоремах, якщо множини елементів замінені їхніми межами.

Приклад (Теорема типу Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними).

Нехай $\rho$ - дісне число з $(0, 1/2]$ і нехай $F_\rho$ - сімейство гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

$$\frac{a_{00}}{1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}}{1}},$$

де $a_{i(n)}$ - комплексні числа, $i(n) = i_1 i_2 ... i_n$ - мультиіндекс, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}, n = 1, 2, ...,\quad i_0 = N,\quad a_{i(n)}$ задовольняють умови $\left|a_{i(n)}\right| = \frac{1}{i_{n-1}} \rho (1 - \rho)$ для всіх $n$, $|a_{00}| = \rho (1 - \rho)$.

Тоді множина всіх можливих значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними є кільце $A_\rho$:

$$\rho \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \leq |f| \leq \rho.$$

[1] *Кучмінська Х. Й.* Межові версії теореми Ворпіцького для двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. - 2015. - т.66, №8. - 1106 - 1116.

# Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій

А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська

*Львівський національний університет ім. І.Франка*

kurylyak88@gmail.ru, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

Через $\mathcal{A}^2$ позначимо клас аналітичних функцій $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon |\tau| < 1\}$, вигляду $f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m, \quad z = (z_1, z_2)$. Для $r = (r_1, r_2) \in [0,1)^2$ і $f \in \mathcal{A}^2$ позначимо

$$\Delta_r = \{t = (t_1, t_2) \in [0,1)^2\colon t_1 \geq r_1, t_2 \geq r_2\},$$

$$\mu_f(r) = \max\{|a_{nm}| r_1^n r_2^m\colon n, m \geq 0\},\ M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\},$$

а для послідовності $Z = (Z_{nm}(t))$ випадкових величин, які утворюють рівномірно обмежену мультиплікативну систему випадкових величин ($MC$) позначимо клас $\mathcal{K}(f, Z) = \{f(z,t) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} Z_n(t) z_1^n z_2^m\colon t \in [0,1]\}$. Через $\mathcal{E}$ позначимо клас множин $E \subset [0,1)^2$ *асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^2$, тобто, для яких існує $r_0 \in [0,1)^2$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int_{E \cap \triangle_{r_0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} < +\infty,$$

і скажемо, що множина $E \subset [0,1)^2$ має асимптотично нескінченну логарифмічну міру на $[0,1)^2$, якщо $E \notin \mathcal{E}$.

**Теорема 1 ([1])** $(i)$ *Для кожної функції $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ і будь-якого $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \Big( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{1+\delta}.$$

$(ii)$ *Існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$, стала $C > 0$, множина $E \subset [0,1)^2$, $E \notin \mathcal{E}$ такі, що для всіх $r \in E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \geq C \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

**Теорема 2** $(i)$ *Для кожної функції $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$, довільної $Z \in MC$ і будь-якого $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ майже напевно (м.н.) в класі $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність*

$$M_{f_t}(r) \leq \mu_f(r) \Big( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{1/2+\delta}.$$

$(ii)$ *Існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$, стала $C > 0$, множина $E \subset [0,1)^2$, $E \notin \mathcal{E}$ і $Z \in MC$ такі, що для всіх $r \in E$ м.н. в класі $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність*

$$M_{f_t}(r) \geq C \mu_f(r) \Big( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{1/2}.$$

[1] *Куриляк А., Скасків О., Шаповаловська Л.* Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі // Буковинський матем. журн. – 2014. - Т.2, №2-3. – С.130–135.

# Групи зсувів та згортка у просторі поліноміальних $\omega$-ультрарозподілів

Лозинська Віра Ярославівна

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів*

vlozynska@yahoo.com

Шарин Сергій Володимирович

*Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ*

sharyn.sergii@gmail.com

Нехай $P\big(\mathcal{E}'_{(\omega)}\big)$ — мультиплікативна алгебра неперервних скалярних поліномів на просторі $\omega$-ультрарозподілів типу Берлінга $\mathcal{E}'_{(\omega)}$, а $P'\big(\mathcal{E}'_{(\omega)}\big)$ — сильно спряжена до неї згорткова алгебра так званих поліноміальних $\omega$-ультрарозподілів. У доповіді буде розглянуто групи зсувів та згортку у просторах $P\big(\mathcal{E}'_{(\omega)}\big)$ та $P'\big(\mathcal{E}'_{(\omega)}\big)$. Ці результати є продовженням досліджень, розпочатих у статті [1].

[1] *Лозинська В.Я., Шарин С.В.* Поліноміальні $\omega$–ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є // Прикладні проблеми механіки і математики. – Вип. **11**. – 2013. – С. 12–20.

# Про мероморфні розв'язки диференціальних рівнянь з заданими полюсами

Луківська Дзвенислава Володимирівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
d.lukivska@gmail.com

Шавала Олена Василівна

*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка*
shavala@ukr.net

Розглянемо диференціальне рівняння

$$f^{(n)} + Af^m = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

і, зокрема, рівняння

$$f'' + Af = 0. \tag{2}$$

Нехай задано послідовність $\Lambda$ комплексних чисел $\lambda_k$ кратності $p_k \in \mathbb{N}$ без скінченних точок скупчення в $\mathbb{C}$, тобто відображення $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, де кожному натуральному числу $k$ ставиться у відповідність пара $(\lambda_k, p_k)$. Ми досліджуємо існування мероморфних розв'язків диференціальних рівнянь вигляду (1)-(2), де $A$ – ціла або мероморфна в $\mathbb{C}$ функція. Сформулюємо одну з отриманих теорем.

**Теорема 1.** *Для того щоб існувала ціла функція $A$, така, що рівняння (1) має мероморфний розв'язок без нулів з полюсами $\Lambda$ необхідно і достатньо, щоб $m > 1$ і для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконувалось $n \leq p_k(m-1)$.*

Задачі, близькі до даної, вивчались в [1], [2], [3].

[1] *Šeda V.* On some properties of solutions of the differential equation $y'' = Q(z)y$, where $Q(z) \neq 0$ is an entire function // Acta F. R. N. Univ. Comen. Mathem. 4 (1959), 223-253.

[2] *Bank S.* A note on the zero-sequences of solutions of linear differential equations // Results in Mathematics 13 (1988), 1-11.

[3] *Heittokangas J., Laine I.* Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros // Acta Math. Univ. Comenianae 74 (2005), 287-307.

# Рівняння теплопровідності з випадковими крайовими умовами

Марина Ізабелла Василівна

*Ужгородський національний університет*

В даній роботі запропоновано метод побудови розв'язків крайових задач для рівняння теплопровідності математичної фізики з випадковими крайовими умовами. Вважаємо, що крайові умови є випадковими процесами з просторів Орліча ($E\xi = 0$). У роботі використовується метод, який був запропонований Бейсембаєвим Е. та Козаченком Ю.В. [2], який дозволяє обґрунтовувати застосування методу Фур'є до задач математичної фізики. Подібна задача для рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку коли початкові умови є процеси Орліча розглядались в [3]. В монографіях [1] і [4] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

Розглянемо крайову задачу для параболічного рівняння з двома незалежними змінними ($x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $T > 0$) фізична інтерпретація якої: знайти розподіл температури в однорідному стержні довжини $\pi$, до кінців якого підводяться теплові потоки $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ ($t \in [0, T]$, $T > 0$) — які є незалежними випадковими процесами з просторів Орліча $L_U(\Omega)$, якщо початкова температура точок стержня рівна нулю. Дана задача зводиться до розв'язування наступної крайової задачі [5]:

$$Z_t(t, x) = Z_{xx}(t, x), 0 < x < \pi, 0 < t < T < \infty, \tag{1}$$

$$Z\left(0, x\right) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \tag{2}$$

$$Z'_x\left(t, 0\right) = \eta_1\left(t\right), Z'_x\left(t, \pi\right) = \eta_2\left(t\right), 0 \leq t < T < \infty, \tag{3}$$

$\eta_1\left(t\right)$, $\eta_2\left(t\right)$, $0 \leq t < T < \infty$ є незалежними випадковими прооцесами з простору Орліча $L_U\left(\Omega\right)$.

Нехай $E\eta_1(t) = 0$, $E\eta_2(t) = 0$.

Позначимо: $E\eta_1(t)\eta_1(s) = B_1(t, s)$, $E\eta_2(t)\eta_2(s) = B_2(t, s)$. Нехай коваріаційні функції $B_1(t, s)$, $B_2(t, s)$ неперервні. Для спрощення задачі візьмемо $\eta_1\left(0\right) = \eta_2\left(0\right) = 0$.

Згідно

[5] розв'язок задачі (1)-(3) шукається у вигляді:

$$Z(t,x) = \frac{1}{2\pi}x^2\eta_2(t) + \left(x - \frac{1}{\pi}x^2\right)\eta_1(t) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\cos nx \int\limits_0^t e^{n^2 t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt'. \tag{4}$$

Позначимо

$$S_{00}\left(t,x\right) = Z\left(t,x\right), \tag{5}$$

$$S_{01}\left(t,x\right) = \frac{1}{\pi}x\eta_2(t) + \left(1 - \frac{2}{\pi}x\right)\eta_1(t) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 t}\sin nx \int\limits_0^t e^{n^2 t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt', \tag{6}$$

$$S_{02}\left(t,x\right) = \frac{1}{\pi}\eta_2(t) - \frac{2}{\pi}\eta_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 t}\cos nx \int\limits_0^t e^{n^2 t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt', \tag{7}$$

$$S_{10}\left(t,x\right) = \frac{1}{2\pi}x^2\eta_2'(t) + \left(x - \frac{1}{\pi}x^2\right)\eta_1'(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\left(-\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t) - \frac{1}{n^2}\eta_1'(t)\right) +$$

$$+n^2\int\limits_0^t e^{-n^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt'. \tag{8}$$

**Theorem 1.** *Розглядається задача (1)-(3). Нехай $\eta_2(t)$, $\eta_1(t)$ — незалежні, строго орлічеві випадкові процеси з простору Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$, для $U$ виконується умова $g$. Крім того, функція $\varphi(\lambda)$ ($\lambda > 0$) неперервна, зростаюча, додатня і така, що $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ зростає при $\lambda > v_0$ ($v_0 = const$, $v_0 \geq 0$). Нехай збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}\varphi\left(k^2 + v_0\right)\varphi\left(m^2 + v_0\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2 + v_0\right)\varphi\left(m^2 + v_0\right),$$

*де*

$$C_{k,m}^{I} = \frac{1}{k^2m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_1(t,t_1)}{\partial t \partial t_1}, C_{k,m}^{II} = \frac{(-1)^{k+m}}{k^2m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_2(t,t_1)}{\partial t \partial t_1},$$

*Крім того, виконуються умови* $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv < \infty, \tag{9}$$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv < \infty, \tag{10}$$

*де*

$$F_1 = 5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

$$F_2 = 5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

*Тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos nx \int_0^t e^{-n^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt'$$

*збігається рівномірно за ймовірністю в* $C([0,T]\times[0,\pi])$*, та існує розв'язок задачі (1)-(3), що зображується у вигляді ряду (4), такий, що ряди (6)-(8) збігаються рівномірно за ймовірністю.*


[1] *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes // American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.

[2] *E. Beisenbaev, Yu. V. Kozachenko* Uniform convergence in probability of random series, and solutions of boundary value problems with random initial conditions // Theory Probab. Math. Statist. **21**, 9-23.

[3] *Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2008. - Вип. 16. – С 174 -183.

[4] *Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами : монографія // К.:Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2008. – С. 8–22, 95–103, 127–161.

[5] *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики // Москва, Высшая школа, 1964

## Алгебри ліпшицево-аналітичних функцій

Марцінків М.В.

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"*

mariadubey@gmail.com

Нехай $X-$ метричний простір з фіксованою точкою $\theta$, $E-$ нормований лінійний простір. У роботі [1] доведено, що для довільного метричного простору $X$ з фіксованою точкою існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму банахів простір $B(X)$, такий, що кожне ліпшицеве відображення $F(x) : X \to E$ продовжується до лінійного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$, де $L_F-$ ліпшицева константа відображення $F$. Для довільного елемента $x \in X$ позначимо через $\underline{x} := \nu(x)$ — образ цього елемента при ізометричному вкладенні простору $X$ у простір $B(X)$. Розглянемо нормовану множину $X$ та нормований простір $E$. Відображення $F : X \to E$ називається *ліпшицево-аналітичним*, якщо існує $\widetilde{F} : B(X) \to E$, $\widetilde{F} \in H(B(X), E)$ таке, що $F(x) = \widetilde{F}(\underline{x})$.

Нехай $X$ — нормована множина. Розглянемо простір ліпшицево-аналітичних функцій $\mathbb{H}_b(X) = \mathbb{H}(X, \mathbb{C})$. Зауважимо, що $\mathbb{H}_b(X)$ є алгеброю відносно поточкового множення. Для кожної функції $f \in \mathbb{H}(X)$ ми позначаємо $\widetilde{f}$ — функцію з $H_b(B(X))$ таку, що $\widetilde{f}(\underline{x}) = f(x)$.

Зокрема, будуть доведені такі факти:

**Твердження 1.** *Відображення $j : \widetilde{f} \mapsto f$ є неперервним гомоморфізмом алгебр.*

**Твердження 2.** *Множина $\ker j$ є ідеалом алгебри $H_b(B(X))$ і алгебра $\mathbb{H}_b(X)$ є ізоморфною до $H_b(B(X))/\ker j$.*

Нагадаємо, що *характером* $\varphi$ топологічної алгебри $A$ над полем $\mathbb{C}$ називається лінійний неперервний функціонал на $A$ такий, що $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

**Твердження 3.** *Множина характерів $\mathcal{M}(\mathbb{H}_b(X))$ алгебри $\mathbb{H}_b(X)$ є підмножиною в $\mathcal{M}(B(X))$ і складається з тих характерів $\varphi \in \mathcal{M}(B(X))$, що $\varphi(f) = 0$ для кожного $f \in \ker j$.*

[1] V. Pestov, Free Banach spaces and representation of topological groups, Functional Anal. Appl. 20 (1986) 70-72.

