

**Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України**

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

**Всеукраїнська наукова конференція
Ворохта, 24 — 27 лютого 2016**

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

Всеукраїнська наукова конференція

Ворохта
24 — 27 лютого 2016 року

(тези доповідей)

Івано-Франківськ, 2016

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 24 — 27 лютого 2016 р. (тези доповідей), – Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2016. – 150 с.

Організаційний комітет:

- Загороднюк А. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Копач М. І. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Качановський М. О. Інститут математики НАН України, Київ
- Кулик О. М. Інститут математики НАН України, Київ)
- Маслюченко В. К. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
- Осипчук М. М. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Пилипенко А. Ю. Інститут математики НАН України, Київ
- Портенко М. І. Інститут математики НАН України, Київ
- Скасків О. Б. Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
- Слободян С. Я. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Шарин С. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ)
- Шевчук Р. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторських варіантах.

Зміст

Пленарні доповіді	11
Герасименко В. І., Гап'як І. В. <i>Рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями для плинів твердих куль</i>	11
Зелінський Ю. Б. <i>Про узагальнено опуклі оболонки множин та задача про тінь</i>	12
Kondratyuk A. A. <i>Further steps to nonlinear analysis</i>	14
Волошин Г. А., Маслюченко В. К. <i>Пошарово рівномірні границі послідовностей сукупно неперервних функцій</i>	14
Пелешенко Б. И., Семиренко Т. Н. <i>Об абсолютной сходимости рядов Фурье и обобщённых пространствах Липшица</i>	18
Пилипенко А. Ю. <i>Про збурення малим шумом диференціальних рівнянь з нелінійними коефіцієнтами</i>	19
Портенко М. І. <i>Деякі цікаві моменти зупинки для симетричного стійкого процесу</i>	20
Chabanyuk Ya. M., Khimka U. T. <i>Stochastic approximation procedure as controlled random evolution</i>	21
Секційні доповіді	22
Секція теорії ймовірностей	22
Арясова О. В. <i>Про представлення для похідної за початковими даними розв'язку стохастичного диференціального рівняння з нерегулярним переносом</i>	22
Аюбова Н. С., Курченко О. О. <i>Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань</i>	23
Баран О. Є. <i>Багатовимірний аналог теореми Перрона для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду</i>	24

Білінський А. Я., Кінаш О. М.	
<i>Про оцінку ймовірності банкрутства у випадку великих виплат</i>	25
Ганиченко Ю. В.	
<i>Оцінки точності апроксимації інтегральних функціоналів з нерегулярними ядрами від процесів Маркова</i>	27
Дрозденко В. О.	
<i>Гранична поведінка страхових премій залежних від параметрів</i>	28
Затула Д. В.	
<i>Про розподіл півнорм $L_p(\Omega)$ процесів у просторах Гельдера</i>	30
Жерновий К. Ю.	
<i>Метод потенціалів для систем типу $M/G/1/m$ з випадковим відкиданням замовлень</i>	32
Капустей М. М.	
<i>Оцінка швидкості збіжності до стійких законів розподілу</i>	33
Копитко Б. І., Шевчук Р. В.	
<i>Одновимірний вінерів процес з рухомою мембраною</i>	34
Кучук-Яценко С. В., Мішура Ю. С.	
<i>Ціна опіону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна-Уленбека</i>	35
Макогін В. І.	
<i>Асимптотична поведінка автомодельних дробових випадкових полів</i>	37
Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю., Синявська О. О.	
<i>Простори Орліча випадкових величин та простори $F_\psi(\Omega)$</i>	39
Моклячук М. П., Сідей М. І.	
<i>Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей</i>	40
Молибога Г. М.	
<i>Аналог теореми Беррі-Ессена для функціоналів від слабо ергодичних Марковських процесів</i>	41
Мунчак Є. Ю., Мішура Ю. С.	
<i>Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу</i>	42

Осипчук М. М.	
<i>Симетричний стійкий процес та задача про спряження</i>	43
Сливка-Тилищак Г. І.	
<i>Оцінки для розподілу супремуму випадкових полів з простору Орліча в нескінченній області</i>	45
Танцюра М. В.	
<i>Гранична теорема для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь</i>	47
Чорний Р. О., Кінаш О. М.	
<i>Про визначення оптимальної страхової ставки . . .</i>	48
Секція математичного аналізу	50
Bandura A. I.	
<i>Remark about bounded L-index in direction $\mathbf{b}$ of function $\cos \sqrt{z_1 z_2}$</i>	50
Бубняк М. М., Возняк О. Г.	
<i>Про збіжність періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду</i>	51
Буртняк І. В., Малицька Г. П.	
<i>Властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для систем рівнянь Колмогорова-Ейдельмана</i>	52
Basiuk Y.V., Tarasyuk S. I.	
<i>Fourier coefficients associated with the Riemann zeta-function</i>	53
Береза О. Ю., Християнин А. Я.	
<i>Оцінки на мінімальні відхилення від 0 та ∞ мероморфної в проколеній площині функції з малою кількістю нулів та полюсів</i>	55
Бобик І. О., Симолюк М. М.	
<i>Оцінки мінорів вронскіана фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння з параметром</i>	56
Боднар Д. І., Біланик І.	
<i>Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду</i>	57
Бохонко В. В., Забавський Б. В.	
<i>Приведення матриць до канонічного вигляду оборотними теплицевими матрицями</i>	58

Бушев Д. М., Кальчук І. В., Філософ Л. І.	
<i>Застосування ізометричності функціональних просторів з різним числом змінних в теорії наближення функцій</i>	59
Василишин Т. В.	
<i>Про простори (p, q)-лінійних і (p, q)-однорідних відображень між комплексними лінійними просторами</i>	63
Василишин Т. В., Струтинський М. М.	
<i>Про симетричні $*$-поліноми від двох комплексних змінних</i>	64
Веремій М. А., Гаєвський М. В.	
<i>Оцінки групи відхилень аналітичних функцій</i>	65
Виговська І. Ю., Доля Д. С., Хайджаа Кхудхаир Да-кхїл	
<i>Про відображення кулі фіксованої кратності</i>	66
Власик Г. М.	
<i>Ортопроекційні поперечники класів (ψ, β)-диференційованих періодичних функцій</i>	67
Волянська І. І., Ільків В. С., Симотюк М. М.	
<i>Задача з багатоточковими умовами для рівняння, однорідного за порядком диференціювання</i>	68
Галушак С. І.	
<i>Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка</i>	69
Гоєнко Н. П., Кучмінська Х. Й.	
<i>Наближення функцій багатовимірними неперервними дробами</i>	70
Голубчак О. М.	
<i>Застосування симетричних поліномів до аналітичних автоморфізмів банахового простору</i>	71
Ганиченко Ю. В.	
<i>Проблема часонезворотності тахіонових кінематик</i>	72
Гришук С. В.	
<i>Застосування гіперкомплексних моногенних функцій в крайовій задачі типу задачі у зміщеннях плоскої теорії пружності</i>	73
Дирів М. М.	
<i>Елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві</i>	74

Дмитришин Р. І.	
Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду	76
Заболоцький М. В., Мостова М. Р.	
Достатні умови існування кутової v -щільності нулів цілої функції нульового порядку	77
Загороднюк А. В., Кравців В. В.	
Операція згортки на спектрах алгебр блочно-симетричних аналітичних функцій	78
Загороднюк А. В., Тарас О. Г.	
Дослідження регулярності за Аренсом $\bigotimes_{s,\pi}^n A$. . .	79
Ільків В. С., Страп Н. І.	
Про розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю у комплексній області	80
Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.	
Наближення класів $W_\beta^r H^\alpha$ бігармонійними інтегралами Пуассона	81
Kalenyuk P., Nytrebych Z., Kuduk G., Symotyuk M.	
The problem with integral conditions for the homogeneous equation	83
Карлова О. О.	
Про стабільні берівські класи	84
Kondratyuk A. A., Lukivska D. V.	
The linear space $\mathcal{L}_{qr}$	86
Копач М. І.	
Двосторонні інтегральні нерівності з багатьма незалежними змінними	87
Копач М. І., Обшта А. Ф., Шувар Б. А.	
Аналоги принципу Біркгофа-Тарського про нерухому точку	89
Кузь А. М., Симолюк М. М., Феник М. Т.	
Про першу українську математичну публікацію . . .	91
Khoroshchak V. S., Kondratyuk A. A.	
Generalization of the Weierstrass $\wp$ -function	93
Крохтяк І. З., Сокульська Н. Б.	
Одна властивість інтегральних середніх мероморфної у замиканні півсмуги функції	94

Martsinkiv M., Zagorodnyuk A.	
<i>Some properties of Lipschitz p-summing operators . . .</i>	95
Маслюченко В. К., Мироник О. Д.	
<i>Про розриви нарізно неперервних відображень зі значеннями в прямій Зорґенфрея</i>	96
Маслюченко В. К., Мельник В. С.	
<i>Теорема про проміжну функцію для опуклих функцій</i>	98
Мельник Б. О., Микитюк Я. В.	
<i>Спектральні властивості оператора Шредінґера з безвідбивним потенціалом.</i>	100
Ментинський С. М., Пелех Я. М.	
<i>Чисельні методи розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду</i>	102
Мироник В. І., Михайлюк В. В.	
<i>Про одне питання З. Гранде</i>	103
Можировська З. Г.	
<i>Універсальність оператора композицій на функціональних просторах</i>	105
Нестеренко В. В.	
<i>Про ослаблену неперервність оберненого відображення</i>	106
Нестеренко О. Н., Царегородцев Я. В.	
<i>Функціональна обернена задача наближення для скінченного числа підпросторів у F-просторах та лінійних нормованих просторах</i>	108
Новіков О. О., Ровенська О. Г., Козаченко Ю. О.	
<i>Наближення інтегралів Пуассона сумами Фейєра . .</i>	110
Пелех Р. Я., Пелех Я. М.	
<i>Методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з оцінкою головного члена локальної похибки</i>	111
Пігура О. В.	
<i>Максимально негелфандові ідеали комутативної області Безу</i>	112
Panchuk S. I., Salo T. M., Skaskiv O. B.	
<i>Logarithmic h-measure and entire Dirichlet series with monotonous coefficients</i>	113
Плацидем М. І.	
<i>Оцінки $\ln \mu(r, \varphi)$ знизу для функцій скінченного порядку</i>	115