## Неперервність $n$-лінійних ледь неперервних відображень

Маслюченко В.К., Ровенко Н.М.

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

math.analysis.chnu@gmail.com, nadya37@ukr.net

З. Пьотровський помітив [1], що кожне лінійне ледь неперервне відображення $f : X \to Y$ між топологічними векторними просторами $X$ і $Y$ є неперервним. У праці [2] було показано, що це ж залишається вірним і для білінійних відображень $f : X \times Y \to Z$. Тут ми узагальнюємо цей результат на $n$-лінійні відображення.

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами $X$ і $Y$ називається *ледь неперервним у точці* $x_0$ з $X$, якщо для кожного околу $V$ точки $y_0 = f(x_0)$ в $Y$ існує така відкрита непорожня множина $G$ в $X$, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці простору $X$.

Нарізно лінійні відображення $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ ми називаємо *$n$-лінійними*.

**Theorem 1.** *Нехай $X_1, ..., X_n$ і $Z$ – топологічні векторні простори і $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ – $n$-лінійне ледь неперервне в деякій точці з добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$ відображення. Тоді $f$ неперервне за сукупністю змінних.*

Топологічний векторний простір $Z$ називається *локально обмеженим*, якщо в ньому існує обмежений окіл нуля. Відображення $f : X \to Y$, де $X$ – топологічний простір, а $Y$ – топологічний векторний простір, називається *локально обмеженим у точці* $x_0$ з $X$, якщо існує такий окіл $U$ точки $x_0$ в $X$, що його образ $f(U)$ – обмежена множина в просторі $Y$.

**Theorem 2.** *Нехай $X_1, ..., X_n$ – топологічні векторні простори, $Z$ – локально обмежений топологічний векторний простір і $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ – $n$-лінійне відображення, яке локально обмежене в деякій точці з добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$. Тоді відображення $f$ неперервне.*

[1] *Piotrowski Z.* Somewhat continuity on linear topological spaces implies continuity // Math. Slovaca. – 1979. – **29**, № 3. – P.289 - 292.

[2] *Маслюченко В.К., Ровенко Н.М.* Про неперервність ледь неперервних лінійних і білінійних відображень // Бук. мат. журн. - 2014. – **2**, № 4. - С.84-88.

# Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в сильно $\sigma$-метризовних просторах

Маслюченко Володимир Кирилович

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
vmaslyuchenko@ukr.net

Філіпчук Ольга Ігорівна

*Буковинський державний фінансово-економічний університет*
o-sh@ukr.net

Нагадаємо, що топологічний простір $Z$ називається *сильно $\sigma$-метризовним*, якщо існує така зростаюча послідовність його замкнених метризовних підпросторів $Z_n$, що $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ і для кожної збіжної в $Z$ послідовності точок $z_k$ існує такий номер $n$, що $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_n$. Багато результатів про множину $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах вдалося перенести на той випадок, коли простір значень $Z$ є сильно $\sigma$-метризовним [1-5]. Зокрема, в [3] було доведено, що коли $X$ – топологічний простір, $Y$ – метризовний компакт, $Z$ – сильно $\sigma$-метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $K_hC$-функція, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в $X$ (слабші результати для $CC$-функцій і $\overline{K}C$-функцій були отримані в [1,2]). Як відомо [6], для метризовного простору $Z$ множина $C_Y(f)$ буде залишковою, якщо простір $Y$ лише задовольняє другу аксіому зліченності. Тому виникає питання: чи буде множина $C_Y(f)$ залишковою в $X$, якщо $Y$ задовольняє другу аксіому зліченності, $Z$ – сильно $\sigma$-метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $K_hC$-функція? Такі ж питання можна ставити для нарізно неперервних функцій, $KC$-функцій чи $\overline{K}C$-функцій. Відповіді на ці питання поки що невідомі навіть для нарізно неперервних функцій.

Тут ми анонсуємо одну теорему про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to Z$, отриману в результаті пошуків відповіді на поставлені проблеми.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – топологічний простір, що задовольняє другу аксіому зліченності, $Z$ – сильно $\sigma$-метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді існують псевдобаза $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ в $Y$ і послідовність множин $E_k$ в $X$, такі, що об'єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ – це залишкова множина в просторі $X$ і $E_k \times V_k \subseteq C(f)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.*

З цим результатом споріднені такі теореми.

**Теорема 2([3]).** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, $Z$ – сильно $\sigma$-метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $K_hC$-функція. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в $X$.*

**Теорема 3([4]).** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – топологічний простір зі зліченною псевдобазою, $Z$ – $\sigma$-метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $K_hC$-функція. Тоді множина $C(f)$ залишкова в добутку $X \times Y$.*

Нагадаємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$, називається *$K_hC$-функцією*, якщо воно неперервне відносно другої змінної і *горизонтально квазінеперервне*, тобто для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$ і довільних околів $U$ – точки $x$ в $X$, $V$ – точки $y$ в $Y$ і $W$ – точки $z = f(p)$ в $Z$ існують відкрита непорожня множина $G$ в $X$ і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$.


[1] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці : Рута, 1995. – С. 192-246.

[2] *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, №3. – С. 337-344.

[3] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І.* Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №1. – С. 42-46.

[4] *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* До питання про точки розриву $K_hC$-функцій на неперервних кривих // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 122-124.

[5] *Філіпчук О.І.* До питання про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в сильно $\sigma$-метризовних просторах // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці : Рута, 2007. – С. 183-188.

[6] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Сукупна неперервність і квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №12. – С. 1711-1714.

# Про двосторонню апроксимацію розв'язків багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Ментинський Сергій Мирославович

*Національний університет "Львівська політехніка"*

serge.mentynsky@i.ua

В доповіді розглядається один спосіб відшукання двосторонніх наближень до розв'язків звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$x^{(m)} = f\left(t, x, x', ...., x^{(m-1)}\right), \tag{1}$$

де $t \in [0;T]$, $x^{(i)} \in [a_i;b_i]$, $a_i, b_i \in C^{(m-i)}[0;T]$, $(i = 0, 1, ..., m-1)$, які задовольняють крайові умови

$$x(t_i) = x_i, \quad 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} = T, \quad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{2}$$

побудований на основі чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка [1]. Структура алгоритму ґрунтується на експлуатованому в [2] (див. також [3]) підході до дослідження двосторонніх методів для рівнянь з немонотонними операторами. Для апроксимації розв'язку задачі (1), (2) використовуємо припущення, що праву частину рівняння (1) можна подати у вигляді $B$-монотонної (за Ю.В.Покорним) за змінними $y_i, z_i$, $(i = 0, 1, ..., m-1)$ функції $F(t, y_0, z_0, y_1, z_1, ..., y_{m-1}, z_{m-1})$, для якої

$$F(t, x_0, x_0, x_1, x_1, ..., x_{m-1}, x_{m-1}) \equiv f(t, x_0, x_1, ..., x_{m-1}).$$

Встановлено умови монотонності та рівномірної щод $t \in [0;T]$ збіжності послідовностей верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі.

Отримані результати, у порівнянні з відомими двосторнніми методами, розширюють межі їх практичного застосування, оскільки дозволяють враховувати вплив на двосторонність та монотонність отриманих послідовних наближень похибок, що виникають при наближенні реальних задач їх математичними моделями, а також похибок, які виникають при розв'язуванні прикладних задач із використанням сучасної обчислювальної техніки.

[1] *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1992. - 277 с.

[2] *Курпель Н.С., Шувар Б.А.*Двусторонние операторные неравенства и их применения. - Киев: Наук. думка.- 1980.- 268 с.

[3] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи - Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. - 516 с.

## Мінімаксні методи оцінювання функціоналів від стохастичних процесів

Моклячук Михайло Павлович

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

mmp@univ.kiev.ua

Класичні методи дослідження задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стохастичних процесів розвинуті у працях А. М. Колмогорова, Н. Вінера, А. М. Яглома, Ю. А. Розанова. Вони базуються на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. На практиці, однак, повна інформація про спектральні щільності у більшості випадків неможлива. Щоб подолати це ускладнення, знаходять параметричні чи непараметричні оцінки спектральних щільностей або підбирають щільності, виходячи з інших міркувань. Потім застосовують класичну теорію оцінювання, вважаючи, що вибрані тим чи іншим способом спектральні щільності є істинними. Такий підхід, як показали К. С. Вастола та Г. В. Пур на конкретних прикладах, може призвести до значного росту величини похибки оцінки. Тому доцільно шукати оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такі оцінки називають мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення величини похибки. Варто відзначити роботу У. Гренадера[1], у якій вперше запропоновано мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стохастичних процесів.

У даній доповіді обговорюються мінімаксні методи оцінювання функціоналів від невідомих значень стохастичних процесів. Більш детальну інформацію можна знайти в оглядовій статті С. Касама і Г. Пура[2] та у книгах М. Моклячука[3], М. Моклячука та О. Масютки[4], І. Дубовецької та М. Моклячука[5].

[1] *Grenander U.* A prediction problem in game theory. – Ark. Mat.– 1957. – Vol. 3, Is. 4. – pp. 371-379

[2] *Kassam S., Poor H.* Robust techniques for signal processing: A survey. – Proc. IEEE. – 1985. – Vol. 73, Is. 3. – pp. 433-481.

[3] *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів. – К.:ВПЦ "Київський університет". – 2008. – 320 с.

[4] *Moklyachuk M., Masyutka O.* Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2012. – 296 p.

[5] *Голіченко І.І., Моклячук М. П.* Оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних процесів. – К.: Інтерсервіс. – 2014. – 208 с.

# Про діагоналі нарізно неперервних відображень зі значеннями у $\sigma$-метризовних рівномірно зв'язних просторах

Михайлюк Володимир Васильович

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

vmykhaylyuk@ukr.net

Собчук Олександр Васильович

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

ss220367@ukr.net

Дослідження діагоналей нарізно неперервних функцій $f : X^2 \to \mathbb{R}$ беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1] і були продовжені у роботах багатьох математиків (дивись, наприклад, [2]).

Топологічний простір $X$ називається *рівномірно зв'язним*, якщо існує така неперервна функція $\lambda : X \times X \times [0,1] \to X$, що $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ і $\lambda(x, x, t) = x$ для всіх $x, y \in X$ і $t \in [0, 1]$.

Топологічний простір $X$ називається *сильно $\sigma$-метризовним*, якщо існує зростаюча послідовність $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених метризовних підпросторів $X_n$ простору $X$ така, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і для кожної збіжної в $X$ послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $x_n \in X_m$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. При цьому послідовність $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ називатиється *вичерпуванням простору $X$*.

Вичерпування $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ простору $X$ називатимемо *досконалим*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервне відображення $\pi_n : X \to X_n$ з $\pi_n(x) = x$ для кожного $x \in X_n$. Вичерпування $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ рівномірно зв'язного $\sigma$-метризовного простору $(X, \lambda)$ називатимемо *узгодженим з відображенням $\lambda$*, якщо $\lambda(X_n \times X_n \times [0, 1]) \subseteq X_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

**Theorem 1.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $(Z,\lambda)$ – сильно $\sigma$-метризовний рівномірно зв'язний простір з досконалим вичерпуванням $(Z_k)_{k=1}^{\infty}$, узгодженим з відображенням $\lambda$, $n \in \mathbb{N}$ і $g : X \to Z$ – відображення $(n-1)$-го класу Бера. Тоді існує нарізно неперервне відображення $f : X^2 \to Z$ таке, що $f(x,x) = g(x)$ для кожного $x \in X$.*

**Theorem 2.** *Існує рівномірно зв'язний простір $(Z,\lambda)$ з метризовним рівномірно зв'язним підпростором $Z_1$, відображення $g : [0,1] \to Z$ першого класу Бера такі, що існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $g_n : [0,1] \to Z_1$, яка поточково на $[0,1]$ збігається до $g$, і $g$ не є діагоналлю для жодного нарізно неперервного відображення $f : [0,1]^2 \to Z$.*


[1] Baire R. Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser. 3. – 1899. – V. 3. – P. 1-123.

[2] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. Diagonals of separately continuous functions and their analogs // Topology Appl. – 2013. – V. 160. – P. 1-8.


## Перехідність в теорії функцій


Нестеренко Василь Володимирович

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

math.analysis.chnu@gmail.com


Поняття перехідності було введено В.Крецу та В.Маслюченком в [1] як допоміжний інструмент при встановленні неперервності $S$-неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. В [2] поняття перехідності було перенесено на випадок відображень $f : X \to Y$, які діють між довільними топологічними просторами $X$ та $Y$. Відображення $f : X \to Y$ називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу $V$ точки $f(x)$ в $Y$ існують окіл $U$ точки $x$ в $X$ і відкритий окіл $W$ точки $f(x)$ в $Y$, такі, що $W \subseteq V$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, де $frW$ – межа множини $W$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Перехідність є досить слабкою умовою на відображення. Всі неперервні відображення, відображення із замкненим графіком зі значенням в гаусдорфовому просторі, монотонні функції, біекції з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є перехідними. Крім того, кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є сумою двох перехідних функцій. Однак, існують дійсні функції, які не є перехідними в жодній точці.

Відображення $f : X \to Y$ *має слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області $G$ в $X$, тобто відкритої і зв'язної множини, є зв'язною множиною в $Y$. В [2] було одержано результат про декомпозицію неперервності, який узагальнює всі попередні результати на цю тему, зокрема, добре відомий результат про неперервність дійсної функції із замкненим і зв'язним графіком.

**Theorem 1.** *Нехай $X$ – локально зв'язний простір, $Y$ – топологічний простір. Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно перехідне і має слабку властивість Дарбу.*

У зв'язку з теоремою 2 виникло природне бажання дослідити, в яких відомих теоремах (зокрема декомпозиційних теоремах) умову замкненості графіка можна замінити на перехідність. Першим пунктом досліджень в цьому напрямку стала класична теорема про замкнений графік Стефана Банаха [3, с. 35, теорема 7], яка у спрощеному вигляді формулюється так: для довільних банахових просторів $X$ і $Y$ кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. В [4] було встановлено, що лінійне відображення, що діє між топологічними векторними просторими, завжди має слабку властивість Дарбу. Тому, з урахуванням теореми 2, справедлива така

**Theorem 2.** *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних топологічних векторних просторах, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

З цього результату випливає, що кожне лінійне скінченновимірне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком буде неперервним для довільних топологічних векторних просторів $X$ та $Y$ при умові гаусдорфовості простору $Y$.

Не в усіх теоремах умову замкненості графіка вдається замінити перехідністю. Функція $f : J \to \mathbb{R}$, де $J$ – скінчений або нескінчений проміжок в $\mathbb{R}$, *двосторонньо квазінеперервна в точці* $x \in J$, якщо для довільного околу $V$ точки $y = f(x)$ в $\mathbb{R}$ і довільного числа $\delta > 0$ існують відкриті непорожні множини $U$ і $W$ в $J$, такі, що $U \subseteq (x, x + \delta)$, $W \subseteq (x - \delta, x)$ і $f(U \cup W) \subseteq V$, і просто *двосторонньо квазінеперервна*, якщо вона є такою в кожній точці. В [5] Й.Добош встановив, шо двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненним графіком є неперервною. Однак, в [6] було встановлено, що для довільного скінченного або нескінченного проміжку $J \subseteq \mathbb{R}$ і довільної ніде не щільної досконалої в $J$ множини $F$ існує така двосторонньо квазінеперервна перехідна функція $f : J \to \mathbb{R}$, що множина $D(f)$ точок розриву функції $f$ рівна $F$.

Крім поняття перехідності існує багато його аналогів: слабка перехідність, квазіперехідність, локальна $w^*$-неперервність, локальна $w^*$-квазінеперервніс локальна відносна неперервність тощо. Зв'язки між цими поняттями, а також багато інших результатів за участю цих понять, висвітлено в [7, 8].

[1] *Крецу В.І., Маслюченко В.К.* Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50–54.

[2] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Декомпозиція неперервності та перехідні відображення // Мат. вісн. НТШ – 2011. – **8**. – С. 132–150.

[3] *Банах С.С.* Курс функціонального аналізу. – К.: Рад. школа, 1948. – 216 с.

[4] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах // Карпатські математичні публікації. - 2013. - **5**, №1. - С. 79–88.

[5] *Doboš J.* Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 77–80.

[6] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Розриви двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій// Мат. Студії. - 2014. - **41**, № 1. - С.18–27.

[7] *Нестеренко В.В.* Про аналоги перехідності та декомпозицію неперервності // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 25 лютого – 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 72–74.

[8] Maslyuchenko V., Nesterenko V. Analogues of transitiveness and decomposition of continuity // Real Anal. Exch. (у друці)

# Збурення стійких процесів та псевдодиференціальні рівняння

Осипчук М. М.

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Портенко М. І.

*Інститут математики НАН України*

portenko@imath.kiev.ua

Процес Маркова в $\mathbb{R}^d$ зі щільністю ймовірності переходу відносно лебегової міри, яка задається рівністю

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d,$$

де $c>0$, $\alpha\in(1,2]$ задані сталі, називається симетричним стійким процесом. Твірний оператор $\mathbf{A}$ такого процесу є псевдодиференціальним оператором порядку $\alpha$ (його символ задається функцією $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$). При

$\alpha = 2$, $c = 1/2$ цей оператор є оператором Лапласа (з точністю до мультиплікативної константи), а симетричний стійкий процес — вінеровим процесом.

Для кожної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ функція

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) g(t,x,y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

є єдиним розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}_x u(t,x), \quad \lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x)$$

в класі функцій, що прямують до нуля на нескінченності (див. [1]).

В доповіді обговорюються питання побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для псевдодиференціального рівняння виду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}_x u(t,x) + (a(x), \mathbf{B}_x) u(t,x),$$

де векторнозначний оператор $\mathbf{B}$ пов'язаний з оператором $\mathbf{A}$ співвідношенням $\mathbf{A} = c\,\mathbf{div}(\mathbf{B})$. Оператор $\mathbf{B}$ є псевдодиференціальним аналогом градієнта (його символ дорівнює $(2i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$). Розглядаються випадки обмеженої неперервної функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ та узагальненої функції $a(x) = q(x)\delta_S(x)\nu$, де $S$ — гіперплощина в $\mathbb{R}^d$ ортогональна до одиничного вектора $\nu \in \mathbb{R}^d$, $(q(x))_{x\in S}$ — неперервна обмежена функція, $\delta_S$ — узагальнена функція, що діє на неперервні з компактними носіями функції $\varphi$ за правилом $\langle \delta_S, \varphi\rangle = \int_S \varphi(x)\,d\sigma$.

Фундаментальні розв'язки $G(t,x,y)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ (в обох випадках) побудовано шляхом збурення функції $g(t,x,y)$, тобто, як розв'язки рівняння

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)(\mathbf{B}_z G(\tau,z,y), a(z))\,dz.$$

Встановлено існування розв'язку цього рівняння, задоволення ним рівності Колмогорова-Чепмена та рівність одиниці інтегралу по всьому простору $\mathbb{R}^d$ за третім аргументом (при фіксованих перших двох).

[1] Кочубей А. Н. *Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988, **52** (5), 909–934.

# Моделювання гауссових процесів в просторах $L_p$

Осипчук О.М.

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
alex.skein@gmail.com

Розглядається $X(t)$, $t \in [0;T]$ $(T > 0)$ комплекснозначний гауссів випадковий процес з $EX(t) \equiv 0$ та функцією коваріації $R(s,t) = EX(s)\overline{X(t)}$.

Нехай $X_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \xi_k a_k(t)$, $N \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$, $a_k(\cdot)$ – деякі функції, $\xi_k$ – набір незалежних стандартних гаусових випадкових величин.

Позначимо через $\triangle_N(t) = X(t) - X_N(t)$.

**Означення 1.** *Говоритимемо, що $X_N(t)$ є моделлю випадкового процесу $X(t)$, яка наближає його з надійністю $0 < 1-\delta < 1$ та точністю $\varepsilon > 0$ в $L_p([0;T])$ $(p \geq 2)$, якщо $P(\|\triangle_N\|_{L_p} > \varepsilon) \leq \delta$.*

Одержано наступні результати.

**Теорема 1.** *Нехай функція коваріації центрованого гауссового процесу $X(t)$, $t \in [0,T]$, $T > 0$ , має вигляд $R(s,t) = \displaystyle\int_{-d}^{d} f(s,\lambda)\,\overline{f(t,\lambda)}d\lambda$ з квадратично інтегрованою на $[-d,d]$ для кожного $t \in [0;T]$ функцією $f(t,\cdot)$. Якщо функція $f(t,\lambda)$ має обмежену на $[0;T] \times [-d;d]$ частинну похідну першого порядку по $\lambda$ і є обмеженою на $[0;T]$ при $\lambda = \pm d$ , то при*

$$N > \left(\frac{2T}{\varepsilon}\right)^{2/p} C^{1/2} \min\left(p, 2\ln\frac{2}{\delta}\right),$$

*де $C = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d}{2}} \max\left(\sup|f(t,d) - f(t,-d)|, 2d \sup\left|\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)\right|\right)$ , випадковий процес $X_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \xi_k a_k(t)$, де $\xi_k$ – незалежні стандартні гауссові випадкові величини, $a_k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2d}} \displaystyle\int_{-d}^{d} f(t,\lambda)\, e^{-i\frac{k\pi\lambda}{d}} d\lambda$, є моделлю процесу $X(t)$ з точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $0 < 1-\delta < 1$ в просторі $L_p([0;T])$.*

**Теорема 2.** *Нехай $X(t)$, $t \in [0;T]$, $T > 0$ центрований гауссів процес з незалежними приростами. Нехай його функція коваріації $R(s,t) = F(s \wedge t)$ з неспадною двічі дифенційовною на $[0;T]$ функцією $F$, причому, $F(0) = 0$. Позначимо через $f(\lambda) = F'(\lambda)$. Якщо для функції $f$ виконуються наступні умови: $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^2 f(\lambda) = 0$; $f(\lambda)$ і $\dfrac{f'(\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}}$ обмежені на $[0;T]$; то для кожних*

*$\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $p \geq 2$ модель $X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\xi_k$ наближає процес $X(t)$ в $L_p([0;T])$ при $N > (\frac{T}{\varepsilon})^{2/p} C^{1/2} \min\left(p, 2\ln\frac{2}{\delta}\ \right)$ , де*

$$C = \frac{\sqrt{8T}}{\pi} \max\left(\sup\sqrt{f(\lambda)}\ , \frac{T}{2}\sup\frac{f'(\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}}\ \right).$$

*Тут $\xi_k$ – незалежні стандартні гауссові величини,*

$$a_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^t \sqrt{f(\lambda)} \cos\frac{\pi k}{T}\ \lambda\ d\lambda\ ,\ k \in \mathbb{N}, \quad a_0(t) = \frac{1}{T}\int_0^t \sqrt{f(\lambda)} d\lambda.$$

Результати одержані під керівництвом професора Козаченка Ю.В. і їх доведення базуються на методиці розробленій в роботі [1].

[1] *Довгай Б. В., Козаченко Ю. В., Розора І. В.* Моделювання випадкових процесів у фізичних системах. – К.: ВПЦ "Задруга 2010. - 230 с.

## Cross-correlation operator over the space of real-analytic functions

Patra Mariia Igorivna

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

patramariia@gmail.com

Let $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ be the space of hyperfunctions with a compact support in the positive semiaxis $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ and $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ be its predual space of germs of real-analytic functions. We consider the cross-correlation operator

$$C_f : \mathcal{A}(\mathbb{R}_+) \ni \varphi \longmapsto f \star \varphi, \qquad f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+),$$

where $f \star \varphi$ is defined by the formula

$$(f \star \varphi)(t) := -\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+t)dz, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma$ is a closed path in the intersection of the domains of $\boldsymbol{\varphi}(\cdot + t)$ and $F$, and surrounding $\operatorname{supp} f$ once in the positive orientation.

Denote by $\mathscr{L}\big(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)\big)$ the space of all linear continuous operators on $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$. The next theorem is a generalization of classic Schwartz's theorem on shift-invariant operators.

**Theorem 1.** *The mapping* $\mathcal{K} : \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+) \ni f \longmapsto C_f \in \mathscr{L}\big(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)\big)$ *produces an algebraic isomorphism from the convolution algebra* $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ *onto the commutant* $[T]^c$ *of the shift semigroup* $T$*, i.e.*

$$C_{f*g} = C_f \circ C_g, \qquad f, g \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+).$$

This talk is based on a joint work with Sharyn S.V. [1].

[1] *Patra M., Sharyn S.* On Cross-correlation of a Hyperfunction and a Real Analytic Function // International Journal of Mathematical Analysis 2015, **9** (2), 95–100. doi: 10.12988/ijma.2015.411351

## Метод Монте-Карло чотириквадрантного перетворення форми інформації

М.Л. Петришин

*Прикарпатський національний університет, Івано-Франківськ, Україна*

Л.Б. Петришин

*Прикарпатський національний університет, Івано-Франківськ, Україна, AGH University of Science and Technology, Cracov, Poland*

l.b.petryshyn@gmail.com

Достовірність перетворення форми інформації (ПФІ) є істотним чинником в системах комерційного обліку енергоносіїв. Більшість таких систем здійснює інтегральний облік спожитого ресурсу протягом визначеного періоду часу. Сучасні засоби ПФІ функціонують в режимі зчитування інформаційних відліків з частотою, не меншою за значення, визначене за теоремою Котельникова-Найквіста-Шеннона. Високі динамічні параметри джерела інформації спричиняють до значного підвищення коштів виготовлення та експлуатації інфосистем. Розробка конкуруючих щодо динаміки перетворення методів із нижчою вартістю виготовлення є актуальним завданням, що в масштабах масової продукції багатоканальних розосереджених систем дозволяє заощадити значні кошти. Найбільш адаптованим до ПФІ енерго- та інших носіїв є метод статистичних досліджень Монте-Карло. Реалізація такого перетворювача в своєму складі вимагає якісного генератора псевдовипадкових відліків із максимальною рівномірністю їх розподілу на періоді перетворення довільного інфоперебігу. За звичай, складні алгоритми формування таких розподілів вимагали додаткових мікро контролерів, що зводило на нівець економічну ефективність впровадження ПФІ Монте-Карло. Існувало завдання розробки простого алгоритму та методу формування відліків із якісним псевдивипадковим розподілом мінімальними коштами проектування та виготовлення. Результати тривалого аналізу та здійснених досліджень дозволили розробити новий метод генерування псевдовипадкових відліків [1]. Технічна реалізація такого методу виявилась надзвичайно простою і дешевою. На відміну від мікроконтролерів генератор складається із єдиного двійкового лічильника із дзеркально відображеним підключенням двійкових розрядів до відповідних розрядів цифро-аналогового перетворювача. Вартість такого перетворювача є порівнянною із вартістю розгортаючих чи інтегруючих ПФІ. Результати аналізу імовірнісних параметрів таких генераторів показали достатню якість рівномірності псевдивипадкового розподілу, що дозволило реалізувати надійні дешеві засоби ПФІ із високим класом докладності ПФІ. Позитивною властивістю методу виявилась можливість перетворення додатних та від'ємних значень вхідних параметрів, а за умови аналогової маніпуляції значенням напруги віднесення, здійснити векторне перемноження двох змінних параметрів інфопотоків, а також здійснити розділений по обох знаках облік асиметричних значень інфопотоків, що є актуальним при побудові електронних лічильників електричної енергії. В доповіді запрезентовано алгоритм та метод генерування відліків псевдо випадкового розподілу, структурні та схемотехнічні рішення і моделі засобів ПФІ Монте-Карло.