Романів О. М., Саган А. В.	
<i>Квазі-евклідові дуо кільця з елементарною редуцією матриць</i>	117
Ronska N.	
<i>On some generalization of adequate duo-ring</i>	118
Скасків О. Б., Тарновецька О. М., Трусевич О. М.	
<i>Про співвідношення Бореля для рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле</i>	120
Савка І. Я., Гой Т. П.	
<i>Діофантові умови розв'язності однієї нелокальної задачі для факторизованого гіперболічного оператора парного порядку</i>	121
Савчук Я. І.	
<i>Про потужність множини виключних значень в розумінні Валірона для мероморфних функцій</i>	123
Сафонов В. М.	
<i>Про суперпозицію абсолютно неперервних функцій</i>	124
Сафонова О. В., Зелінський Ю. Б.	
<i>Про вимірність множини точок максимальної кратності при многозначному відображенні</i>	125
Сковронська І. Я., Симотюк М. М.	
<i>Оцінки малих знаменників у задачі про малі поперечні періодичні коливання пучка струн</i>	127
Симотюк М. М., Тимків І. Р.	
<i>Про малі знаменники багатоточкової задачі для параболічного рівняння високого порядку</i>	129
Симотюк М. М., Хомяк Д. В.	
<i>Метричні оцінки задачі з двома вузлами для системи навантажених гіперболічних рівнянь другого порядку</i>	131
Симотюк М. М., Медвідь О. М.	
<i>Про збіжність дробів Нерлунда, Гауса, Ойлера у полі р-адичних чисел</i>	133
Serdyuk A. S., Stepaniuk T. A.	
<i>Estimates for approximations by Fourier sums and best approximations of the classes of (ψ, β)-differentiable functions</i>	134
Солдатов В. О.	
<i>Теорема про граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах у просторах Гельдера</i>	135

Solomko A. V.	
<i>On application of Fourier-Laplace operator transformation in convolution algebra of Gevrey ultradistributions</i>	137
Стефанчук М. В.	
<i>Екстремальні елементи та $\mathbb{H}$-квазіопуклі множини в $\mathbb{H}^n$</i>	139
Tesko V.	
<i>The moment problem on configuration space: one-dimensional model case</i>	142
Федуник-Яремчук О. В	
<i>Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності</i>	143
Khrystiyanyan A. Ya., Vyshynskiy O. S.	
<i>Growth regularity of arguments of meromorphic functions of completely regular growth in the punctured plane</i>	145
Чернега І. В.	
<i>Алгебра симетричних аналітичних функцій на просторі $\ell_1(A)$</i>	147
Шавала О. В.	
<i>Про деякі властивості мероморфних розв'язків лінійного диференціального рівняння третього порядку</i>	147

Пленарні доповіді

Рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями для плинів твердих куль

ГЕРАСИМЕНКО В. І.

Інститут математики НАН України, Київ
gerasym@imath.kiev.ua

ГАП'ЯК І. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
gapjak@ukr.net

У доповіді розглядається проблема строгого опису кінетичної еволюції на основі кінетичного рівняння Фоккера – Планка плинів системи твердих куль з пружним зіткненням [1] за наявності початкових кореляцій, якими характеризуються системи багатьох частинок в конденсованих станах.

Використовуючи розвинутий в статті [2] підхід до обґрунтування кінетичного рівняння Фоккера – Планка, встановлено, що еволюція стану виділеної (важкої) твердої кулі, яка взаємодіє із системою нескінченної кількості (легких) твердих куль, описується узагальненим рівнянням Фоккера – Планка з початковими кореляціями. Сформульовані раніше кінетичні рівняння такого типу описують асимптотичну поведінку розв'язку побудованого кінетичного рівняння у відповідних скейлінгових наближеннях для початкових станів статистично незалежних частинок.

За допомогою нескінченної послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку побудованого кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями описано процеси народження кореляцій і поширення початкових кореляцій в плинах твердих куль.

- [1] V.I. Gerasimenko, I.V. Gapyak, *Hard sphere dynamics and the Enskog equation*, Kinet. Relat. Models, **5** (3) (2012), 459–484.
- [2] V.I. Gerasimenko, I.V. Gapyak, *The non-Markovian Fokker–Planck kinetic equation for a system of hard spheres*, Reports of NAS of Ukraine, **12** (2014), 29–35.

Про узагальнено опуклі оболонки множин та задача про тінь

ЗЕЛІНСЬКИЙ Ю. Б.

Інститут математики НАН України, Київ
zel@imath.kiev.ua

Аксиоматичний підхід до означення опуклості (скажемо, що сім'я множин складається з опуклих множин, якщо перетин довільної кількості їх належить до сім'ї) дозволяє назвати опуклими ряд екзотичних класів множин, які не асоціюються зі звичайним поняттям опуклості, наприклад, множина усіх множин або сім'я замкнутих підмножин деякого топологічного простору.

На попередній конференції було досліджено задачу про тінь і пов'язану з нею задачу побудови узагальнено опуклої оболонки сім'ї множин [1].

Дальші результати в цьому напрямку одержані в низці робіт попереднього року, де аналогічні задачі розв'язано для сукупностей опуклих множин відмінних від сфер. В ряді задач про сфери допускались довільне розміщення їх центрів. Поширено також результати на комплексні та гіперкомплексні простори.

Теорема 1. [3] *Для того щоб вибрана точка в n -вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-оболонки сім'ї відкритих (замкнених) куль, які попарно не перетинаються і не містять дану точку, необхідно і досить n куль.*

Теорема 2. [3] *Для того щоб вибрана точка в n -вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-оболонки сім'ї відкритих (замкнених) множин отриманих із заданої опуклої множини з не порожньою внутрішністю при допомозі групи перетворень з рухів та гомотетій, які попарно не перетинаються, необхідно і досить n елементів сім'ї.*

Означення. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ m -комплексно (m -гіперкомплексно) опукла відносно точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$, якщо знайдеться m -вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L , така що $z \in L$ і $L \cap E = \emptyset$. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ m -комплексно (m -гіперкомплексно) опукла, якщо вона m -комплексно (m -гіперкомплексно) опукла відносно кожної точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$.

Теорема 3. [4] Для того щоб точка n -вимірному (гіпер)комплексного евклідового простору $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ належала до 1-(гіпер)комплексної оболонки сім'ї відкритих (замкнених) куль, які попарно не перетинаються і не містять дану точку, необхідно і досить n куль.

Теорема 4. Для того щоб, вибрана точка в n -вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому простору $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$, $n \geq 3$, належала до 1-комплексної (1-гіперкомплексної) оболонки сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n(4n - 2)$ куль.

Відкрите питання. Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль в n -вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ при $n \geq 3$, які попарно не перетинаються і не містять дану точку з центрами на фіксованій сфері і радіуса не більшого (меншого) радіуса сфери, необхідно і досить щоб центр сфери належав до 1-комплексної (1-гіперкомплексної) оболонки?

- [1] Ю. Зелинский, И. Выговская, М. Стефанчук, *Задача о тени для семейства множеств*, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Тези, Ворохта, 25.02–1.03.2015, 24–25.
- [2] Ю. Зелинский, И. Выговская, М. Стефанчук, *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени*, Український математичний журнал, **67**, (12), (2015), 1659–1666.
- [3] Ю. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств*, Збірник праць Інституту математики НАНУ, **12**, (4), (2015), 197–204.
- [4] Yu. Zelinskii, *Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow*, Journal of Mathematical Sciences, **211**, (5), (2015), 710–717.
- [5] Yu. Zelinskii, *Problem of shadow (complex case)*, Advances in Mathematics: Scientific journal, **5**, (1), (2016), 1–5.

Further steps to nonlinear analysis

KONDRATYUK A. A.

Ivan Franko National University of Lviv

kond@franko.lviv.ua

A brief survey of the results in nonlinear analysis obtained during the last years will be proposed. Namely:

1. Nonlinear homogeneous spaces, the Klein spaces.
2. Stationary mappings with respect to a group of automorphisms.
3. p -Loxodromic and p -elliptic functions.
4. Modulo-elliptic functions.
5. Generalized Weierstrass $\wp$ -function and Jacobi Θ -function.

6. Stationary harmonic and δ -subharmonic functions in the punctured and pierced Euclidean spaces.

Пошарово рівномірні границі послідовностей сукупно неперервних функцій

ВОЛОШИН Г. А.

*Буковинський державний фінансово-економічний університет
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
galja.vlshin@gmail.com*

МАСЛЮЧЕНКО В. К.

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@gmail.com*

Для відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f(p) = f_y(x)$. Ми скажемо, що послідовність функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ пошарово рівномірно збігається до функції $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, якщо $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$ і $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$. Ми обмежимося тут розглядом числових функцій, хоча можна було б розглядати і відображення зі значеннями в метричному чи,

загальніше, рівномірному просторі Z . Якщо X і Y – топологічні простори, то пошарово рівномірна границя послідовності нарізно неперервних функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ залишається, зрозуміло, нарізно неперервною. Тим більше це залишається в силі, коли функції f_n сукупно неперервні. Природно постає і обернене питання: для яких нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ існує послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, яка пошарово рівномірно збігається до f ?

У працях [1-3] для $X = Y = [0, 1]$ на просторі $CC[0, 1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ була введена природна локально опукла топологія $\mathcal{T}$, збіжність відносно якої – це пошарово рівномірна збіжність, і доведено, що у локально опуклому просторі $S = (CC[0, 1]^2, \mathcal{T})$ замикання підпростору P всіх поліномів від двох змінних збігається з замиканням підпростору $C = C[0, 1]^2$ всіх сукупно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і дорівнює S . Так само для секвенціальних замикань цих підпросторів виконується рівність $\overline{P}^s = \overline{C}^s$. Зокрема, в [2] було поставлене питання чи $\overline{P}^s = S$, що рівносильне рівності $\overline{C}^s = S$. Ці побудови легко переносяться на випадок довільних компактних просторів X і Y і для них виникає питання про рівність $\overline{C}(X \times Y)^s = S(X \times Y) = (CC(X \times Y), \mathcal{T})$.

Крім того, в [3] було показано, що S – це неметризовний повний сепарабельний локально опуклий простір і поставлено питання про вивчення його властивостей. В серії подальших праць [4-6] було з'ясовано, що S – це не берівський бочковий і борнологічний простір.

Задача про рівність $\overline{C}^s = S$ досліджувалася у праці [7], результати якої були розвинуті у працях [8-10]. Зокрема, там були розглянуті умови:

(A_X) проєкція $A = pr_X(D(f))$ множини $D(f)$ точок розриву функції $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ на вісь абсцис X не більш, ніж зліченна;

(B_X) звуження $f|_{A \times Y}$, де $A = pr_X(D(f))$, неперервне за сукупністю змінних.

Зокрема, у [8,9] методом лінійної інтерполяції було встановлено, що коли $X = [a, b]$, Y – компактний простір і $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, яка задовольняє умову (A_X) чи (B_X) , то f є пошарово рівномірною границею послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ (для $X = Y = [0, 1]$ це було доведено в [7]). А в [10] апросимативним методом з [11] було доведено, що в разі виконання умови (A_X) відрізок $[a, b]$ можна замінити на довільний метризовний компакт.

Нехай (A_Y) і (B_Y) – умови на функцію $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, які отримуються з (A_X) і (B_X) заміною X на Y , множини A на множину $B = pr_Y(D(f))$ і звуження $f|_{A \times Y}$ на звуження $f|_{X \times B}$. Розглянемо диз'юнкції $(A) = (A_X) \vee (A_Y)$ і $(B) = (B_X) \vee (B_Y)$ відповідних умов. Фактично, для $X = Y = [0, 1]$ ще в [3] було встановлено, що коли нарізно неперервна функція $f : X \times Y \rightarrow$

$\mathbb{R}$ задовольняє умову (A) чи (B), то вона є пошарово рівномірною границею послідовності сукупно неперервних функцій.