[1] Петришин Л.Б., Лаврів М.В. Патент на винахід № 89173 «Спосіб генерування псевдивипадкових сигналів та пристрій для його здійснення». Державний реєстр патентів України 11.01.2010.

## Оцінки максимуму модуля характеристичних функцій

Плацидем Марта Іванівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

marta.platsydem@gmail.com

Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, \infty)$ функція $F$ називається [1, с. 10] ймовірносним законом, якщо

$$\lim_{x\to+\infty} F(-x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

а характеристичною функцією закону $F$ називається [1, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \qquad z \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Якщо функція $\varphi$ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, то вона називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Надалі вважатимемо, що $\mathbb{D}_R$ є найбільшим кругом аналітичності функції $\varphi$. Відомо [1, с. 37–38], що для того, щоб характеристична функція $\varphi$ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і досить, щоб для кожного $r \in [\,0, R\,)$

$$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), x \to +\infty. \tag{2}$$

Через $\Omega(-\infty, R)$, $0 < R \le +\infty$, позначимо клас додатних необмежених на $[-\infty, R)$ функцій $\Phi$ таких, що похідна $\Phi'$ є додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $[-\infty, R)$. Для функцій $\Phi \in \Omega(-\infty, R)$ нехай

$$\Psi(r) = r - \frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$$

– функція, асоційована з $\Phi$ за Ньютоном, а $\phi$ - функція, обернена до $\Phi'$.

**Твердження 1.** *Нехай $\Phi \in \Omega(0, R)$, $0 < R \le +\infty$, а $\varphi$ – аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірносного закону $F$, який задовольняє умову*

$$\varlimsup_{r \uparrow R} W_F(x) e^{Rx} = +\infty.$$

*Тоді, якщо $\ln \mu(r_k, \varphi) \le \Phi(r_k)$ для деякої зростаючої до $R$ послідовності $(r_k)$, то*

$$\ln W_F(x_k) \le -x_k \Psi(\phi(x_k)) \tag{3}$$

*для всіх $k$, де $x_k = \Phi'(r_k)$.*

За додаткових умов на спадання функції $W_F$ (тобто на зростання $\ln \mu(r, \varphi)$) можна отримати з (1) оцінки зверху на $\ln \mu(r_k, \varphi)$ для деякої послідовності $(r_k) \uparrow R$. Існує два зв'язаних між собою шляхи розв'язання цього питання. Одне з них засноване на результатах статті [3].

Для $\Phi \in \Omega(0, R)$ і $\Phi'(x_0) \le a < b < +\infty$, приймемо

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b - a} \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t)}{t^2} dt, \quad G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left( \frac{1}{b - a} \int_a^b \varphi(t) dt \right).$$

Відомо [2], що $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$, а в [3] доведена наступна лема.

**Лема 2.** *Нехай $(x_k)$ зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $\Phi \in \Omega(0, R)$, $0 < R < +\infty$, і $\mu_D(r)$ – максимальний член ряду Діріхле*

$$D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-x_k \Psi(\phi(x_k)) + s x_k\}, \quad s = r + it.$$

*Тоді*

$$\overline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\mu_D(r)}{\Phi(r)}=1,\quad \overline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\ln\mu_D(r)}{\ln\Phi(r)}=1, \tag{4}$$

$$\underline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\mu_D(r)}{\Phi(r)}=\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)} \tag{5}$$

*і, якщо*

$$\ln\mu_D(r)+\left(\frac{\Phi(r)\Phi''(r)}{(\Phi'(r))^2}-1\right)\ln\Phi(r)\geq 0,\quad r\in[r_0,R), \tag{6}$$

*то*

$$\underline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\ln\mu_D(r)}{\ln\Phi(r)}=\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{\ln G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)}. \tag{7}$$

Використовуючи лему 2, доведемо наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай $\Phi\in\Omega(0,R)$, $0<R\leq+\infty$, і $\varphi$ – аналітична $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірносного закону $F$, який задовольняє*

$$\overline{\lim_{r\uparrow R}}W_F(x)e^{Rx}=+\infty.$$

*Припустимо, що $\ln\mu(r,\varphi)\leq\Phi(r)$ для всіх $r\in[r_0,R)$ і $\ln W_F(x_k)-\ln W_F(x_{k+1})=O(1)$, $k\to\infty$, для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності $X=(x_k)$ додатних чисел. Тоді*

$$\underline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\mu(r,\varphi)}{\Phi(r)}\leq\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)} \tag{8}$$

*і якщо*

$$Q(r)+\left(\frac{\Phi(r)\Phi''(r)}{(\Phi'(r))^2}-1\right)\ln\Phi(r)\geq q>-\infty,\quad r\in[r_0,R), \tag{9}$$

*де $Q(r)\equiv 0$, якщо $R<+\infty$, і $Q(r)\equiv\ln r$, якщо $R=+\infty$, то*

$$\underline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln\ln\mu(r,\varphi)}{\ln\Phi(r)}\leq\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{\ln G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)}. \tag{10}$$


[1] *Линник Ю.В., Островський Н.В.* Разложение случайных величин и векторов.– М.:Наука-1972-479с.

[2] *Заболоцький М.В., Шеремета М.М.* Узагальнення теореми Ліндельофа// Укр. матем. журн.–1998.–Т.50,№9.–С.1177-1192.

[3] *Філевич П.В.,Шеремета М.М.* Про одну теорему Л.Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле // Укр. матем. вісник.–2006.–Т.3,№2.–С. 187-198.

# Особливості побудови гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу

Приймак (Петрів) Галина Миколаївна

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"*

galja_petriv@mail.ru

Дослідженням спектру алгебри $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі $X$ займалися і займаються науковці із різних країн світу. Вагомий внесок у цьому напрямку належить авторам робіт [1],[2],[3]. Не менш цікавими є питання, які стосуються гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі і функціонального числення для алгебри символів $H_b(X)$ і деякої алгебри $A$.

У доповіді основна увага буде спрямована на висвітлення двох важливих результатів. Першим із них є теорема, яка стверджує, що між алгебрами $H_b(X)$ та $H_b((A \otimes_\pi X)'', A'')$ (де банахова алгебра $A$ є регулярною за Аренсом) існує гомоморфізм, який будується за допомогою функціонального числення та продовження Арона-Бернера.

Основою для другого результату стала лема про продовження лінійного функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ до характера $\psi \in M_b$ із статті [4]. Використовуючи аналогічний підхід, вдалося довести теорему про продовження лінійного оператора $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A)$ до гомоморфізма $\Psi \in M_A(H_b(A \otimes_\pi X))$.

[1] Aron R. M., Cole B. J., and Gamelin T. W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. - 1991. - 415. -P. 51-93.

[2] Dineen S., Hart R. E., and Taylor C. Spectra of tensor product elements III : holomorphic properties // Proceedings of the Royal Irish Academy — 2003 —103A (1)— p. 61-92.

[3] A. Zagorodnyuk, Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.

[4] Загороднюк А. В., Петрів Г. М. Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013 — Вип. 11 — С. 7–11.

# On quasi-representations of the Heisenberg-Weil algebra, Markov co-orbits and numerical analysis


Anatolij K. Prykarpatski

*Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine*

pryk.anat@gmail.com


With a fairly generous definition, a one-dimensional real-valued discrete nonlinear dynamical system on a manifold $M \subset l_2(\mathbb{Z};\mathbb{R}^m)$ for some finite $m \in \mathbb{Z}_+$ is any evolution equation that can be written down as

$$du/dt = K[u], \tag{1}$$

where $t \in \mathbb{R}$ is the evolution parameter, $u \in M$ and $K : M \to T(M)$ is some smooth enough vector field [1, 2] on the manifold $M$. Very often such equations (1) can be naturally obtained as the standard discretization [3, 8, 13, 16] of a given smooth nonlinear differential dynamical system

$$d\mathrm{u}/dt = \mathcal{K}[\mathrm{u}] \tag{2}$$

on a functional submanifold $\mathcal{M} \subset L_2(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$, generated by a smooth vector field $\mathcal{K} : \mathcal{M} \to T(\mathcal{M})$. Namely, there exist such mesh points $x_j \neq x_i \in \mathbb{R}$ for $i \neq j \in \mathbb{Z}$, that the corresponding vector $\{\mathrm{u}(x_j) \in \mathbb{R}^m : j \in \mathbb{Z}\} = u \in M$ and the suitable discretization of (2) coincides with (1).

Other approach to the discretization of (2) is based on the Calogero type [7, 8] scheme of constructing finite-dimensional quasi-representations of the infinite-dimensional Heisenberg-Weyl algebra of operators $\mathfrak{h} := \{\hat{x}, D_x, \hat{1} : x \in \mathbb{R}\}$, where $D_x := \partial/\partial x$, in some functional submanifold $\mathcal{M}_0 \subset C^\infty([a,b];\mathbb{R}) \cap L_2([a,b];\mathbb{R})$ of differentiable functions, as owing to the well known von-Neumann theorem [17, 26], there exists no exact representation of $\mathfrak{h}$ in a finite-dimensional functional subspace $\mathcal{M}_0^N \subset \mathcal{M}_0$ for any $N \in \mathbb{Z}_+$. For example, any smooth scalar function $f \in \mathcal{M}_0$ on an interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ can be interpolated [26, 7] in a polynomial form as follows:

$$f(x) \to f_N(x) := \sum_{j=1}^{N} (f(x_j)\rho_j^{-1}) e_j(x), \tag{3}$$

$$e_j(x) := \prod_{i=\overline{1,N}, i \neq j} (x - x_i), \rho_j := \prod_{i=\overline{1,N}, i \neq j}^{N} (x_j - x_i)$$

and its derivative, respectively, as

$$D_x f(x) \to D_x f_N(x) = \sum_{i,j=\overline{1,N}} Z_{ij}(f(x_j)\rho_j^{-1})\ e_i(x)), \tag{4}$$

where $f_N(x) \in \mathcal{M}_0^N$ subject to the polynomial basis $\{e_j(x) \in \mathcal{M}_0^N : j = \overline{1,N}\}$. Then the well known Calogero type quasi-representation [7, 18, 14, 10, 11] of the Heisenberg-Weyl algebra $\mathfrak{h}$ is obtained as

$$\begin{gathered} End(\mathcal{M}_0) \ni \hat{x} \to X := diag\{x_1, x_2, ..., x_N\} \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}), \\ End(\mathcal{M}_0) \ni \hat{1} \to I := diag\{1,1,...,1\} \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}) \\ End(\mathcal{M}_0) \ni D_x \to Z := \{Z_{ij} := (x_i - x_j)^{-1}, i \neq j = \overline{1,N}; \\ Z_{ii} := \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)^{-1} : i = \overline{1,N}\} \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}), \end{gathered} \tag{5}$$

where interpolating mesh points $x_i \neq x_j \in \mathbb{R}, i \neq j = \overline{1,N}$, are chosen to be different and satisfying in a suitably defined finite-dimensional Hilbert space $l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R})$ the strong as $N \to \infty$ limiting canonical Lie algebra relationship

$$\lim_{N\to\infty}([Z,X] - I) = 0. \tag{6}$$

The matrix quasi-representations (5) make it possible to construct easily a *naive* matrix discretization of the nonlinear dynamical system (2) as follows:

$$dU^{(m)}/dt = \mathcal{K}(U^{(m)}, [Z^{(m)}, U^{(m)}], [Z^{(m)}, [Z^{(m)}, U^{(m)}]], ...[\underbrace{Z^{(m)}, ..., [Z^{(m)}}_{(p\text{-}times)}, U^{(m)}]]), \tag{7}$$

where the matrices

$$U^{(m)} := u(X^{(m)}) = diag(u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N)) \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R})^{\otimes m}, \tag{8}$$

$$Z^{(m)} := \underbrace{Z \otimes Z \otimes ... \otimes Z}_{(m\text{-}times)} \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R})^{\otimes m}$$

belong to the tensor product matrix space

$$Endl_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R})^{\otimes m} := Endl_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}) \otimes Endl_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}) \underbrace{\otimes ... \otimes}_{(m\text{-}times)} Endl_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}). \tag{9}$$

When deriving the matrix equation (7), we took into account that $\mathcal{K}[\mathrm{u}] := \mathcal{K}(\mathrm{u}, D_x\mathrm{u}, D_x^2\mathrm{u}, \ldots D_x^p\mathrm{u})$ for some fixed $p \in \mathbb{Z}_+$, and for arbitrary operator mapping $\varphi_N(\hat{x}) : \mathcal{M}_0^N \to \mathcal{M}_0^N$ we made use of the Calogero type quasi-representation property:

$$End(\mathcal{M}_0) \ni (D_x^n \varphi_N)(\hat{x}) \to \underbrace{[Z, [Z, [Z, ..., [Z}_{(n\text{-}times)}, \varphi(X)]]]...] \in End\ l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R}), \tag{10}$$

which holds for arbitrary operator derivatives $(D_x^n\varphi_N)(\hat{x}):\mathcal{M}_0^N\to\mathcal{M}_0^N, n\in\mathbb{Z}_+$.

Now we will take into account the observation [15] that the quasi-representations (5) belong, respectively, to the Markov direct sum splitting of the general Lie algebra $gl(N;\mathbb{R}):=\mathfrak{g}=\mathrm{M}(\mathfrak{g})\oplus\mathrm{E}(\mathfrak{g}):$

$$I,X\in\mathrm{E}(\mathfrak{g}),\quad Z\in\mathrm{M}(\mathfrak{g}), \tag{11}$$

where, by definition, the linear subspaces

$$\begin{gathered}\mathrm{M}(\mathfrak{g}):=\{\mathrm{M}(A)\in\mathfrak{g}:\mathrm{M}(A)=A-diag(eA)\}\\ \mathrm{E}(\mathfrak{g}):=\{\mathrm{E}(A)\in\mathfrak{g}:\mathrm{E}(A)=diag(eA),\ e:=(1,1,...,1)\in l_2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{R})^*,\end{gathered} \tag{12}$$

are Lie subalgebras of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Introduce now, by definition, projections $\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}:\mathfrak{g}=\mathrm{M}(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{g}$, $\mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})}:\mathfrak{g}=\mathrm{E}(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{g}$. Then within the standard R-matrix approach [4, 5, 12, 23, 25] the expression

$$[X,Y]_{\mathrm{R}}:=\ [\mathrm{R}X,Y]+[X,\mathrm{R}Y],\ \mathrm{R}:=1/2(\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}-\mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})}), \tag{13}$$

for arbitrary $X,Y\in\mathfrak{g}$ defines on $\mathfrak{g}$ a new Lie commutator structure, generating on the space $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ the deformed Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\eta\}_{\mathrm{R}}(\alpha):=<\alpha,[\nabla\gamma(\alpha),\nabla\eta(\alpha)]_{\mathrm{R}}>=<\alpha,[\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla\gamma(\alpha),\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla\eta(\alpha)]> \tag{14}$$

for $\gamma,\eta\in\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ and any $\alpha\in\mathfrak{g}^*$, generalizing the classical Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\eta\}(\alpha):=<\alpha,[\nabla\gamma(\alpha),\nabla\eta(\alpha)]>=<\alpha,[\nabla\gamma(\alpha),\nabla\eta(\alpha)]> \tag{15}$$

on $\mathfrak{g}$. Here the bi-linear trace-functional on the $\mathfrak{g}$

$$<X,Y>:=\mathrm{tr}\ (XY) \tag{16}$$

for $X,Y\in\mathfrak{g}$ is nondegenerate and $Ad$-invariant. Taking into account that with respect to this trace-functional (16) the Lie algebra $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$, the Poisson bracket (14) generates for any Hamiltonian function $H\in\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ the following dynamical system on arbitrary $\alpha\in\mathfrak{g}:$

$$d\alpha/dt=\mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})^\perp}[\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla H(\alpha),\alpha], \tag{17}$$

where we took into account that projections $\mathrm{P}^*_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\simeq\mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})^\perp}$ and $\mathrm{P}^*_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})}\simeq\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})^\perp}$. This construction becomes more simpler in the case when the Hamiltonian function $H\in\mathrm{I}(\mathfrak{g})$ is taken to be a Casimir one with respect to the classical Lie-Poisson bracket (15), satisfying the condition

$$[\alpha,\nabla H(\alpha)]=0 \tag{18}$$

for any $\alpha \in \mathfrak{g}$.

Amongst nonlinear differential dynamical systems (2) there exist a wide class of nonlinear evolution equations which are Lax type [8, 16, 19, 12] integrable and whose discretizations are often very important for their numerical analysis and diverse applications. Yet in general, the presented above directly discretized matrix dynamical system (7) does not *a priori* inherits the Lax type integrability of (2). Thus, a natural question arises: *how to construct a priori Lax type integrable matrix discretization of a given Lax type integrable nonlinear dynamical system (2)?*

As the Lax type representations of the presumably integrable dynamical systems (2) depend on an arbitrary spectral parameter $\lambda \in \mathbb{C}$, it motivates us to study their corresponding matrix Lax type quasi-representations, also depending on the spectral parameter $\lambda \in \mathbb{C}$, as well as depending on the basis matrix representation operators (5), belonging, respectively, to the Markov direct sum splitting of the general Lie algebra $gl(N;\mathbb{R}) := \mathfrak{g} = \mathrm{M}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{E}(\mathfrak{g})$. This can be done effectively by means of introducing the notion of the metrized loop [4, 12, 23, 5] algebra $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]]$ and the related Lax type integrable Poisson flows on it.

In my report I will present a solution to this posed above question in the case of a special class of nonlinear Lax type integrable dynamical systems on functional manifolds making use of the Calogero type discretization scheme and the analysis of the Markov type co-adjoint orbits by means of the related Lie-algebraic techniques.


[1] Abraham R., Marsden J. Foundation of mechanics. *The Benjamin/Cummings Publ.* Co, Masachusets, 1978

[2] Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. NY, *Springer*, 1978

[3] Ablowitz M., Ladik J. Nonlinear differential-difference equations. J. Math. Phys.,1975, 16, N3, p. 598-603

[4] M. Błaszak, Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems, Springer, 1998.

[5] Blackmore D., Prykarpatsky A.K. and Samoylenko V.Hr. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis. World Scientific Publ., NJ, USA, 2012

[6] Blackmore D., Prykarpatsky A.K. Dark equations and their light integrability. J Nonl Math Phys, 2014 (in press)

[7] Calogero F., Franco E., Numerical tests of a novel technique to compute the eigenvalues of differential operators, Il Nuovo Cimento B, 1985, 89, 161–208

[8] Calogero F., Degasperis A. Spectral Transform and Solitons. Amsterdam: North-Holland, 1982. 378 p.

[9] Cavalcante J., Mc. Kean H. P. The classical shallow water equations. Physica D, 1982, vol.4, N 2. P.253-260.

[10] Contesou E. La $C^*$-algebra d'une quasi-representation. C. R. Acad. Sci Paris, 1997, 324, ser.1, p. 293-295

[11] Connes A., Gromov M. and Moscovici H. Conjecture de Novikov et fibres presque plats. C. R. Acad. Sci. Paris, 1990, 310, ser. 1 Math, p. 273-277

[12] Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Hamiltonian method in the Theory of Solitons. Amsterdam: Springer, 1987.498 p.

[13] Kupershmidt B.A. Discrete Lax equations and differential-difference calculus. Asterisque, 1985, vol. 123, p. 5-212.

[14] Lebedev A.V. Quasi-crossed products and an isomorphism theorem for $C^*$-algebras, associated with discrete group representations. Doklady AN SSSR, 1996, v. 10,N5, p. 40-43 (in Russian)

[15] Menon G. Complete integrability of Shock Clustering and Burgers turbulence. Arch. Rational Mech. Anal. 203, (2012), p. 853-882

[16] Newell A. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM, 1986. 250 p.

[17] Neumann J. von. Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik. J. Springer, Berlin, 1932

[18] Miroslaw Lustyk, Julian Janus, Marzenna Pytel-Kudela, Anatoliy K. Prykarpatsky, The solution existence and convergence analysis for linear and nonlinear differential-operator equations in Banach spaces within the Calogero type projection-algebraic scheme of discrete approximations. Cent. Eur. J. Math. 7(3) 2009, p. 775-786

[19] Novikov S.P. (Editor) Theory of Solitons, Springer, 1984

[20] Olver P. Applicatons of Lie groups in Diffrential equations, Moscow, Mir. - 1983. – 639p.

[21] Prykarpatsky A., Blackmore D., Bogolubov N. Hamiltonian Structure of Benney type Hydrodynamic and Boltzmann-Vlasov equations on an axis and Applications to Manufacturing Science. Open systems and Information Dynamics, 1999, v.6, N2, p. 335-373.

[22] Prykarpatsky Ya.A., Finite dimensional local and nonlocal reductions of one type hydrodynamic systems, Rep. Math. Phys. 50 (2002), 349-360.

[23] Prykarpatsky A.K. and Mykytyuk I.V. Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 1998

[24] Pugh M.C., M.J. Shelley. Singularity formation in thin jets with surface tension. Comm. Pure and Appl. Math. 1998. **51**. p.733.

[25] Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky. Integrable systems. Moscow-Izhevsk, R&C-Dynamics, 2003 (in Russian)

[26] Zeidler E. Applied functional analysis. v.108-109, Springer, 1995

# Діофантова властивість малих знаменників нелокальної двоточкової задачі для одного рівняння змішаного типу у прямокутнику


Савка Іван Ярославович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
s-i@ukr.net

Гой Тарас Петрович

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
tarasgoy@yahoo.com


Сучасні проблеми природознавства призводять до необхідності постановки й дослідження якісно нових задач, одним з прикладів яких є нелокальні крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це пов'язано передусім з тим, що математичними моделями різноманітних фізичних, хімічних і біологічних процесів є задачі, в яких замість класичних крайових умов задається певний зв'язок значень шуканої функції та/або її похідних на межі області [1].

Нехай на комплекснозначну функцію $v : [0, T] \to \mathbb{C}$ з класу $C^1[0, T]$ діють функціонали

$$\begin{aligned} M_1[v] &\equiv a_{11}v(0) + a_{12}v(T) + b_{11}v'(0) + b_{12}v'(T), \\ M_2[v] &\equiv a_{21}v(0) + a_{22}v(T) + b_{21}u'(0) + b_{22}v'(T), \end{aligned} \tag{1}$$

де $T > 0$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$, а форми $M_1$ і $M_2$ — лінійно незалежні, тобто ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

дорівнює 2.

Мінор матриці $A$, який складений з $i$-го та $j$-го стовпців ($i < j$), позначимо через $d_{ij}$.

Запровадимо функції

$$f_k(t) = \cos \lambda_k t, \quad g_k(t) = \sin \lambda_k t,$$

які залежать від параметра $k \in \mathbb{N}$, причому $\lambda_k > 0$ і

$$\lambda_k = \pi \left( k - \tfrac{1}{4} \right) + O\left( \tfrac{1}{k} \right).$$

За допомогою метричного підходу [1, 1] отримано такий результат.

**Теорема.** *Якщо*

$$|d_{12} + d_{34}| + |d_{14} - d_{23}| + |d_{13}| + |d_{24}| \neq 0,$$

*то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівності*

$$\Delta_k \equiv \left| U_1[f_k]U_2[g_k] - U_1[g_k]U_2[f_k] \right| \geq \lambda_k^{-\gamma} \tag{2}$$

*виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *при* $\gamma > 1$.

Вирази $\Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$, є малими знаменниками, а виконання для них оцінок (2) є однією з умов коректної розв'язності задачі для рівняння Лаврентьєва – Біцадзе (еліптично-гіперболічного типу) [3] у прямокутній області $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in (-1, 1)\}$:

$$u_{tt} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} = 0, \tag{3}$$

з умовами за змінною $x$

$$u(t, -1) = u(t, 1) = 0, \; u(t, -0) = u(t, +0), \; u_x(t, -0) = u_x(t, +0), \tag{4}$$

і нелокальними двоточковими умовами за змінною $t$

$$\begin{aligned} a_{11}u(0,x) + a_{12}u(T,x) + b_{11}u_t(0,x) + b_{12}u_t(T,x) = \varphi_1(x), \\ a_{21}u(0,x) + a_{22}u(T,x) + b_{21}u_t(0,x) + b_{22}u_t(T,x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{5}$$

У роботах [2, 4] доведено коректність задачі (3)–(5) тільки для окремих випадків нелокальних умов:

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0, \; d_{13} \neq 0; \\ a_{11} = a_{21} = b_{11} = b_{21} = 0, \; d_{24} \neq 0. \end{aligned} \tag{6}$$


[1] *Ільків В. С.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №12. – С. 1624–1650.

[2] *Захаров П. Е.* Нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / П. Е. Захаров // Матем. заметки ЯГУ. – 2005. – Т.12, вып. 2. – С. 17–27.

[3] *Лаврентьев М. А.* К проблеме уравнений смешанного типа / М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе // Докл. АН СССР. – 1950. – 70, №3. – С. 373–376.

[4] *Пинигина Н. Р.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа/ Н. Р. Пинигина // Матем. заметки ЯГУ. – 2010. – Т.17, вып. 1. – С. 100–108.

[5] *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук // К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

# Оцінка малих знаменників багатоточкової нелокальної задачі для псевдодиференціального рівняння із залежними коефіцієнтами в умові

Савка Іван Ярославович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
s-i@ukr.net

Василишин Павло Богданович

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
pashavasylyshyn@rambler.ru

Нехай $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $D_x=\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-i\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=\sum_{j=1}^{p}|k_j|$, псевдодиференціальний оператор $B(D_x)$ ототожнюється з послідовністю комплексних чисел $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, $B(D_x)e^{i(k,x)}=B(k)e^{i(k,x)}$.

При дослідженні розв'язності багатоточкової нелокальної задачі

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-B\left(D_x\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in(0,T)\times(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p,$$

$$\sum_{r=1}^{m}\mu_r(\tau)u(t,x)\Big|_{t=t_r}=\varphi(x),\quad 0=t_1<t_2<\ldots<t_{m-1}<t_m=T,$$

де $\mu_r:[0,1]\ \to\ \mathbb{R}$, $\varphi$ — задана функція, виникає проблема малих знаменників [1], подолання якої полягає у встановленні діофантової оцінки знизу

$$\left|\sum_{r=1}^{m}\mu_r(\tau)e^{B(k)t_r}\right|\geq|k|^{-\gamma}\max\left(1,e^{T\,\mathrm{Re}B(k)}\right)\tag{1}$$

для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

За допомогою метричного підходу доведено наступну теорему.

**Теорема.** *Якщо* $\mu_r \in C^m[0,1]$, $r = 1, \ldots, m$, *а вронскіан* $W[\mu_1, \ldots, \mu_m]$ *функцій* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *— відмінний від нуля на відрізку* $[0,1]$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}$*) чисел* $\tau \in [0,1]$ *оцінка* (1) *виконуєтьcя для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma > p(m-1)$.


[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.


# Оцінки найкращих $m$-членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій


Сердюк Анатолій Сергійович

*Інститут математики НАН України*

serdyuk@imath.kiev.ua

Степанюк Тетяна Анатоліївна

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки*

tania_stepaniuk@ukr.net


Нехай $L_p$, $1 \le p < \infty$, — простір $2\pi$–періодичних сумовних в $p$–му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_p := \Big( \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}$, $L_\infty$ — простір $2\pi$–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$.