Наступна теорема показує, що цей результат не застосовний до кожної нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Існує нарізно неперервна функція $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка не задовольняє жодну з умов (A) і (B) і є пошарово рівномірною границею послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Недавно В.В.Михайлюк, використавши трансфінітні побудови і розбиття одиниці як у методі Рудіна [12], встановив, що $\overline{C}^s = S$ для $X = Y = [0, 1]$ і навіть у загальнішому випадку. Тому постало питання про те, чи можна для доведення рівності $\overline{C}^s = S$ застосовувати метод лінійної інтерполяції, щоб отримати конструктивне доведення цієї рівності. Виявилося, що це не так.

Нагадаємо [7], що для множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ точок $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$ і функції $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ми вводимо функцію $h = L_{A,g}$, яка в точках з $\tilde{A} = A \cup \{a, b\}$ збігається з g , а на проміжках $[a_k, a_{k+1}]$ при $k = 0, 1, \dots, n$ є лінійною.

Теорема 2. *Для довільної всюди щільної на інтервалі $(0, 1)$ зліченної множини $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, що складається з різних точок a_k , і довільної точки $x_0 \in (0, 1) \setminus A$ існує така нарізно неперервна функція $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що для функцій $f_n(x, y) = L_{A_n} f_y(x)$, заданих на $[0, 1]^2$, де $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, вертикальні x_0 -розрізи $f_n^{x_0}$ не збігаються рівномірно до f^{x_0} .*

Природно постають питання про застосовність до до встановлення рівності $\overline{C}^s = S$ інших апроксимаційних методів, пов'язаних, наприклад, з многочленами Бернштейна, Фейєра чи Джексона. Вони ще чекають своєї відповіді.

- [1] V. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *Closure of the set of polynomials the space of separately continuous functions*//International conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, 17-21 September, 2012. L'viv: abstracts of reports, L'viv, (2012), 97–98.
- [2] Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій*// Всеукраїнська наукова конференція "Алгебра, топологія, аналіз. стохастика 20-23 вересня, 2012. Микуличин: тези доповідей., Івано-Франківськ, (2012), 3–5.

- [3] Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Топологізація простору нарізно неперервних функцій* Карп.мат.публ., **5**(2) (2013), 199–207.
- [4] Г.А. Волошин, В.К.Маслюченко, О.В.Маслюченко, *Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів та його бочковість*, Мат. вісн. НТШ, **11** (2014), 36–50.
- [5] Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про боровість простору нарізно неперервних функцій*, Зб. пр. Ін-ту мат. НАН України, **12** (3) (2015), 78–96.
- [6] Г.А. Волошин, В.К.Маслюченко, О.В.Маслюченко, *Борнологічність простору нарізно неперервних функцій*, Мат. вісн. НТШ, **12** (2015), (у друці).
- [7] Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами*, Мат. вісн. НТШ, **10** (2013), 135–158.
- [8] Г.А. Волошин, В.К.Маслюченко, *Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій та її застосування*, Мат. студії, **42**(2) (2014), 129–133.
- [9] Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій, яка зберігає звуження*, Прикарпат. Вісн. НТШ. "Число" , **1** (29) (2015), 11– 21.
- [10] Г.А. Волошин, В.К.Маслюченко, *Секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій*, Укр.мат.журн., (2015), (у друці).
- [11] Г. Власюк, В.К.Маслюченко, *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції*, Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика, Чернівці: Рута, (2007), 52-59.
- [12] W. Rudin, *Lebesgue first theorem*, Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78, Academic Press (1981), 741-747.

Об абсолютной сходимости рядов Фурье и обобщённых пространствах Липшица

ПЕЛЕШЕНКО Б. И.

Днепропетровский гос. аграрно-эконом. университет
dsaupesh@mail.ru

СЕМИРЕНКО Т. Н.

Днепропетровский гос. аграрно-эконом. университет

В докладе получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на коэффициенты Фурье 2π -периодической функции, для ее принадлежности классу Липшица $H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$, $\alpha > 0$, определяемому с помощью α -ой разности функции $\Delta_t^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + kt)$ и модуля непрерывности α -го порядка $\omega_{\alpha}(t)$.

В частности, когда $\alpha = n$, где n - целое положительное число, то $\Delta_t^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + kt)$.

Класс Липшица $H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$ состоит из непрерывных 2π -периодических функций f , которые удовлетворяют для всякого x и t неравенству $|\Delta_t^{\alpha} f(x)| \leq K_{\alpha} \omega_{\alpha}(t)$, где K_{α} зависит только от функции f и не зависит от x и t . Класс $h_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$ состоит из функций $f \in H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$, для каждой из которых выполняется условие $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\Delta_t^{\alpha} f(x)|}{\omega_{\alpha}(t)} = 0$ равномерно для всех x .

Пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ - такая последовательность комплексных чисел, что $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и функция $f(x)$ - сумма Фурье ряда $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$, т.е. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f(x)$.

Сформулируем основные утверждения работы.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$ и $a \neq 2l + 1$, где $l \in \mathbb{N}$, модуль непрерывности α -ого порядка $\omega_{\alpha}(t)$ при всяком $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1} \omega_{\alpha}(k^{-1}) \leq M_3 \omega_{\alpha}(n^{-1}) \quad (5)$$

и последовательность комплексных чисел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ такая, что

$$\sum_{|k| \leq n} |k|^\alpha |c_k| = O(n^\alpha \omega_\alpha(n^{-1})), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

тогда $f \in H_\alpha^{\omega_\alpha}$.

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ - такая последовательность действительных чисел, что $c_k \geq 0$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и $\omega_\alpha(t)$ -модуль непрерывности α -го порядка. Если $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и сумма ряда $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in H_\alpha^{\omega_\alpha}$, тогда (6) выполняется.

Теорема 2. Пусть $\alpha = 2l + 1$, где $l \in \mathbb{N}$, модуль непрерывности α -ого порядка $\omega_\alpha(t)$ при всяком $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию (5) и для последовательности комплексных чисел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ выполняется условие (6), тогда $f \in H_\alpha^{\omega_\alpha}$.

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ - такая последовательность действительных чисел, что $kc_k \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $\omega_\alpha(t)$ -модуль непрерывности α -го порядка. Если $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и сумма ряда $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in H_\alpha^{\omega_\alpha}$, тогда (6) выполняется.

Необходимые и достаточные условия, накладываемые на коэффициенты Фурье $f \in L^1(\mathbb{R})$, принадлежности функции f соответствующим классам Зигмунда $Z(1)$, $z(1)$ ($n = 2, \omega_2(t) = t$), Липшица $Lip(\alpha)$, $lip(\alpha)$ ($n = 1, \omega_1(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$), получены в работе Ф.Морица.

Про збурення малим шумом диференціальних рівнянь з неліпшицевими коефіцієнтами

ПИЛИПЕНКО А. Ю.

Институт математики НАН України; НТУУ “КПІ”

apilip@imath.kiev.ua

Роглянемо рівняння

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds, t \geq 0 \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^d$ та $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – обмежена та неперервна функція.

Добре відомо, що якщо b задовольняє умову Липшиця, то існує єдиний розв’язок (1). Якщо функція b не задовольняє умову Липшиця, то за теоремою Пеано розв’язки існують, але єдиність може порушуватись.

Розглянемо збурення (1) малим шумом:

$$X_t^\varepsilon = x + \int_0^t b(X_s^\varepsilon) ds + \varepsilon w(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де $w(t), t \geq 0$ – вінеровський процес. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, стохастичне рівняння (2) має єдиний розв’язок навіть, якщо b є лише вимірною функцією не більш ніж лінійного зросту [1] .

Ми вивчаємо граничну поведінку розподілів процесів $\{X^\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ у випадку, коли функція b задовольняє умову Ліпшиця скрізь окрім, можливо фіксованої точки або гіперплощини. Граничний розподіл можна інтерпретувати, як природний вибір з сім’ї усіх розв’язків (1).

- [1] A.Yu. Veretennikov, *Strong solutions of stochastic differential equations* Theory Probab. Appl. **24**, N 2, (1979), 354–366.
- [2] A.Yu.Pilipenko, F.N.Proske, *On a Selection Problem for Small Noise Perturbation in Multidimensional Case* arXiv:1510.00966 (2015)

Деякі цікаві моменти зупинки для симетричного стійкого процесу

ПОРТЕНКО М. І.

Інститут математики НАН України, Київ
portenko@imath.kiev.ua

Для одновимірному симетричного стійкого процесу з показником $\alpha \in (0; 2]$ розглядаються три моменти зупинки, які виявляються різними у випадку $1 < \alpha < 2$ і які збігаються один з іншим у випадку $\alpha = 2$. Знаходяться розподіли кожного із цих моментів, а також досліджуються деякі властивості випадкових процесів, що отримуються із симетричного стійкого процесу шляхом його обриву в кожен із цих моментів зупинки.

Stochastic approximation procedure as controlled random evolution

CHABANYUK YA. M.

Lublin University of Technology, Ivan Franko National University of Lviv
yaroslav.chab@gmail.com

KHIMKA U. T.

Lviv Polytechnic National University
ulyana.himka@gmail.com

Procedure of stochastic approximation in an ergodic Markov environment is defined by the stochastic differential equation [3]

$$du^\varepsilon(t)/dt = a(t)C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)), u^\varepsilon(0) = u,$$

where $a(t) > 0$ control function of properties $\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty$. Regression function $C(u; x), u \in R^d$, that there exists solution of equation $du_x(t)/dt = a(t)C(u_x(t), x), u_x(0) = u$. There is weak convergence $u^\varepsilon(t) \Rightarrow u^*, t \rightarrow \infty$, where equilibrium point u^* satisfies equation $\hat{C}(u^*) = 0, \hat{C}(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x)$. Here controlled random evolution $u^\varepsilon(t)$ with Markov process x_t^ε has generator $\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u; x) = [\varepsilon^{-1}Q + a(t)\mathbf{C}(x)]\varphi(u; x)$.

Stochastic optimization procedure as controlled random evolution is defined by the stochastic differential equation [2]

$du^\varepsilon(t)/dt = a(t) \nabla_{b(t)} C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)), u^\varepsilon(0) = u$, where $\nabla_b C(u, \cdot) := \frac{C(u_i^+, \cdot) - C(u_i^-, \cdot)}{2b(t)}, (i = \overline{1, d}), u_i^\pm = u_i \pm b(t)e_i, e_i$ - vector with coordinates $\{0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$. Weak convergence $u^\varepsilon(t) \Rightarrow u^*, t \rightarrow \infty$, takes place, where extremum point u^* satisfies equation $\hat{C}'(u^*) = 0, \hat{C}(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x)$ [2]

- [1] Ya. Chabanyuk, *Continuous Procedure of Stochastic Approximation With Singular Perturbation Under Balance Conditions*, Cybernetics and Systems Analysis, **42** (3) (2006), 133–139.
- [2] Ya. Chabanyuk, U. Khimka. *Difference procedure of stochastic optimization with impulse perturbation*, Cybernetics and Systems Analysis, **49** (3) (2013), 145–162.