Нехай, далі, $C^\psi_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, — клас $2\pi$–періодичних дійснозначних функцій $f(x)$, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt, \ \varphi \perp 1, \ \|\varphi\|_p \le 1, \ a_0 \in \mathbb{R},$$

де $\Psi_\beta \in L_\infty$ — ядро вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \ \psi(k) > 0, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Будемо розглядати класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, які породжуються послідовностями $\psi(k)$, що при $k \in \mathbb{N}$ збігаються зі значеннями неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, котрі задовольняють наступні умови:

1) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2) $\mu(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$;

3) $\eta(\psi; t) - t \leq K < \infty, \quad t \geq 1$,

де $\eta(t) = \eta(\psi; t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) := t/(\eta(t) - t)$, $\psi^{-1}$ — обернена до $\psi$ функція.

Множину функцій $\psi$, що задовольняють умовам 1)–3), прийнято позначати через $\mathfrak{M}'_{\infty}$.

Відомо [1, с. 1698], що при $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$ функції з класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ допускають регулярне продовження в деяку смугу $|\mathrm{Im}\, z| \leq c$, $c > 0$ комплексної площини, тобто є класами аналітичних функцій.

На класах $C^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, розв'язується задача про знаходження точних порядкових оцінок найкращих $m$–членних тригонометричних наближень в $L_s$–метриках, тобто величин вигляду

$$e_m(C^{\psi}_{\beta,p})_s = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} e_m(f)_s = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx}\|_s, \ 1 \leq s \leq \infty,$$

де $\gamma_m$, $m \in \mathbb{N}$, — довільний набір із $m$ цілих чисел.

**Теорема.** *Нехай* $1 \leq p, s \leq \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді мають місце порядкові оцінки*

$$e_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp e_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \psi(n).$$

[1] *Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №12. — С. 1686–1708.

# Метричні оцінки визначника багатоточкової задачі для факторизованого параболічного рівняння

Симотюк Михайло Михайлович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

quaternion@ukr.net

Тимків Іван Романович

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*

tymkiv_ if@ukr.net

Нехай $L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, – еліптичний диференціальний вираз, коефіцієнти $p_{ij}(x), q(x)$ якого є додатними і досить гладкими в обмеженій області $G \in \mathbb{R}^p$ з гладкою межею $\partial G$. Відомо [1], що задача $LX + \lambda X = 0$, $X|_{\partial G} = 0$ має зліченну кількість додатних власних значень $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$. Для чисел $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, виконуються оцінки

$$C_1 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq C_2 k^{2/p}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $C_1, C_2$ – додатні сталі, що не залежать від $k$.

При дослідженні властивостей розв'язку факторизованого параболічного рівняння

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_q(-L)^b + \sum_{r=0}^{b-1} A_r^q (-L)^r\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0;T) \times G, \tag{2}$$

де $a_q, A_r^q \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a_q > 0$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{N}$, що справджує умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T, \tag{3}$$

$$L^m u(t,x)|_{\partial G} = 0, \quad m \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, \tag{4}$$

виникає потреба оцінити знизу модулі визначників

$$\Delta(k) = \det \left\| \exp\left(-\left(a_q \lambda_k^b + \sum_{r=0}^{b-1} A_r^q \lambda_k^r\right) t_j\right)\right\|_{j,q=1}^{n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На підставі метричного підходу [2, 3] встановлено такий результат.

**Theorem 1.** *Для довільних різних фіксованих чисел $t_1, \ldots, t_n \in [0;T]$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(Re\, a_1, \ldots, Re\, a_n) \in [\delta_1, \delta_2]^n$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq \lambda_k^{-\omega} \exp\left(-\nu \lambda_k^b\right) \tag{5}$$

*виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) натуральних $k$, якщо $\omega > pn(n-1)/4$, $\nu = \delta_2(t_1 + \ldots + t_n)$.*

Із теореми 1 та оцінок (1) випливає таке твердження.

**Theorem 2.** *Для довільних різних фіксованих чисел $t_1, \ldots, t_n \in [0;T]$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(Re\, a_1, \ldots, Re\, a_n) \in [\delta_1, \delta_2]^n$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq k^{-\omega} \exp\left(-\nu k^{2b/p}\right) \tag{6}$$

*виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) натуральних $k$, якщо $\omega > n(n-1)/2$, $\nu = \delta_2(C_2)^b(t_1 + \ldots + t_n)$.*

Теореми 1, 2 доповнюють результати праць [4, 5], у яких, зокрема, встановлено оцінки знизу для характеристичних визначників багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними і показано, що такі оцінки виконуються для довільних фіксованих коефіцієнтів рівнянь і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(t_1, \ldots, t_n) \in [0;T]^n$. Показник експоненти в оцінках (5), (6) є точнішим, порівняно з аналогічним показником у [5]. Зауважимо, що з нерівностей (5), (6) випливають твердження про коректну розв'язність задачі (2)–(4) у просторах гладких функцій $u(t,x)$, $t \in [0;T]$, $x \in \overline{G}$, які допускають розвинення у ряди за системою власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$.


[1] *Ильин В.А., Шишмарев И.А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.

[2] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[3] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[4] *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.

[5] *Пташник Б.Й., Тимків І.Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26.

# Розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у верхній півплощині

Сокульська Наталія Богданівна,
Хорощак Василина Степанівна

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
natalya.sokulska@gmail.com, vasylyna1992@rambler.ru

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [1]. Ж. Валірон [2] назвав такі функції локсодромними, тому що точки, у яких така функція набуває одне й те ж саме значення у випадку недійсного $q$, лежать на логарифмічних спіралях (локсодромах, $\lambda o\xi o\zeta$ - косий, $\delta\rho o\mu o\zeta$ - шлях). У $log$-полярних координатах це прямі лінії. Теорія локсодромних функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій [3].

Ми вивчаємо властивості та розподіл нулів і полюсів мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у верхній півплощині.

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im \ \ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$. Множина $\mathcal{H}^*$ інваріантна відносно мультиплікативної групи $\mathbb{R}^+$, яка діє транзитивно і $q\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*, \quad 0 < q < 1$.

**Означення.** Мероморфна в $\mathcal{H}^*$ функція $f$ називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором $q$, $0 < q < 1$, якщо вона задовольняє наступну умову

$$\forall z \in \mathcal{H}^* \quad f(qz) = f(z).$$

Множину таких функцій позначимо $\mathcal{M}_q$.

Розподіл нулів і полюсів функцій з $\mathcal{M}_q$ описує наступна теорема.

**Теорема.** Нехай $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ та $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$, $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$– нулі і полюси функції $f$ в $\mathcal{H}^*$ відповідно. Тоді справедливі наступні співвідношення

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\le t} \left(\frac{q^k}{{r_n}^k} t^{k-1} - \frac{{r_n}^k}{t^{k+1}}\right) \sin k\alpha_n dt =$$

$$= \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<\rho_n\le t} \left(\frac{q^k}{{\rho_n}^k} t^{k-1} - \frac{{\rho_n}^k}{t^{k+1}}\right) \sin k\beta_n dt, \ r > 0, \ k \in \mathbb{Z}.$$

**Зауваження.** Розподіл $a$-точок, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, функції $f$, $f \in \mathcal{M}_q$, отримується з теореми, застосувавши її до $f(z) - a$.

**Наслідок.** Нехай $f$ голоморфна і мультиплікативно періодична функція з мультиплікатором $q$, $0 < q < 1$, в $\mathcal{H}^*$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Нехай $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ - нулі $f$. Тоді

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\leq t} \left(\frac{q^k}{{r_n}^k} t^{k-1} - \frac{{r_n}^k}{t^{k+1}}\right) \sin k\alpha_n dt = 0, \ r > 0, \ k \in \mathbb{Z}.$$


[1] Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470p.

[2] Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 3nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1966, 522 pp.

[3] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002, 381 pp.


## Operator calculus for Roumieu ultradistributions and its applications


Solomko A.V.

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

ansolvas@gmail.com


In the paper [2] is proposed modification of Hille-Phillips formula [1] making it possible to extend the set of symbols of this calculus to the space of Schwartz distributions with supports on semiaxis. Further [4] we have extended this calculus on the set of generators of n-parametric operator semigroups. In this lecture we explain how to construct a vector analogue of operator calculus for generators of strongly continuous $n$-parametric semigroups of operators in the convolution algebra of Roumieu ultradistributions with supports in the positive $n$-dimensional cone. For such constructed calculus some applications are considered.

We define the vector space $G(\mathbb{R}^n)$ of ultradifferentiable Roumieu functions with compact supports. For any $\nu \succ 0$ and $a \prec 0 \prec b$ define the subspace in $G$ by view

$$G_\nu[a,b] = \Big\{\varphi \in C^\infty : \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b], \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \sup_{t\in[a,b]} \frac{|\partial^k \varphi(t)|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty\Big\},$$

where $\aleph$ – any fixed real number. Note, that the inclusion $G_\nu[a,b] \subset G_\mu[a',b']$ is continuous for $\nu \prec \mu$ and $a' \prec a \prec 0 \prec b \prec b'$. Then the space $G$ is a topological multiplication algebra. The linear and continuous functional on the space $G$ is named by Roumieu ultradistribution. Strongly conjugate space of Roumieu ultradistributions denote by $G'(\mathbb{R}^n)$.

Let $G'_+ = G'(\mathbb{R}^n_+)$ is subspace in $G'$ of ultradistributions with supports in cone $\mathbb{R}^n_+$. If we denote by $G'^{\perp}_+$ – orthogonal complement of subspace $G'_+$ then the functional space $G_+ = G/G'^{\perp}_+$ is conjugate to $G'_+$.

Define $\theta_+ : \mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow \theta_+(t) = \theta(t_1) \cdot \ldots \cdot \theta(t_n)$ by characteristic function of cone $\mathbb{R}^n_+$, where $\theta$ is Heaviside function. The quotient space $G_+$ is a topological algebra and isomorphism $G_+ \cong \theta_+(G)$ is valid. Then the duality $\langle G', G\rangle$ generates the new duality $\left\langle G'_+, G_+ \right\rangle$.

Let $(X, \|\cdot\|)$ is Banach space. For any fixed real number $\aleph > 1$ and $\nu \succ 0$ consider the space

$$G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X) = \left\{ x : \operatorname{supp} x \subset \mathbb{R}^n_+, \|x\|_{G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n_+} \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} \frac{\|\partial^k x(t)\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\}$$

of $X$-valued ultradifferentiable functions $x(t)$ with compact supports in $\mathbb{R}^n_+$. On the space $G(\mathbb{R}^n_+, X) = \bigcup\limits_{\nu \succ 0} G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X)$ we introduce the topology of inductive limit. Further denote $G_+(X) = G(\mathbb{R}^n_+, X)$. Let $U : \mathbb{R}^n_+ \ni s \longrightarrow U_s \in L[G_+]$ is $n$-parametric semigroup of shifts along the cone $\mathbb{R}^n_+$. We define the cross-correlation operation of functional $f \in G'_+$ with function $\varphi \in G_+$ by formula $(f \bullet \varphi)(t) = \langle f(s), U_s \varphi(t)\rangle$, $t, s \in \mathbb{R}^n_+$. The linear mapping $T_f : G_+ \ni \varphi \longrightarrow f \bullet \varphi \in G_+$ be an operator of cross-correlation. For any $U_s \in L[G_+]$ we define the vector shift operator $I_X \otimes U_s \in L[G_+(X)]$, where $I_X$ is identity operator on $X$. On the analogy denote by $I_X \otimes T_f \in L[G_+(X)]$ the vector cross-correlation operation.

**Theorem 1..** *The operator $I_X \otimes T_f$ is nuclear and invariant relatively of operators $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}^n_+\}$ for any ultradistribution $f \in G'_+$. Conversely, for any operator $T \in L[G_+]$, which is invariant relatively $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}^n_+\}$, exists one ultradistribution $f \in G'_+$ that $T = T_f$ and $I_X \otimes T = I_X \otimes T_f$.*

Let $S_t : \mathbb{R}^n_+ \ni (t_1, \ldots, t_n) = t \longrightarrow e^{-itA} = e^{-i(t_1A_1 + \ldots + t_nA_n)} \in L[X]$ be a $n$-parametric semigroup of linear and bounded operators with generator $-iA$, where $A = (A_1, \ldots, A_n)$. That $e^{-itA}\big|_{t=0} = I_X$ and $e^{-i(t+s)A} = e^{-itA} \circ e^{-isA}$ for any $t, s \in \mathbb{R}^n_+$. If for any $x \in X$ the condition $\lim\limits_{t \to +0} \|S_t x - x\| = 0$ is realized, then $n$-parametric semigroup $S_t$ is strongly continuous. Denote that any $n$-parametric semigroup $S_t$ can be represented as a composition $S_t = S_{t_1} \circ \ldots \circ S_{t_n}$, where $\{S_{t_j} : t_j \in [0, +\infty)\}$, $(j = \overline{1,n})$ is one-parametric strongly continuous semigroup of operators with generator $-iA_j$, $(j=\overline{1,n})$. The generator is defined by formula:

$$-iA_jx = -i\lim_{t_j\to+0}\frac{S_{t_j}x-x}{t_j} = -i\partial_j S_{t_j}x\big|_{t_j=+0}, \quad x\in D(A_j),$$

where $D(A_j)\subset X$ is domain of the operator $A_j$, $(j=\overline{1,n})$.

Consider the subspace $\widehat{G}_A$ in Banach space by view

$$\widehat{G}_A = \{\widehat{x}_A\in X: \ x\in G_+(X)\}, \qquad \widehat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(e^{itA}\otimes I_+)x(t)dt,$$

where $(e^{itA}\otimes I_+)x(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda_m e^{-itA}x_m\otimes\varphi_m(t)$, $\lambda_m\in\mathbb{C}$, $x_m\in X$, $\varphi_m\in G_+$ and $I_+$ – identity operator in $L[G_+]$.

**Theorem 2..** *If $\{S_t: \ t\in\mathbb{R}^n_+\}$ – $n$-parametric strongly continuous semigroup of operators, then subspace $\widehat{G}_A$ is dense in Banach space $X$.*

Let us define a linear and continuous mapping $F_A: G_+(X)\ni x\longrightarrow\widehat{x}_A\in\widehat{G}_A$ and give a theorem which is the main result of our research.

**Theorem 3..** *Let $\mathbb{R}^n_+\ni t\longrightarrow e^{-itA}\in L(X)$ be a $n$-parametric strongly continuous semigroup with generator $-iA$. The mapping $\Phi: G'_+\ni f\longrightarrow\widehat{f}(A)\in L[\widehat{G}_A]$, where the linear operator $\widehat{f}(A)$ is defined by the relation*

$$\widehat{f}(A): \ \widehat{G}_A\ni\widehat{x}_A\longrightarrow\widehat{f}(A)\widehat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(e^{-itA}\otimes T_f)x(t)dt,$$

*is continuous homomorphism of convolution algebra of Roumieu ultradistributions onto closed subalgebra of algebra $L[\widehat{G}_A]$ of the form $\{\widehat{[I_X\otimes U_s]^c}: \ s\in\mathbb{R}^n_+\}$, $\widehat{[I_X\otimes U_s]^c} = F_A\circ(I_X\otimes[U_s]^c)\circ F_A^{-1}$, where $[U_s]^c$ is commutant of semigroup $\{U_s: \ s\in\mathbb{R}^n_+\}$.*

For constructed operator calculus we can consider examples of calculating Dirac function for generator of n-parametric strongly continuous semigroup of operators and solve the problem of representation of multiplicative powers and derivatives for Dirac function from the generator of the semigroup of fractional integration. Similar examples for Schwartz distributions are described in detail in the paper [3].

[1] *Hille E., Phillips R.* Functional analysis and semigroups. – AMS, Colloquium Publications. – V. 31, USA, 1957.

[2] *Lopushansky O.V., Sharyn S.V.* Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distribution on semiaxis // Mat. Stud., Lviv. – 1997. – V.7, No. 1. – P. 61-72.

[3] *Lopushansky O.V., Sharyn S.V., Solomko A.V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone // Mat. Stud., Lviv. – 2011. – V.35, No. 1. – P. 78-90.

[4] *Sharyn S.V., Solomko A.V.* Operator Fourier-Laplace transformation for convolution algebra of Roumieu ultradistributions // Applied Problems of Mechanics and Mathematics, IPPMM, Lviv. – 2011. – No. 9. – P. 55-62.

# Factorization formulas for some classes of generalized $J$-inner matrix valued functions

Sukhorukova Olena

*Department of Mathematics Donetsk National University*

alena.dn.ua@rambler.ru

Let $j_{pq} := \operatorname{diag}(I_p, -I_q)$ $(m = p + q)$. Recall, that an $m \times m$ mvf $W(\lambda)$ meromorphic in $\mathbb{D}$ is said to belong to the class $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$, if the kernel $\mathsf{K}_\omega(\lambda) = \frac{j_{pq}-W(\lambda)j_{pq}W(\omega)^*}{1-\lambda\omega^*}$ has $\kappa$ negative squares and $W(\mu)$ is $j_{pq}$-unitary $\mathbb{T}$-a.e. For a mvf $W$ from a subclass $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ of $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ the notion of the right associated pair was introduced in [1] and some factorization formulas were found. In the present work we introduce a dual subclass $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. For every mvf $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ a left associated pair $\{\beta_1, \beta_2\}$ is defined and factorization formulas for $W$ in terms of $\beta_1, \beta_2$ are found.

The Potapov-Ginzburg transform $S$ of a mvf $W = [w_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ defined by

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \tag{1}$$

belongs to the Schur class $\mathcal{S}^{m\times m}$. An $m \times m$ mvf $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ is said to be in the class $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, if $s_{12} := w_{12}w_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$. If

$$s_{12} = \beta_\ell^{-1}\sigma_\ell = \sigma_r\beta_r^{-1}, \quad (\beta_\ell, \beta_r \in \mathcal{S}_{in},\, \sigma_\ell, \sigma_r \in \mathcal{S}^{q\times p}).$$

is the Kreĭn–Langer factorization of $s_{12}$, then the mvf's $\beta_\ell s_{11}$ and $s_{22}\beta_r$ are proved to be holomorphic in $\mathbb{D}$ and admit inner-outer factorizations

$$\beta_\ell s_{11} = \alpha_1\beta_1, \quad s_{22}\beta_r = \beta_2\alpha_2 \quad (\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}_{in},\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{S}_{out}). \tag{2}$$

**Definition 1.** *The pair $\beta_1, \beta_2$ of inner factors in* (2) *is called the left associated pair of the mvf $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ and is written as $\{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W)$.*

**Theorem 1.** *Let $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, and let $\{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W)$. Then $W$ admits the factorization*

$$W = \begin{bmatrix} \beta_\ell^* & \sigma_r \\ \sigma_\ell^* & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{-*} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2^{-1} \end{bmatrix} \quad a.e.\ in\ \ \Omega_0. \tag{3}$$

New factorization formulas for the mvf $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ in the domains $\mathbb{D}$ and $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ are also found.


[1] *V. A. Derkach, H. Dym* On linear fractional transformations associated with generalized $J$-inner matrix functions// Integ. Eq. Oper. Th., 65 (2009), 1-50.


## Note on Arens regularity of symmetric tensor products


Olena Taras, Andriy Zagorodnyuk

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine*

elena_taras@ukr.net


Let $X, Y$ be complex Banach spaces and $B : X \times X \to Y$ be a (symmetric) bilinear map. We call $B$ is *(symmetrically) regular*, if

$$\lim_{\alpha,\beta} B(x_\alpha, y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} B(x_\alpha, y_\beta),$$

where $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ are $*$-convergent nets in $X^{**}$. $X$ is *(symmetrically) regular* if each (symmetric) bilinear form on $X \times X$ is regular (see [1]). If $A$ is a Banach algebra, then $A$ is called *Arens regular* if the bilinear map associated with the algebra product $(x, y) \to xy$ is regular. In this note we examine Arens regularity of symmetric projective tensor products of Banach algebras.

Theorem 1. *If* $\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha, y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha, y_\beta)$, *where* $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ *are polynomially convergent nets,* $P \in \mathcal{P}(^nX)$ *then the Banach space*

$$\sum^n X := C \oplus X \oplus X \otimes_{s,\pi} X \oplus \ldots \oplus \overbrace{X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X}^{n}$$

*is not symmetrically regular.*

For a given $2n$-homogeneous polynomial $P$ on $X$ we consider a continuous symmetric bilinear form $B_P$ on the space $\sum^n X$ such that $B_P(1 + x + \ldots +$

$x^{\otimes n}, 1 + y + \ldots + y^{\otimes n}) = P(x + y)$. By this way we construct an example of 4-homogeneous polynom $P$ on $\ell_2$ such that $\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha + y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha + y_\beta)$ and as a consequence to get that $\sum^n \ell_2$ is not symmetrically regular. In the case when $A$ be a Banach (commutative) algebra the following theorem was obtained.

Theorem 2. *The symmetric projective tensor product $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ is not (symmetrically) regular.*


[1] *Aron R.M., Galindo P.,Garcia D., Maestre M.* Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions. // Proc. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 543-?559.

[2] *Taras O., Zagorodnyuk A.* Note on Arens regularity of symmetric tensor products // Carpathian Math. Publ., **6 (2)** (2014), 372?-376.


## Some extremal problems the second type for partially non-overlapping domains.


Targonskii A.L., Targonskaya I.I.

*Zhytomyr Ivan Franko State University*

targonsk@zu.edu.ua


Let $r(B; a)$ – inner radius domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to a point $a \in B$.

This work a study the following problem.

**Problem.** Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \geq 0$. Maximum functional be found

$$r^\gamma (B_0 \,;\, 0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r (B_k \,;\, a_k) \,,$$

where $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – arbitrary $n$-equiangular system points and $\{B_0, \{B_k\}_{k=1}^n\}$ – arbitrary set partially non-overlapping domains, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, and all extremal the describe $k = \overline{1, n}$.


[1] *Bakhtin, A. K., Bakhtina, G. P., Zelinskii, Yu. B.* Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine 73 (2008), 308 pp. (Russian).

[2] *Dubinin, V. N.* Method of symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable // Usp. Mat. Nauk, 49, No.1 (295), 3-76 (1994).

[3] *Dubinin, V. N.* Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications // Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst., 237, 56-73 (1997).

## Задача про тінь для еліпсоїда обертання

Ткачук Максим Володимирович

*Інститут математики НАН України*

mvtkachuk@mail.ru

Осіпчук Тетяна Михайлівна

*Інститут математики НАН України*

otm82@mail.ru

У 1982 р. Г. Худайбергановим була поставлена задача про тінь [4], (див. також [1], [2]) яка полягала в тому, щоб знайти мінімальне число замкнених куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері $S^{n-1}$, які попарно не перетинаються, з радіусами меншими радіуса сфери і такі, що довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинає хоча б одну із куль. Інакше кажучи, скільки таких куль створять тінь для центру сфери. Ця задача була розв'язана Г. Худайбергановим для випадку $n = 2$: було показано, що для кола на площині достатньо двох куль. В [3] Ю. Зелінский разом зі своїми учнями довів, що для $n = 3$ трьох куль не достатньо, але чотири кулі вже будуть створювати тінь для центру сфери. У тій же роботі легко доводиться, що для загального випадку необхідно і достатньо $n + 1$ кулі.

Якщо розглянути видовжений еліпсоїд обертання з достатньо довгою великою віссю, то досить очевидно, що трьох куль достатньо для створення тіні в центрі еліпсоїда. В [5] ставиться та розв'язується така

**Задача 1.** *Нехай задано видовжений еліпсоїд обертання. Знайти мінімальне співвідношення його осей, так, щоб три замкнені кулі, які попарно не перетинаються, не перетинають центр еліпсоїда і з центрами на ньому створювали тінь для центру еліпсоїда.*

[1] *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — Киев: Наукова думка, 1993. — 264 с.

[2] *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. Праці Інституту математики НАНУ. — Київ: Інститут математики НАНУ. — 2012. — **92**. — 280 с.

[3] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени. — arXiv:1501.06747. — 2015.

[4] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

[5] *Ткачук М. В., Осiпчук Т. М.* Задача о тени для эллипсоида вращения // Збiрник праць Iнституту математики НАНУ. — Київ: Iнститут математики НАНУ. — 2015. (подано до друку)

# A description of solutions for the integral equation of special type

Trofymenko O. D.

*Donetsk National University (Vinnytsia)*

odtrofimenko@gmail.com

The set of functions from $C^{2m-2-s}$ ($m \in \mathbb{N}$ and $s \in 0, ..., m-1$ are fixed) in some domain, that satisfies next equality with all possible $z$ and $z$ is of great interest

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \leq r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi d\eta, \quad (1)$$

$r$ is fixed or belongs to the set of two elements.
For equation (1) a description of all smooth solutions in a disk with radius $R > r$ is obtained. Also for functions with corresponding smoothness, satisfying (1) a uniqueness theorem is obtained. And the two-radii theorem for special class of polyanalytic functions is obtained.

[1] *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equation. // Dordrecht- Boston-London: Kluwer Academic Publishers. – 2003. – 454 p.

[2] *Zalcman L.* Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem. // Radon Transforms and Tomography, Contemp. Math. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.

[3] *Trofymenko O.D.* Two-radii theorem for solutions of some mean value equations. // Mathematychni Studii. – 2013. – V. 40. 2. – P. 137–143.

# Оцінка кореляційної функції однорідного та ізотропного гауссового випадкового поля

Трошкі Віктор Бейлович

*Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет"*

btroshki@ukr.net

В доповіді розглядається однорідне та ізотропне неперервне в середньому квадратичному гауссове випадкове поле $\xi(t)$ задане в $\mathbb{R}^n$ з $\mathbf{E}\xi(t) = 0$ для якого отримано оцінки для розподілу відхилень сферичної корелограми від кореляційної функції із заданою точністю та надійністю в просторі $L_p(\Omega)$. За допомогою отриманих нерівностей побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції випадкового поля. Оцінювання здійснюється по спостереженням за випадковим полем на кулі, а за оцінку кореляційної функції при цьому використовується сферична корелограма.

В даній доповіді використані попередні результати роботи [1], де були отримані оцінки відхилень кореляційної функції гауссового стаціонарного випадкового процеса від корелограм.

[1] *Yu. Kozachenko, V. Troshki* A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process // Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol. 2 (2015), p. 1-11. DOI: 10.15559/15-VMSTA17

# Оцінки апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності в просторі $L_q$

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки*

fedunyk@ukr.net

Досліджуються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які розглянуті в [1] і є аналогами відомих класів Бєсова.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку $l$ деякого спеціального виду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Тут розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}$. Вважаємо також, що $b_j < r, j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$.

Це означає, що для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стечкіна [2] (позначаємо $(S)$ і $(S_l)$ ).

Нехай $L_q(\pi_d)$ — простір $2\pi$–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі стандартною нормою.

Одержано точні за порядком оцінки величин, які визначаються наступним чином

$$d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in B_{p,\theta}^{\Omega} \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q . \tag{2}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності $M$ простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності $M$.

Сформулюємо один із одержаних результатів.

**Теорема.** *$1 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1). Тоді при $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < l$, $b_j < \frac{r}{\frac{q}{p} - 1}$ має місце порядкова рівність*

$$d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp M^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\log M\right)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1)\left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + (\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+\right)},$$

*де* $a_+ = \max\{a, 0\}$ .

Цей результат для класів $B_{p,\theta}^r$ одержаний А.С. Романюком [3], а для класів $H_p^{\Omega}$ — М.М. Пустовойтовим [4].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами $p$ та $q$.