Секційні доповіді

Секція теорії ймовірностей

Про представлення для похідної за початковими даними розв'язку стохастичного диференціального рівняння з нерегулярним переносом

АРЯСОВА О. В.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

oaryasova@gmail.com

Розглянемо багатовимірне стохастичне диференціальне рівняння з вимірним і обмеженим вектором переносу і вінеровим шумом. Добре відомо, що у випадку, коли вектор переносу є неперервно диференційовним і його похідні є обмеженими, рівняння породжує потік дифеоморфізмів. При цьому похідні за початковими даними є розв'язками певних диференціальних рівнянь. Виявляється, що умови на вектор переносу можна суттєво послабити, і потік дифеоморфізмів існує у випадку можливо необмеженого гелдерового вектора переносу. Останнім часом в декількох роботах диференційовність за Соболевим розв'язку було доведено при достатньо слабких припущеннях відносно коефіцієнта переносу, але не було одержано жодних представлень для похідної.

За деяких додаткових припущень відносно вектора переносу ми одержуємо представлення для похідних в термінах параметрів початкового рівняння. Це представлення є природним узагальненням виразу для похідної у випадку гладенького коефіцієнта переносу. В одновимірному випадку похідна може бути представлена через локальний час процесу. Добре відомо, що в багатовимірному випадку розв'язок не має локального часу в точці. Ми застосовуємо теорію неперервних адитивних функціоналів. Цей метод може бути розглянений як узагальнення на багатовимірний випадок методу, що використовує локальний час.

Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань

АЮБОВА Н. С.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
fantariya@gmail.com

КУРЧЕНКО О. О.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
olkurchenko@ukr.net

Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s, t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0, 1)$. Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху досліджувалася багатьма авторами. Метод бакстерівських сум для оцінювання цього параметра застосовувався, наприклад, у статті [1].

Реальне вимірювання значення випадкового процесу в точці здійснюється приладом, що має певну інерційність. Тому замість значення випадкового процесу $\xi(t)$ у момент часу t , прилад видає $\int_A \xi(s)\varphi(s)ds$, де A - деякий окіл точки t , $\varphi(s)$ - функція, що характеризує прилад [2]. Нехай $\delta > 0$, $\Delta > 3\delta$, $\Delta - 2\delta > 1$; $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - відома борелівська функція, $\varphi(x) = 0$ при $|x| > \delta$; $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(s)ds = 1$. За спостереженнями випадкових величин $\eta_{H,k} = \int_{k\Delta-\delta}^{k\Delta+\delta} \xi_H(s)\varphi(s)ds$, $k \geq 1$ потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H . Функція $k(H) = E(\eta_{H,2} - \eta_{H,1})^2$, $H \in (0, 1)$ неперервна і зростаюча на інтервалі $(0, 1)$.

Теорема 1. Для довільного $H \in (0, 1)$ $S_{H,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\eta_{H,k+1} - \eta_{H,k})^2 \rightarrow k(H)$ за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$. При цьому $S_{H,2^n} \rightarrow k(H)$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

За допомогою цієї теореми побудована сильно консистентна оцінка параметра Хюрста H .

- [1] Курченко О.О., *Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху.*, Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002, Вип.67., с.88–96.
- [2] Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я., *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.* – М.:ФМ, 1961, – 472 с.

Багатовимірний аналог теореми Перрона для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

БАРАН О. Є.
 ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ
 boe13@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{1}{b_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{1}{b_{i(2)} + \dots}}, \quad (1)$$

де $i(k)$ — мультиіндекс, $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$; $1 \leq i_p \leq i_{p-1}$; $p = \overline{1, k}$; $k = 1, 2, \dots$; $i_0 = N$, N — фіксоване натуральне число, $b_0, b_{i(k)}$ — комплексні числа.

Наступна теорема узагальнює теорему Перрона [1].

Теорема 1. *Нехай елементи дробу (1) задовольняють умови:*

$$b_{i(2k)} = \beta_0 \prod_{p=1}^{2k} i_{p-1}^{(-1)^p}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_{i(2k-1)} = \beta_1 \prod_{p=1}^{2k-1} i_{p-1}^{(-1)^{p+1}}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

де $\beta_0 = r e^{i\theta}$, $\beta_1 = \frac{4-\varepsilon}{r} e^{i(\pi-\theta)}$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < \varepsilon < 4$. Тоді ГЛД (1) розбігається.

[1] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig, (1929).

Про оцінку ймовірності банкрутства у випадку великих виплат

БІЛИНСЬКИЙ А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка
andrii.bilynskyi@gmail.com

КІНАШ О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка
okinasch@yahoo.com

В реальних ситуаціях на ринку страхування слід враховувати екстремальні події, коли розміри виплат будуть достатньо великими. Тобто такими, які описуються випадковими величинами, що мають так звані субекспоненційні розподіли. Ці розподіли, ще називають розподілами з "важкими хвостами".

Нехай функція розподілу $F(x)$, $x \in R_+ = [0; \infty)$ задовольняє умову $F(x) < 1 \forall x \in R_+$. Функція розподілу $F(x)$ назвемо субекспоненційною [1, ст. 189], якщо $\forall n \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Надалі клас субекспоненційних функцій розподілу позначатимемо через S .

Зауважимо, що клас S є досить багатим. Зокрема до цього класу належать такі розподіли, як лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу I та типу II.

Зауважимо, що у випадку коли виплати розподілені за законом Парето $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$, $\alpha > 1, x > k$ та лог-нормальним законом. Результат отримано в [1, ст. 198-199].

У випадку, коли виплати розподілено за законом Паретто

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x} \right)^\alpha, \alpha > 1, k > 0, x > 0,$$

та за законом Бектандера типу II, результат отримано в [2].

Розглянуто також інші випадки субекспоненційних розподілів. Так, зокрема, справедливим є наступне твердження.

Твердження 1. *Коли виплати мають розподіл Вейбулла з параметром $0 < \gamma < 1$, з функцією розподілу*

$$F(x) = 1 - \exp(-c_2 x^\gamma), c_2 > 0, 0 < \gamma < 1, x > 0,$$

асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda}{c \cdot c_2^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) - 1 + \exp\left(-c_2 x^{\frac{1}{\gamma}}\right) \left(c_2 x^{\frac{1}{\gamma}} + 1\right) \right],$$

при $u \rightarrow \infty$.

- [1] Зінченко Н. М., *Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник* / Н. М. Зінченко. - К.: ВПЦ "Київський університет 2008. - 224 с.
- [2] Білинський А.Я., *Ймовірність банкрутства для випадку субекспоненційних розподілів виплат* / А. Я. Білинський, О. М. Кінаш// Сборник научных трудов SWorld. - Выпуск 1(38). Том 21. - Иваново: МАРКОВА АД, 2015 - С. 95 - 100.

Оцінки точності апроксимації інтегральних функціоналів з нерегулярними ядрами від процесів Маркова

ГАНИЧЕНКО Ю. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
iurii_ganychenko@ukr.net

Для марковського процесу $X_t, t \geq 0$, заданого в $\mathbb{R}^d$, ми досліджуємо питання оцінки точності апроксимації інтегрального функціоналу I_T від цього процесу інтегральними сумами $I_{T,n}$, де

$$I_T(h) = \int_0^T h(X_t) dt, \quad I_{T,n}(h) = \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(X_{(kT)/n}), \quad n \geq 1.$$

Про функцію h ми припускаємо, що вона є вимірною та обмеженою. Ми не накладаємо жодних умов гладкості на функцію h .

Припущення на процес X формуються виключно в термінах його щільності перехідних імовірностей $p_t(x, y)$ і, таким чином, не є тісно залежними від структури самого процесу. Про процес X ми припускаємо наступне:

$$\left| \partial_t p_t(x, y) \right| \leq C_T t^{-\alpha} q_{t,x}(y), \quad t \leq T, \quad C_T \geq 1,$$

для деяких дійсного $\alpha \geq 1$ та вимірної функції q такої, що для довільних фіксованих $t, x, q_{t,x}$ є деякою щільністю розподілу.

За таких припущень отримано наступні оцінки:

1) для довільного $p > 0$ та деякої константи D

$$E_x \left| I_T(h) - I_{T,n}(h) \right|^p \leq \begin{cases} D \|h\|^p \cdot (n^{-1} \log n)^{p/2}, & \alpha = 1, \\ D \|h\|^p \cdot n^{-p/(2\alpha)}, & \alpha > 1; \end{cases}$$

2) для довільних $k \in \mathbb{N}$, обмеженої функції f та деякої константи D

$$\left| E_x (I_T(h))^k f(X_T) - E_x (I_{T,n}(h))^k f(X_T) \right| \leq \begin{cases} D \|h\|^k \|f\| \cdot n^{-1} \log n, & \alpha = 1, \\ D \|h\|^k \|f\| \cdot n^{-1/\alpha}, & \alpha > 1, \end{cases}$$

Отримані оцінки сильної та слабкої апроксимації інтегрального функціоналу співпадають з результатами [1] (Теорема 2.3, 2.4), отриманими в [1] для дифузійного процесу-аргументу.

- [1] A. Kohatsu-Higa, A. Makhlouf, H. L. Ngo, *Approximations of non-smooth integral type functionals of one dimensional diffusion precesses*, Stochastic Processes and their Applications, **124** (5) (2014), 1881–1909.

Гранична поведінка страхових премій залежних від параметрів

ДРОЗДЕНКО В. О.

Білоцерківський національний аграрний університет

drozdenko@yandex.ru

Нехай X це випадкова величина (не обов'язково невід'ємна, з функцією розподілу $F_X(x)$), яка відображає розмір страхової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X , позначатимемо $\pi[X]$.

Експоненційна премія (en: exponential premium), для довільного ризику X , означається наступним чином

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] := \frac{1}{\alpha} \log(\mathbb{E}[e^{\alpha X}]), \quad \text{для } \alpha > 0.$$

Премія відрегульована ризиком (en: risk adjusted premium), для невід'ємного ризику X , означається в такий спосіб

$$\pi_{\text{в.р.}(\rho)}[X] := \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx, \quad \text{для } \rho \geq 1.$$

Премія пропорційного ризикового перетворення (en: proportional hazard transform premium), для довільного ризику X , означається так

$$\pi_{\text{п.р.п.}(\rho)}[X] := \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx - \int_{-\infty}^0 1 - [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx, \quad \text{для } \rho \geq 1.$$

Премія Есшера (en: Esscher premium), для довільного ризику X , задається наступним співвідношенням

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] := \frac{\mathbb{E}[X e^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]}, \quad \text{для } \alpha \geq 0.$$

Нагадаємо, що *істотний супремум* (en: essential supremum) (його в страховій літературі часто називають *премією максимальних збитків*) довільної випадкової величини X означається наступним чином

$$\text{ess sup}[X] := \sup\{\delta : F_X(\delta) < 1\},$$

а істотний інфімум (en: essential infimum), в свою чергу, наступним

$$\text{ess inf}[X] := \inf\{\delta : F_X(\delta) > 0\}.$$

Для вищезначених принципів страхового оцінювання мають місце наступні граничні співвідношення.

Теорема 1. *Якщо для X існує $\varepsilon > 0$ таке, що $E[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty$, то*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = E[X].$$

Теорема 2. *Для довільного ризику X виконується рівність*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Наслідок 1. *Для довільної випадкової величини X має місце рівність*

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{1}{\alpha} \log(E[e^{\alpha X}]) = \text{ess inf}[X].$$

Теорема 3. *Для довільного невід’ємного ризику X виконується рівність*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \pi_{\text{в.р.}(\rho)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Теорема 4. *Для довільного ризику X виконується рівність*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \pi_{\text{п.р.п.}(\rho)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Теорема 5. *Для довільного ризику X виконується рівність*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \pi_{\text{Есшпер}(\alpha)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Наслідок 2. *Для довільної випадкової величини X має місце рівність*

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{E[Xe^{\alpha X}]}{E[e^{\alpha X}]} = \text{ess inf}[X].$$

- [1] В.О. Дрозденко, *Гранична поведінка страхових премій, залежних від параметрів*, Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, **11**, (2010), 211–224.

Про розподіл півнорм $L_p(\Omega)$ процесів у просторах Гельдера

ЗАТУЛА Д. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
dm.zatula@gmail.com

Розглянемо метричний простір $(\mathbb{T}, \rho)$ та випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$. Модулем неперервності процесу X є будь-яка функція f така, що з ймовірністю 1 справджується наступна нерівність:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1.$$

Простір функцій з модулями неперервності $f(\varepsilon)$ є простором Гельдера, а функціонал

$$\sup_{\substack{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in \mathbb{T}}} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))}$$

є півнормою у цьому просторі.

Модулі неперервності та умови Гельдера для гаусових процесів вперше були детально досліджені у роботі Дадлі [1]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча у монографії [3].

Для випадку компактного простору $\mathbb{T}$ та довільної метрики ρ у роботі [2] знайдені оцінки розподілу півнорм випадкових функцій $L_p(\Omega)$ процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ у просторах Гельдера, тобто оцінки ймовірності

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}.$$

Як наслідок, для нескінченного простору $(\mathbb{T}, \rho) = ([0, \infty), \rho)$ з метрикою $\rho(t,s) = |t - s|$, $t, s \in \mathbb{T}$ справджується теорема.

Теорема 1. Нехай $[0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, де $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0, 1, \dots\}$ — деяка зростаюча послідовність, $a_0 = 0$. Позначимо $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$, $D_i = [a_i, a_{i+1} + \theta]$, $\theta \in \left(0, \min_{i \geq 0} \alpha_i\right)$. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, \infty)\}$ з простору $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Припустимо, що існують монотонно зростаючі неперервні функції $\sigma_i = \{\sigma_i(h), h \geq 0\}$ такі, що $\sigma_i(0) = 0, i = 0, 1, \dots$ та $\forall i = 0, 1, \dots$ виконується наступна нерівність:

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in D_i}} \|X(t) - X(s)\|_{L_p} \leq \sigma_i(h), \quad 0 < h < \alpha_i + \theta.$$

Нехай $N_i(\varepsilon)$ — метричні масивності для D_i , $i = 0, 1, \dots$ з метрикою $\rho(t, s) = |t - s|$. Також позначимо $\varepsilon_0 = \min_{i \geq 0} \left\{ \sigma_i^{(-1)}(\alpha_i + \theta) \right\}$, де $\sigma_i^{(-1)}(h)$ — це обернені функції до функцій $\sigma_i(h)$, $i = 0, 1, \dots$; $f_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)} \left(N_i \left(\sigma_i^{(-1)}(r) \right) \right)^{2/p} dr$ та $g_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)} \left(N_i \left(\sigma_i^{(-1)}(r) \right) \right)^{4/p} dr < \infty$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Позначивши $z_i(t, s) = (6 + 4\sqrt{2})f_i(|t - s|) + (5 + 2\sqrt{6})g_i(|t - s|)$, $t, s \in D_i$ та $z(t, s)$ такою функцією, що $z(t, s) = \{z_i(t, s) | t, s \in A_i \vee \min\{t, s\} \in A_i, \max\{t, s\} \in A_{i+1}\}$, отримуємо, що для $y > 0$, $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, \theta\})$, $\theta > \varepsilon$ та за умови $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$ виконується нерівність:

$$P \left\{ \sup_{\substack{0 < |t-s| \leq \varepsilon \\ t, s \in [0, \infty)}} \frac{|X(t) - X(s)|}{z(t, s)} > y \right\} \leq \frac{2C_0 \varepsilon}{y^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i + \varepsilon},$$

$$\text{де } C_0 = \frac{(2B_0^2 + B_0)B_0^4}{B_0^2 - 1}, \quad B_0 = \frac{\sqrt{33}}{4} \cos \left(\frac{1}{3} \arctan \left(\frac{8\sqrt{41}}{37} \right) \right) - \frac{1}{8}.$$

- [1] R. M. Dudley, *Sample functions of the Gaussian processes*, Ann. Probab., **1** (1) (1973), 3–68.
- [2] D. Zatula, *Lipschitz conditions for random processes from $L_p(\Omega)$ spaces of random variables*, J. of Classical Analysis, **6** (1) (2015), 59–72.
- [3] В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, – К.: ТВИМС, (1998).

Метод потенціалів для систем типу $M/G/1/m$ з випадковим відкиданням замовлень

ЖЕРНОВИЙ К. Ю.

*Львівський навчально-науковий інститут ДВНЗ "Університет
банківської справи"*

k.zhernovyi@yahoo.com

Випадкове відкидання замовлень використовується з метою регулювання параметрів систем обслуговування. Кожне замовлення може бути відкинуте з імовірністю, яка залежить від довжини черги в момент надходження цього замовлення.

Ми вивчили систему обслуговування типу $M/G/1/m$, в якій кожне замовлення може бути прийняте на обслуговування або відкинуте згідно з правилом: якщо в момент прибуття замовлення в системі перебуває n замовлень, то це замовлення приймається на обслуговування з імовірністю β_n і покидає систему (отримує відмову, відкидається) з імовірністю $1 - \beta_n$. Зафіксуємо порогове значення h ($1 \leq h < m$) і припустимо, що $\beta_n = \tilde{\beta}$ ($0 < \tilde{\beta} < 1$) для $h + 1 \leq n \leq m$.

Для визначення імовірнісних характеристик системи запропоновано підхід, який ми назвали методом потенціалів [1]. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості та для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі, ймовірності обслуговування та стаціонарних характеристик черги. Отримані результати перевірено за допомогою імітаційної моделі, побудованої за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

- [1] Ю. Жерновий, К. Жерновий, *Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания*, Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015.

Оцінка швидкості збіжності до стійких законів розподілу

КАПУСТЕЙ М. М.

Ужгородський національний університет

michaelkapustey@gmail.com

Наводиться оцінка швидкості збіжності до стійких законів розподілу нормованих сум випадкових величин в термінах однієї форми зрізаних псевдомоментів. Використовуються результати роботи [1].

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - незалежні випадкові величини, $F_k(x)$ - функція розподілу ξ_k , $\bar{F}_n(x)$ - функція розподілу $(n\lambda)^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1 + \dots + \xi_n) + A_n$, де $A_n = 0$ при $\alpha \neq 1$ і $A_n = \frac{2}{\pi}\beta \ln \lambda$ при $\alpha = 1$. Без обмеження загальності будемо вважати, що $M\xi_k = 0$, якщо вони існують. Нехай $G_\alpha(x, \lambda)$ функція розподілу стійкого закону із характеристичною функцією $g_\alpha(t, \lambda) = \exp \left\{ -\lambda |t|^\alpha (1 - i\beta \times \text{sign } t \times \omega(t, \alpha)) \right\}$, де $\omega(t, \alpha) = \tan \frac{\pi\alpha}{2}$, при $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$ і $\omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \ln |t|$ при $\alpha = 1$. Позначимо $\rho_n = \sup_x |\bar{F}_n(x) - G_\alpha(x, 1)|$, $H_i(x) = F_i(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}) - G_\alpha(x, 1)$, $\mu_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dH_i(x)$. Позначимо для довільного $y > 0$

$$\kappa_{k0}^{(1)}(\alpha, \lambda, y) = \int_{|x| \leq y} \max(1, |x|^\alpha) |H_k(x)| dx,$$

$$\kappa_{k0}^{(2)}(\alpha, \lambda, y) = \int_{|x| > y} \max(1, |x|^{m-1}) |H_k(x)| dx,$$

$$\kappa_0^{(1)}(\alpha, \lambda, y) = \max_{1 \leq k \leq n} \kappa_{k0}^{(1)}(\alpha, \lambda, y), \quad \kappa_0^{(2)}(\alpha, \lambda, y) = \max_{1 \leq k \leq n} \kappa_{k0}^{(2)}(\alpha, \lambda, y),$$

$$\kappa_0(\alpha, \lambda, y) = \max \{ \kappa_0^{(1)}(\alpha, \lambda, y); \kappa_0^{(2)}(\alpha, \lambda, y) \}.$$

Теорема 1. *Нехай $\mu_{ik} = 0$ для $i = 1, 2, \dots, k = 1, m$ де $m = 1$ при $\alpha \leq 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \leq 2$. Тоді для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність*

$$\rho_n \leq C \inf_{y>0} \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(\alpha, \lambda, y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \kappa_0^{(2)}(\alpha, \lambda, y) + \frac{(\kappa_0(\alpha, \lambda, y))^{\frac{n}{n+1}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \right)$$

де C - стала, що залежить тільки від α .

- [1] М. Капустей, *Оцінка близькості функцій розподілу двох сум випадкових величин в термінах однієї форми псевдомоментів*, Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика., **2** (27) (2015), 59–64.

Одновимірний вінерів процес з рухомою мембраною

Копитко Б. І.

Львівський національний університет імені Івана Франка
bohdan.kopytko@gmail.com

ШЕВЧУК Р. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
r.v.shevchuk@gmail.com

Доповідь присвячена проблемі побудови двопараметричної напівгрупи операторів $T_{s,t}$, $0 \leq s < t \leq T$, що діють у банаховому просторі $B(\mathbb{R})$ обмежених вимірних функцій, якій відповідає неоднорідний феллерівський процес на $\mathbb{R}$ такий, що в областях $(-\infty, r(s))$ і $(r(s), \infty)$, де $r(s)$ — задана функція, він збігається із заданим там вінеровим процесом, а його поведінка після потрапляння дифундуючої частинки на спільну межу цих областей $r(s)$ визначається заданим тут одним з варіантів загальної умови спряження типу Феллера-Вентцеля [1]. Сформульовану в описаний спосіб проблему ще називають задачею про склеювання дифузійних процесів на прямій або задачею про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембраною [2].