[1] *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1997. – т. 219. – С. 356 – 377.

[2] *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о - ва. – 1956. – т. 5. – С. 483 – 522.

[3] *Романюк А.С.* Поперечники и наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. – т. 37. – С. 181 – 213.

[4] *Пустовойтов Н.Н.* Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. – 2008. – т. 34. – С. 187 – 224.

# Найпростіша періодична задача для диференціально-операторного рівняння, зв'язаного з коливаннями ідеальної стратифікованої рідини

Федак І.В.

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

Fedak_Ivan@rambler.ru

У гільбертовому просторі $H$ розглянемо рівняння

$$(A+E)y''(t)+Ay(t)=0, \tag{1}$$

де $A$ — самоспряжений напівобмежений знизу в $H$ оператор, $E$ — тотожний в $H$ оператор. У випадку $H=L_2(a,b)$ та $A$ — самоспряженого розширення мінімального оператора, породженого виразом $-\frac{d^2}{dx^2}$ рівняння (1) є рівнянням коливань ідеальної стратифікованої рідини (див. [1]).

Для рівняння (1) задамо найпростіші періодичні умови

$$y(0)=y(T)=0, \quad T>0. \tag{2}$$

**Теорема**. Якщо

$$\sigma(A)\cap\left(\{-1\}\cup\left\{\frac{\pi^2n^2}{T^2-\pi^2n^2}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}\right)=\varnothing,$$

то задача (1)–(2) має розв'язок, який визначається з точністю до сталого множника.

[1] Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx}-u)+u_{xx}=0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – 26, №1. – С.92 – 102.

# Наближення $(\psi,\beta)$–диференційовних функцій, заданих на дійсній осі, тригармонійними операторами Пуассона

Ю. І. Харкевич, І. В. Кальчук

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк*

kalchuk_i@ukr.net

Нехай $f\in\widehat{L}$ (див. означення в [1, с. 168]). Оператор $P_3(\delta)$, який діє на функцію $f$ за правилом

$$P_3(\delta;f;x)=A_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi(x+t)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\psi(v)\lambda_\delta(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt,\delta>0,$$

де $\lambda_\delta(v)=\Big(1+\frac14(3-e^{-\frac2\delta})(1-e^{-\frac2\delta})v+\frac18(1-e^{-\frac2\delta})^2v^2\Big)e^{-\frac{v}{\delta}}$, а $f_\beta^\psi(\cdot)$ — це $(\psi,\beta)$-похідна функції $f(\cdot)$ (див. [2, с. 132]), будемо називати тригармонійним оператором Пуассона.

Метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки при $\delta\to\infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi;P_3(\delta)\right)_{\widehat{C}}=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\|f(x)-P_3(\delta;f;x)\|_{\widehat{C}},$$

(де $\|f\|_{\widehat{C}}=\sup\limits_{t\in R}|f(t)|$, а означення класів $\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ див. в [1, с. 216]).

Нехай $\mathfrak{A}$ — множина додатних неперервних при $t\geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(0)=0$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$; 3) $\psi'(t)=\psi'(t+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0,\infty)$. Підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt<\infty$, позначають через $\mathfrak{A}'$. Нехай $\mathfrak{A}_0=\Big\{\psi\in\mathfrak{A}:0<\frac{t}{\eta(t)-t}\leq K<\infty\ \forall t\geq 1\Big\}$, де $\eta(t)=\psi^{-1}\Big(\frac12\psi(t)\Big)$, а $\psi^{-1}$ — функція, обернена до функції $\psi$.

Покладемо $\tau(v)=\tau_\delta(v,\psi)=\Big(1-\left(1+\gamma v+\theta v^2\right)e^{-v}\Big)\frac{\psi(\delta v)}{\psi(\delta)},\quad v\geq 0$, де $\gamma=\frac14(3-e^{-\frac2\delta})(1-e^{-\frac2\delta})\delta,\quad \theta=\frac18(1-e^{-\frac2\delta})^2\delta^2$, а $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \geq 0$ функція. Надалі будемо вважати, що $\psi(v)$ монотонно зростає, опукла донизу на $[0,1]$ і має неперервну другу похідну при всіх $v \geq 0$ за виключенням точки $v=1$. Множину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ або $\psi \in \mathfrak{A}_0$, що мають вказані вище властивості позначимо відповідно через $\mathfrak{A}^*$ або $\mathfrak{A}_0^*$.

**Теорема.** *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}_0^* \cap \mathfrak{A}'$, функція $g(v) = v^3\psi(v)$ є опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_{\widehat{C}} = \psi(\delta)A(\tau),$$

*де величина $A(\tau)$ означається наступним чином*

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt$$

*і для неї справедлива оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}v^2\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right)+$$

$$+O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}v\psi(v)dv\right).$$


[1] *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.2. — 468 с.

[2] *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.1. — 427 с.

# On the properties of the indicators of completely regularly growing holomorphic functions in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Khrystiyanyn Andriy Yaroslavovych

*Ivan Franko National University of Lviv*

khrystiyanyn@ukr.net

Vyshynskyi Oleh Stepanovych

*Ivan Franko National University of Lviv*

vyshynskyi@ukr.net

Let $f$ be a holomorphic function of completely regular growth in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ [1]. Using an analog of the Poisson-Jensen formula for annuli [2] we prove the so-called uniformity property for the indicators [1] of $f$. It allows us to define these indicators in a different way, the one in Phragmén-Lindelöf's style. Next, we prove the equicontinuity property for the class $\Lambda_H^\circ$ of completely regularly growing with respect to a growth function $\lambda$ holomorphic functions in $\mathbb{C}^*$, which in turn enables us to prove the second main theorem for $f \in \Lambda_H^\circ$ in terms of its asymptotic behaviour as $|z| \to +\infty$ or $|z| \to 0$ outside some $E_0$-sets.

[1] *M. Goldak, A. Khrystiyanyn*, Holomorphic functions of completely regular growth in the punctured plane, Visnyk of the Lviv Univ., Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P.91-96. (in Ukrainian)

[2] *I. P. Kshanovskyy*, An analog of Poisson-Jensen formula for annuli, Matematychni studii, **24** (2005), 147-158.

# Modulo-loxodromic functions in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Khrystiyanyn Andriy Yaroslavovych
*Ivan Franko National University of Lviv*
khrystiyanyn@ukr.net

Kondratyuk Andriy Andriyovych
*Ivan Franko National University of Lviv*
kond@franko.lviv.ua

A multiplicatively periodic function is a function satisfying the condition $f(qz) = f(z)$ for some $q$ and all $z$. The theory of meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplicatively periodic functions was elaborated by O. Rausenberger [1]. G. Valiron [2] called these functions *loxodromic*. They give a simple construction [3] of elliptic functions which are well known due to the works of K. Jacobi, N. Abel, K. Weierstrass.

We consider *modulo-loxodromic* functions.

**Definition 1.** *A meromorphic in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ function $f$ is said to be* ***modulo-loxodromic*** *if there exists $q$ $(0 < |q| < 1)$ such that $|f(qz)| = |f(z)|$, $z \in \mathbb{C}^*$.*

There are modulo-loxodromic functions in $\mathbb{C}^*$ which are not loxodromic [3].

**Definition 2.** *A meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function $f$ is called* ***Julia exceptional*** *if the family $\{f_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, where $f_n(z) = f(q^n z)$, and $0 < |q| < 1$ is normal [4] in $\mathbb{C}^*$.*

We prove

**Theorem 1.** *Each modulo-loxodromic function is Julia exceptional.*

[1] *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer Variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470 pp.

[2] *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 pp.

[3] *Kondratyuk A. A.* Loxodromic meromorphic and $\delta$-subharmonic functions // Proceedings of the Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations. – 2014. – Reports and Studies in Forestry and Natural Sciences. – 14. – P. 89-100.

[4] *Montel P.* Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

## Неперервні та розривні гомоморфізми алгебри симетричних поліномів на просторі $\ell_p$

Чернега Ірина Володимирівна

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*

icherneha@ukr.net

У доповіді розглядаються гомоморфізми алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ всіх симетричних поліномів на просторі $\ell_p$. Зокрема, вивчаються гомоморфізми з алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ в $\mathcal{P}_s(\ell_q)$, $1 \leq p, q < \infty$, та досліджується питання їх неперервності.

## Апроксимативні властивості деяких лінійних методів підсумовування рядів Фур'є

Ірина Черняк, Вікторія Кравчишин

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк*

irusya1710@ukr.net

В роботі вивчаються апроксимативні властивості лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, які задаються множиною функцій натурального аргумента, в просторі неперервних $2\pi$–періодичних функцій.

## Час у Ворохту, час!

*слова і музика*
***Володимира Маслюченка***

Хоч гори ще в снігах,
Та віє вже весною.
В карпатський милий край
Проліг манливий шлях.
Математичний стяг
Веде нас за собою
І мерехтить в очах
Наш ворохтянський рай. 2 рази

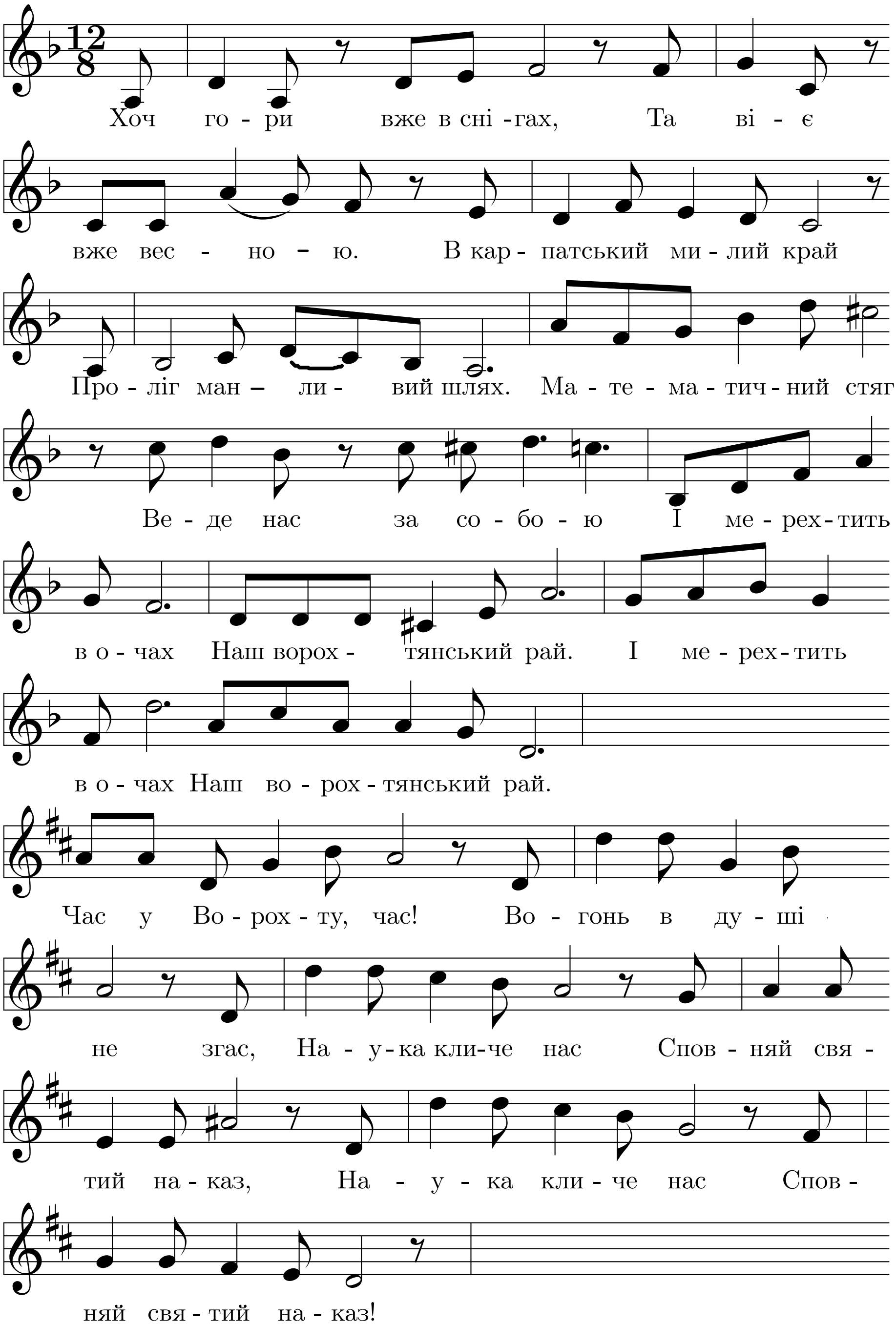
*Приспів:*
Час у Ворохту, час!
Вогонь в душі не згас,
Наука кличе нас –
Сповняй святий наказ! 2 рази

Свободи гордий дух
Витає у Карпатах
Його тут боронив
Орлів-повстанців рух
Математичний дух –
Це теж свободи свято,
В ній наших суть потуг
Як Кантор пояснив. 2 рази

*Приспів.*

Хай розквітає тут
Математична школа,
Нехай знання несе,
Як чисті води Прут.
Її ясний статут
Не зрадимо ніколи
І пильний, впертий труд
Нам успіх принесе. 2 рази

*Приспів.*


12
8
Хоч го - ри вже в сні - гах, Та ві - є
вже вес - но - ю. В кар - патський ми - лий край
Про - ліг ман – ли - вий шлях. Ма - те - ма - тич - ний стяг
Ве - де нас за со - бо - ю І ме - рех - тить
в о - чах Наш ворох - тянський рай. І ме - рех - тить
в о - чах Наш во - рох - тянський рай.
Час у Во - рох - ту, час! Во - гонь в ду - ші
не згас, На - у - ка кли - че нас Спов - няй свя -
тий на - каз, На - у - ка кли - че нас Спов -
няй свя - тий на - каз!