Для розв'язання цієї задачі ми застосовуємо аналітичний метод з використанням класичної теорії теплових потенціалів. При такому підході шукану напівгрупу отримуємо як розв'язок відповідної задачі спряження для рівняння теплопровідності в припущенні, що крива $r(s)$ задовольняє умову Гельдера з показником $> \frac{1}{2}$. Відзначимо, що раніше у [3] задача про склеювання дифузійних процесів на прямій вивчалася даним методом в достатньо загальній постановці за умови, коли мембрана розташована у фіксованій точці.

- [1] А. Д. Вентцель, *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка*, Докл. АН СССР. Математика., **111** (2) (1956), 269–272.
- [2] М. І. Портенко, *Процеси дифузії в середовищах з мембранами*. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995.
- [3] В. І. Копытко, R. V. Shevchuk, *On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition*, Theory of Stochastic Processes, **17(33)** (2) (2011), 55–70.

Ціна опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна-Уленбека

Кучук-Яценко С. В.

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка
kuchuk.iatsenko@gmail.com

Мішура Ю. С.

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка
myus@univ.kiev.ua

Одним з перспективних напрямків удосконалення класичної моделі Блека-Шоулса є побудова та дослідження дифузійних моделей, у яких волатильність ризикового активу задається випадковим процесом. Процес Орнштейна-Уленбека розглядається у якості чинника волатильності у широкму колі робіт, зокрема у [4], [5].

Доповідь побудовано на основі статті [3]. У цій роботі розглядається модель Блека-Шоулса, модифікована з метою урахування стохастичної природи волатильності, яка спостерігається на реальних фінансових ринках. Для волатильності, заданої функцією від процесу Орнштейна-Уленбека, встановлено існування еквівалентної мартингальної міри на ринку. Досліджено питання безарбітражності у контексті [1]. Отримано аналітичний вираз для ціни Європейського опціону відносно мінімальної мартингальної міри (див. [1]) для випадку, коли процеси, які задають еволюцію ціни активу та волатильність, є некорельованими. У процесі отримання явного виразу для ціни опціону застосовується обернене перетворення Фур'є характеристичної функції та використовується гаусовість процесу Орнштейна-Уленбека.

Розглядаємо модель ринку, яка задається стохастичними диференціальними рівняннями:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t, \quad (1)$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + k dW_t, \quad (2)$$

та виконані припущення (A1)-(A3) з [3] (додатність коефіцієнтів, корельованість процесів Вінера B , W , квадратична інтегровність та віддаленість від нуля функції σ).

Теорема 1. *Модель ринку, задана рівняннями (1)–(2) з припущеннями (A1)–(A3), є безарбітражною у сенсі $\overline{NA}_+$ та $\overline{NA}_g$ (див. [1])*

Теорема 2. *Розглянемо модель (1)–(2) у випадку некорельованих процесів Вінера. Нехай $\mathbb{Q}$ – мінімальна мартингальна міра, V_0 – ціна Європейського опціону типу call, та функція щільності в.в. $\bar{\sigma}_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(Y_s) ds$ є кусково-неперервною на $\mathbb{R}$. Тоді має місце наступне зображення:*

1) для $\ln(S/K) + rT \geq 0$ і $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$:

$$\begin{aligned} V_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bigg(& S e^{rT} \left(\Phi(k) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_k^\infty \left(\int_{-\infty}^{\sigma_1^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}) \phi(u) du dy + \int_{\sigma_2^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy \right) e^{-s^2/2} ds \right) \right) \\ & - K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\sigma_4^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-\infty}^0 \int_{\sigma_4^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right) \right) \bigg); \end{aligned}$$

2) для $\ln(S/K) + rT < 0$ і $l = \sqrt{-2(\ln(S/K) + rT)}$ V_0 задається аналогічно до п.1),

де $\phi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{iu\bar{\sigma}_0^2})$ – характеристична функція випадкової величини $\bar{\sigma}_0^2$; $\sigma_i = \sigma_i(s)$, $i = \overline{1, 4}$ – невідповідні функції, визначені у [3], S – ціна акції у початковий момент часу.

- [1] F. Delbaen and W. Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage* (2006), Springer Finance, New York, USA
- [2] Föllmer, H. and Schweizer, M., *Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information*, Applied Stochastic Analysis, **5** (1991), 389-414.
- [3] S. Kuchuk-Iatsenko and Y. Mishura, *Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Exact formulas*, Modern Stoch. Theory Appl., **2(3)** (2015), 233-249.
- [4] E.M. Stein and J.C. Stein, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, The Review of Financial Studies, **4(4)** (1991), 727-752.
- [5] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou and K.R. Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility* (2000), Cambridge University Press, USA

Асимптотична поведінка автомоделних дробових випадкових полів

МАКОГІН В. І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
makoginv@ukr.net

Одним із узагальнень автомоделних процесів на багатопараметричний випадок є анізотропні автомоделні випадкові поля.

Означення 1. Дійснозначне випадкове поле $\{X(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N\}$ є анізотропним автомоделним з індексом $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_N) \in (0, +\infty)^N$, якщо для будь-якого $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in (0, +\infty)^N$

$$\{X(a_1 t_1, \dots, a_N t_N), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N\} \stackrel{d}{=} \{a_1^{H_1} \dots a_N^{H_N} X(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N\}.$$

Дробовий броунівський рух є прикладом гауссівського автомоделного процесу, а його аналог для випадкових полів задано наступним означенням.

Означення 2. Дійснозначним анізотропним дробовим броунівським полем з індексом Хюрста $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_N)$, $0 < H_i < 1, i = \overline{1, N}$ називається центроване гауссівське автомоделне поле $B^{\mathbf{H}} = \{B^{\mathbf{H}}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^N\}$ з коваріаційною функцією

$$E(B^{\mathbf{H}}(\mathbf{t})B^{\mathbf{H}}(\mathbf{s})) = 2^{-N} \prod_{i=1}^N (t_i^{2H_i} + s_i^{2H_i} - |t_i - s_i|^{2H_i}), \quad \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^N.$$

Це поле зберігає властивості дробового броунівського руху. А саме, воно є анізотропним автомодельним за означенням 1 та має стаціонарні прирости на прямокутниках.

У статті [3] доведено, що існують такі гауссівські автомодельні випадкові поля, що мають стаціонарні прирости на прямокутниках і розподіли яких не співпадають з розподілами анізотропного дробового броунівського поля. Зокрема, для полів з індексом $\mathbf{H} = (0.5, 0.5)$ наведено наступний результат.

Твердження 3. *Прирости на прямокутниках гауссівського автомодельного поля X з індексом автомодельності $\mathbf{H} = (0.5, 0.5)$ та коваріаційною функцією*

$$EX(\mathbf{t})X(\mathbf{s}) = (t_1 \wedge s_1)(t_2 \wedge s_2) \left(1 + \frac{\theta}{4} \frac{t_1 - s_1}{t_1 \vee s_1} \frac{t_2 - s_2}{t_2 \vee s_2} \right) \quad (1)$$

є стаціонарними, але не незалежними.

Також у доповіді наведено твердження, що характеризує наявність стаціонарних приростів автомодельного поля в термінах коваріаційної функції відповідного стаціонарного поля з перетворення Ламперті. Доведено закон нуля та одиниці для полів з ергодичним масштабним перетворенням, траєкторії яких нормовані нижніми та верхніми монотонними обмежувальними функціями. Доведено сильні граничні теореми для анізотропних автомодельних полів. Отримано такі граничні теореми для гауссівських полів.

Досліджено збіжність інтегрального функціоналу типу середнього від d -вимірного N -параметричного анізотропного дробового броунівського поля. Доведено збіжність нормованого інтегрального функціоналу від d -вимірного N -параметричного анізотропного автомодельного поля до локального часу у припущенні, що його неперервний локальний час існує.

- [1] В. Макогін, *Асимптотичні властивості інтегральних функціоналів від дробових броунівських полів*, Теорія Ймовірностей та Математична Статистика, **91** (2014), 97–106.
- [2] V. Makogin, Yu. Mishura, *Strong limit theorems for anisotropic self-similar fields*, Modern Stochastics: Theory and Applications, **1**(1) (2014), 73–93.
- [3] V. Makogin, Yu. Mishura, *Example of a Gaussian Self-Similar Field With Stationary Rectangular Increments That Is Not a Fractional Brownian Sheet*, Stochastic Analysis and Applications, **33**(3) (2015), 413–428.

Простори Орліча випадкових величин та простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

КОЗАЧЕНКО Ю. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
ykoz@ukr.net

МЛАВЕЦЬ Ю. Ю.

ДВНЗ “Ужгородський національний університет”
yura-mlavec@ukr.net

СИНЯВСЬКА О. О.

ДВНЗ “Ужгородський національний університет”
olja_sunjavska@ukr.net

Розглядається C -функція Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \leq x_\alpha; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \quad (1)$$

де $x_\alpha = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ – простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Теорема 1. Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана у вигляді (1), містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, причому норми в цих просторах – еквівалентні та мають місце нерівності:

$$\|\xi\|_U \leq C_{\psi U} \|\xi\|_\psi, \|\xi\|_U \geq C_{U\psi} \|\xi\|_\psi,$$

$$\text{де } C_{\psi U} = e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}, C_{U\psi} = \frac{1}{2^{1/\alpha}} (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha}.$$

Теорема 2. Для простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задана у вигляді (1), справджується умова **Н** із константою

$$C_U = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{C_{\psi U}}{C_{U\psi}}\right)^2.$$

Встановлюється зв'язок між просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і просторами Орліча. Знаходяться умови при яких для досліджуваного простору Орліча виконується умова **Н**.

- [1] Ю. Млавець, *Зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $F_\psi(\Omega)$* , Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ., **25** (1) (2014), 77–84.

Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей

Моклячук М. П.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
mmp@univ.kiev.ua

Сідей М. І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
marysidei4@gmail.com

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j)$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$, де $\eta(j)$ – некорельована з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність. За умови, що спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі, застосовано метод проєкцій у гільбертових просторах [1] та знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала [3]. У вигляді наслідку розглянута задача для стаціонарної послідовності, що спостерігається без шуму [4]. У випадку, коли вигляд спектральних щільностей невідомий, але задані множини допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод оцінювання [2]. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

- [1] А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей* / А.Н. Колмогоров, “Наука”, Москва, 1986.

- [2] М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, ВПЦ “Київський університет”, Київ, 2008.
- [3] М. П. Моклячук, М. І. Сідей, *Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом*, Теорія Ймовірностей та Математична Статистика, **93** (2015), 143–156.
- [4] Mikhail Moklyachuk, Maria Sidei, *Interpolation Problem for Stationary Sequences with Missing Observations*, Statistics, Optimization & Information Computing, **3** (3) (2015), 259–275.

Аналог теореми Беррі-Ессена для функціоналів від слабо ергодичних Марковських процесів

МОЛИБОГА Г. М.

Інститут математики НАН України

St.George.Molyboga@gmail.com

Нехай X - однорідний Марковський процес, який є слабо ергодичним; тобто, його перехідні ймовірності слабо збігаються до єдиного інваріантного розподілу. Розглянемо суми вигляду $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n A(X_k)$. Доводиться, що при відповідних умовах на слабку ергодичність, рівномірна оцінка на швидкість збіжності Y_n до нормального розподілу є $O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^{1/4}}\right)$.

Метод доведення є узагальненням представленого в [1].

- [1] A.Yu. Veretennikov, A.M. Kulik, *Diffusion approximation of systems with weakly ergodic Markov perturbations. I, II*, Probability theory and mathematical statistics, **Vol. 87** (2012) 12 – 27; **Vol. 88** (2013), 1 – 16.

Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу

МУНЧАК Є. Ю.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
yevheniamunchak@gmail.com

МІШУРА Ю. С.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
myus@univ.kiev.ua

Досліджується послідовність фінансових ринків з дискретним часом в схемі серій. Нехай $\{r_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ – сукупність невід’ємних чисел, яку будемо трактувати як послідовні відсоткові ставки, $\{R_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ – однаково розподілені випадкові величини, незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n, b_n]$, $E R_n^k = \mu_n$, $\text{Var } R_n^k = \sigma_n^2$. В роботі [2] встановлюється, що фінансовий ринок в n -й серії буде безарбітражним, якщо виконується одна з трьох умов: $r_n = \mu_n$, $\mu_n - \frac{(\sigma_n)^2}{b_n - \mu_n^k} < r_n < \mu_n$, $\mu_n < r_n < \mu_n + \frac{(\sigma_n)^2}{\mu_n - a_n}$.

Розглядається: а) випадковий процес з дискретним часом $X_n(t) = S_n^0 \prod_{k=1}^{[nt]} \frac{1+R_n^k}{1+r_n^k}$, $t_n^k \leq t \leq t_n^{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$, де $[a]$ – ціла частина числа a , $\prod_{k=1}^0 = 1$, причому в кожній серії $r_n^k = \frac{r}{n}$, де $r > 0$ – деяке число; б) опціони купівлі $\mathbb{C} = (S - K)^+$ та продажу $\mathbb{P} = (K - S)^+$ на актив S і зі страйковою ціною K ; в) дограничні ринки в умовах описаних вище і граничний ринок Блека–Шоулса.

Нехай $\pi(\mathbb{C}_n) = E_{P_n^*} \left(X_n(T) - K \left(1 + \frac{rT}{n} \right)^{-n} \right)^+$ – дискontована справедлива ціна опціона купівлі в дограничній моделі відносно мартингальної міри заданої рівностями $\frac{dP_n^*}{dP_n} = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M_n^k)$, де $\{M_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ – деякий $\mathcal{F}_n$ -мартингал, $\Delta M_n^k = \frac{r_n - \mu_n}{(\sigma_n)^2} (R_n^k - \mu_n)$ і $\pi(\mathbb{C})$ – ціна Блека–Шоулса на опціон купівлі в момент T , зі страйковою ціною K , відсотковою ставкою r і дисперсією $(\sigma^*)^2$, а також відповідні ціни $\pi(P_n)$ та $\pi(P)$ опціони продажу.

Вважається, що послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leq k \leq n\}$ задовольняє умови теореми 5.2 з статті [2].

Теорема 1. *Має місце оцінка*

$$|\pi(\mathbb{C}_n) - \pi(\mathbb{C})| + |\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})| \leq \frac{C}{n}.$$

Для отримання такої оцінки швидкості збіжності застосовується результат статті [1], щодо швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів.

- [1] Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk, *The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments*, Modern Stochastics: Theory and Applications, **2** (2) (2015), 95–106.
- [2] Ю. Мішура, Є. Мунчак, *Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів*, Теорія ймовірностей і математична статистика, **92** (2015), 110–124.

Симетричний стійкий процес та задача про спряження

Осипчук М. М.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”

mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Нехай функція $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ є перетвореннями Фур’є функцій $(\Phi(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$. Розглянемо оператори, що діють на такі функції відповідно до правил ($c > 0$, $\alpha \in (1, 2]$)

$$\mathbf{A}\varphi(x) = -c \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha e^{i(x,\xi)} \Phi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbf{B}\varphi(x) = i \int_{\mathbb{R}^d} \xi |\xi|^{\alpha-2} e^{i(x,\xi)} \Phi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

за умови, що такі інтеграли визначені. Оператор $\mathbf{A}$ є твірним оператором симетричного стійкого процесу в $\mathbb{R}^d$ — однорідного процесу Маркова зі щільністю ймовірності переходу

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha} d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Нехай S — гіперплощина в $\mathbb{R}^d$, яка задається рівнянням $(x, \nu) = 0$ з деяким фіксованим одиничним вектором $\nu \in \mathbb{R}$.

В доповіді буде побудовано неперервну функцію $(G(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ таку, що для кожної обмеженої неперервної дійснозначної функції $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ функція

$$U(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) G(t, x, y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

задовольняє наступні вимоги (задача про спряження):

- (i) $\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}U(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \setminus S;$
- (ii) $U(0+, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d;$
- (iii) $(1 + q(x))\mathbf{B}_\nu U(t, x+) - (1 - q(x))\mathbf{B}_\nu U(t, x-) = 0, \quad t > 0, x \in S.$

Тут $\mathbf{B}_\nu = (\mathbf{B}, \nu)$, а оператори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ діють на функцію $U(t, x)$ за просторовою змінною x . В останній вимозі дійснозначна функція $(q(x))_{x \in S}$ — неперервна і обмежена.

Результати одержані у співпраці з професором Портенком М. І.

- [1] Osypchuk M. M., Portenko M. I. *One type of singular perturbations of a multi-dimensional stable process*, Theory of Stochastic Processes **19(35)** (2014), no. 2, 42–51.
- [2] Осипчук М. М., Портенко М. І. *Про потенціали простого шару для одного класу псевдо-диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн. **67** (2015), №11, 1556–1568.

Оцінки для розподілу супремуму випадкових полів з простору Орліча в нескінченній області

СЛИВКА-ТИЛИЩАК Г. І.

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

aslyvka@ukr.net

В роботі отримано оцінки для розподілу супремуму нормованих випадкових полів з простору Орліча в нескінченній області. Розглянуто приклад застосування отриманих оцінок до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики

Простори Орліча випадкових величин та випадкові процеси з просторів Орліча вивчаються в монографії Булдігіна В. В. та Козаченка Ю. В. [1]. Властивості випадкових процесів з просторів Орліча досліджуються у роботах Коно (1980) [3], Козаченка Ю. В. [5, 6].

Теорема 1. *Нехай $\{\xi(x, t), (x, t) \in V\}$, $V = [0; a] \times [0, +\infty)$ — сепарабельне випадкове поле з простору Орліча $L_U(x)$, де $U(x)$ задовольняє g -умову. Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$ — сім'я таких відрізків, що $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0, 1, \dots$ $V_k = [0; a] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup_k V_k = V$;
- 2) Існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \leq h \leq b_{k+1} - b_k\}$, $\sigma_k(0) = 0$, що на кожному V_k

$$\sup_{\substack{|x-x_1| \leq h \\ |t-t_1| \leq h \\ (x,t), (x_1,t) \in V_k}} \|\xi(x, t) - \xi(x_1, t_1)\|_{L_U} \leq \sigma_k(h);$$

- 3) Для деякого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du;$$

- 4) $c = \{c(t), t \in R\}$ — деяка неперервна функція така, що

$$c(t) > 0, t \in R, c_k = \sup_{t \in [b_k, b_{k+1}]} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf_{t \in [b_k, b_{k+1}]} c(t)};$$

5) (x_0, t_{0k}) — деяка точка з V_k , z_0 , K , A — константи з означення C -функції;

$$B(x_0, t_{0k}, \theta) = \|\xi(x_0, t_{0k})\|_{L_U} + \\ + \frac{C_U}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\omega_{0k}\theta} U^{(-1)} \left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du,$$

де $\omega_{0k} = \sigma_k(\max(|x - x_o|, |t_{0k} - t_k|))$, $C_U = k(1 + U(z_0)) \times \max(1, A)$, $0 < \theta < 1$; для деякого $\delta > z_0 \max_{k \in Z} c_k B(x_0, t_{0k}, \theta)$ збігається ряд

$$\sum_{k \in Z} \left(U \left(\frac{\delta}{c_k B(x_0, t_{0k}, \theta)} \right) \right)^{-1}.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \geq K\delta z_0$ має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{(x,t) \in V} \frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{\delta K} \right) \right)^{-1} \cdot A \cdot \sum_{k \in Z} \left(U \left(\frac{\delta}{c_k B(x_0, t_{0k}, \theta)} \right) \right)^{-1}.$$

Результати викладені в роботі можуть бути використані при моделюванні розв'язків задач математичної фізики та в інших областях, де використовують методи теорії випадкових процесів.

- [1] Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric Characterization of Random Variables and Random processes . — American Mathematical Society, Providence, Rhode. — 2000. — 289 p.
- [2] Kozachenko Yu. V., Slyuka-Tylyshchak A. I. On the increase rate of random fields from space $Sub_\varphi(\Omega)$ on unbounded domains // Statistics, optimization and information computing. — June 2014. — Vol. 2. — P. 79–92.
- [3] Kono N. Sample path properties of stochastic processes // J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — 20, № 2. — P. 295–313.
- [4] Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. Випадкові процеси з просторів Орліча — Чернівці: Видавництво «Золоті литаври», 2011. — 212 с.
- [5] Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича I // Теория вероятн. и мат. статист. — 1984. — Вып. 30. — С. 92–107.

- [6] Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича II // Теория вероятн. и мат. статист. – 1984. – Вып. 31. – С. 44-50.

Гранична теорема для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь

ТАНЦЮРА М. В.

Інститут математики НАН України

mtan@meta.ua

Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k^n(t) = a(X_k^n(t), \mu^n(t))dt + dw_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k^n(t)}, \\ \mu^n(0) = \frac{1}{n} \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, a є неперервною вимірною функцією що задовольняє умову скінченності радіусу взаємодії, w_k є незалежними вінерівськими процесами, міра μ_n це незалежна від вінерівських процесів пуасонівська точкова міра з інтенсивністю $nm(dx)$. Припустимо, що міра m є локально скінченною і

$$\exists C > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \geq \alpha : m([\alpha, \beta]) \leq C(\beta - \alpha + 1).$$

Доведено, що існує границя послідовності мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ при $n \rightarrow \infty$. Більш того, граничний мірозначний процес однозначно визначається з наступної системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = \mathbb{E}(m \circ X(\cdot, t)^{-1}), \\ X(u, 0) = u, u \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Про визначення оптимальної страхової ставки

ЧОРНИЙ Р. О.

Львівський національний університет імені Івана Франка
rostykchorny@gmail.com

КІНАШ О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка
okinasch@yahoo.com

Будемо вважати, що кількість договорів страхування N , які знаходяться в страховому портфелі, є випадковою величиною. Кожному договору страхування з номером j ставиться у відповідність величина S_j , яку називаємо страховою сумою. Незай Y_j - величина позову за j -м договором. Очевидно, що $Y_j \leq S_j$. Введемо $X_j = \frac{Y_j}{S_j}$. Випадкову величину X_j назвемо відносним позовом (позовом, що розрахований на одиницю страхової суми).

Будемо також вважати, що випадкові величини X_j та S_j - незалежні. Зауважимо, що в цьому полягає суть F-моделі [1]. Зрозуміло, що величина позову може бути представлена у вигляді

$$Y_j = X_j * S_j \quad (1)$$

Позови, які задовольняють умову (1) назвемо факторизованими [1].

Припустимо, також, що для кожного договору страхування страхова премія Z_j визначається

$$Z_j = z * S_j,$$

де z - деяка стала для всіх договорів страхування (страхова ставка). Зауважимо, що в розглянутій моделі премії є випадковими величинами, що залежать від S_j , що і відрізняє її від класичних постановок задачі.

Будемо вважати, що всі позови факторизовані, випадкові вектори (S_j, X_j) і випадкова величина N незалежні в сукупності. Сума премій зібраних по страховому портфелю рівна

$$\bar{Z} = \sum_{j=1}^N Z_j,$$

сума позовів рівна

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Якщо початковий капітал рівний u_0 , то кінцевий страховий фонд рівний

$$U = u_0 + \bar{Z} - \bar{Y} \quad (2)$$

Перша задача пов'язана з моделлю (2) є задача вивчення асимптотики розподілу випадкової величини U при відомій величині страхової ставки z .

Друга задача - визначення такого мінімального значення z , при якому результати страхової діяльності по даному портфелю є прийнятними для страховика.

Для визначення страхової ставки z введемо наступні умови :

$$z \geq EX_j; \quad (3)$$

(умова "середньої беззбитковості")

$$P(U \geq 0) \geq Q, \quad (4)$$

де Q - деяке наперед задане число ($0 < Q < 1$), (умова "кінцевого небанкрутства").

Якщо ставка страхової премії z забезпечує виконання умов (3) і (4) будемо називати її "достатньою". Через z_0 позначимо точну нижню грань величини z , таку величину будемо називати оптимальною страховою ставкою.

Розглянуто приклади визначення z_0 за різних умов.

- [1] Королев В.Ю. *Математические основы теории риска* / В.Ю. Королев, В.Е.Бенинг, С.Я. Шоргин . - М.:Физматлит, 2011. - 620 с.

Remark about bounded L -index in direction $\mathbf{b}$ of function $\cos \sqrt{z_1 z_2}$

BANDURA A. I.

Ivano-Frankivsk national technical university of oil and gas
andriykopanytsia@gmail.com

We use definitions and denotations from [1].

Recently [2] we proved that an entire function $F(z_1, z_2) = \cos \sqrt{z_1 z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z_1 z_2)^n}{(2n)!}$ is of unbounded index in each direction $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$. But $F(z_1^0 + b_1 t, z_2^0 + b_2 t)$ is of bounded index for every given $z_1^0, z_2^0 \in \mathbb{C}$ as a function of variable $t \in \mathbb{C}$. It was a generalization of our previous result for direction $(1, 1)$ [3]. At a scientific seminar in Lviv University prof. Kondratyuk A. A. raised the question (2007):

What is a positive continuous function $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ providing a bounded L -index in the direction $\mathbf{b}$ of function $\cos \sqrt{z_1 z_2}$?

Using Skaskiv's idea from [3], we give an answer to Kondratyuk's question in the following theorem.

Theorem 1. *Let $\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon(z_1, z_2) = \begin{cases} |b_1 \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} + b_2 \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}| + 1, & |z_1 z_2| > \varepsilon^2, \\ \frac{|b_1 z_2 + b_2 z_1|}{\varepsilon} + 1, & |z_1 z_2| \leq \varepsilon^2. \end{cases}$*

Then $L_\varepsilon \in Q_{\mathbf{b}}^2$ and $F(z_1, z_2) = \cos \sqrt{z_1 z_2}$ is of bounded L_ε -index in each direction $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

- [1] A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, *Entire functions of bounded L -index in direction*, Mat. Stud., **27** (1) (2007), 30–52 (in Ukrainian).
- [2] A.I. Bandura, *Entire function of unbounded index in any real direction*, Precarpathian bulletin SSS, **1(29)** (2015), 24–30.
- [3] A.I. Bandura, O.B. Skaskiv, *Entire functions of bounded and unbounded index in direction*, Mat. Stud., **27** (2) (2007), 211–215 (in Ukrainian).

Про збіжність періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

БУБНЯК М. М.

Тернопільський національний економічний університет
mariabubnyak@gmail.com

ВОЗНЯК О. Г.

Тернопільський національний економічний університет
olvoz@ukr.net

Об'єктом дослідження є $\vec{p}$ -періодичні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду, який одержуємо з ГЛД спеціального вигляду

$$\left(1 + \mathop{\mathfrak{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \quad (1)$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : 1 \leq i_p \leq i_{p-1}; p \geq 1; i_0 = N\}$, N – фіксоване натуральне число. Дріб (1) назвемо $\vec{p}$ -періодичним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду, де $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_j \in \mathbb{N}$; $j = \overline{1, N}$, якщо при кожному фіксованому i_m всі $i(m)$ -ті вітки є однаковими і p_{i_m} -періодичними неперервними дробами. Тоді елементи дроби (1) задовольняють умови

$$\underbrace{a r \dots r}_q = \underbrace{a r \dots r}_s, \quad q \geq 1;$$

$$a_{i(m)} \underbrace{r \dots r}_q = \underbrace{a r \dots r}_s, \quad m \geq 1; i(m) \in \mathcal{I}; r < i_m;$$

де $q = np_r + s$; $r = \overline{1, N}$; $s = \overline{1, p_r}$; $n \geq 0$. Позначимо $\underbrace{a r \dots r}_s = c_{r,s}$. Тоді $\vec{p}$ -періодичний ГЛД можна записати у вигляді

$$\left(1 + \mathop{\mathfrak{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}, \quad c_{q,j} \in \mathbb{C}, \quad q = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, p_q}. \quad (2)$$

Проведено дослідження поточної та рівномірної збіжності дробів (2). При накладанні додаткових умов встановлено оцінки похибки апроксимації підхідними дробами ГЛД (2).

Для 1-періодичного ГЛД ($p_j = 1, j = \overline{1, N}$) встановлена поточкова збіжність у кругових, кутових та параболічних областях; рівномірна збіжність – на компактах цих областей; необхідна умова збіжності.

Для загальних є $\vec{p}$ -періодичних ГЛД (2) доведена рівномірна збіжність на компактах деяких овальних областей.

Властивості фундаментальної матриці розв’язків задачі Коші для систем рівнянь Колмогорова-Ейделямана

БУРТНЯК І. В.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
bvanya@meta.ua

МАЛИЦЬКА Г. П.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

Ми розглядаємо таку задачу Коші

$$\partial_t u_\nu(t, x) - \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^{n_j} x_{js} \partial_{x_{j+1s}} u_\nu(t, x) = \sum_{\mu=1}^{n_0} \sum_{\substack{|k_j| \\ 2b_j \leq 1}} A_{k\mu}(t) D_{x_1}^k u_\mu(t, x), \quad (1)$$

$$\nu = \overline{1, n_0}, n_0 \in \mathbb{N},$$

$$u(t, x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad t \in (t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

$$n = \sum_{j=1}^4 n_j, \quad n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \quad n_j \in \mathbb{N} \cup 0, \quad j = 2, 3, 4. \quad x = (x_1, \dots, x_4), \quad b_j \in \mathbb{N}, \quad k = (k_1, \dots, k_4), \quad k_j \in \mathbb{N} \cup 0, \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_4).$$

$$\partial_t u = \sum_{\substack{k_1 \\ 2b_1} + \dots + \frac{k_4}{2b_4}} A_{k\mu}(t) D_{x_1}^k - 2\vec{b} - \text{параболічна система за С.Д. Ейделя-}$$

маном в смузі $(t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 \leq T, A_k(t) \in \mathbb{C}[t_0, T]$. Відповідна двоїста задача Коші до (1), (2)

$$\partial_t v_\nu(t, \xi) - \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^{n_j} \xi_{j+1s} \partial_{\xi_{js}} v_\nu(t, \xi) = \sum_{\mu=1}^{n_0} \sum_{\substack{|k_j| \\ 2b_j \leq 1}} A_{k\mu}(t) (i\xi_1)^k v_\mu(t, \xi), \quad (3)$$

$$u(t, \xi)|_{t=t_0} = v_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

така, що матриця $(\sum A_{k\mu}(i\xi)^k)$ для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, T]$ на характеристиках системи (3) задовольняє умову Лаппо-Данилевського.

Використовуючи перетворення Фур'є, метод характеристик та властивості аналітичних функцій в просторах S , встановлено існування, єдиність та основні властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФРЗК) (1), (2) зокрема аналітичність при $t > t_0$, дельта подібну поведінку при $t \rightarrow t_0$, $x \rightarrow x_0$ нормальність формули згортки для зображення розв'язку (1), (2), встановлено оцінки похідних ФРЗК.

Fourier coefficients associated with the Riemann zeta-function

BASIUK Y. V.

Ivan Franko Lviv National University
yuliya.basyuk.92@mail.ru

TARASYUK S. I.

Ivan Franko Lviv National University
svt.tarasyuk@gmail.com

In the present work we study the behavior of the Riemann zeta - function on the critical line. It is known that the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \log |\zeta(\frac{1}{2} + it)| dt$, where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta-function, diverges.

Earlier M. Balazard, E. Saias, M. Yor [1] summed $\log |\zeta(s)|$ on the critical line with the kernel $1/|s|^2$, and A. Kondratyuk, P. Yatsulka [2] summed it with the kernel $1/|s|^4$.

The summation of $\log |\zeta(s)|$ with the kernel $1/|s|^6$ on the critical line $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ is the main result of our investigation.

First we consider Fourier coefficients associated with the Riemann zeta-function. We obtain the expression for the second Fourier coefficient of $\log |f(e^{i\theta})|$:

$$c_{-2}(1, f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} \log \left| \zeta \left(\frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right) \right| d\theta.$$

Using the method of Fourier series for the function $f(z) = (s-1) \zeta(s) = \frac{z}{1-z} \zeta \left(\frac{1}{1-z} \right)$, $|z| < 1$, we proved the following theorem.

Теорема 1. Let $\{\rho_j\}$ be the sequence of non-trivial zeroes of $\zeta(s)$. Then

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{Re\ s=\frac{1}{2}} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^6} |ds| &= \frac{7}{2} - 4\gamma + \frac{\gamma_1 - \gamma^2}{2} + 6 \sum_{Re\ \rho_j > \frac{1}{2}} \log \left| \frac{\rho_j}{1 - \rho_j} \right| + \\ &+ 4 \sum_{Re\ \rho_j > \frac{1}{2}} \frac{(|\rho_j|^2 - Re\rho_j)(2Re\rho_j - 1)}{|\rho_j(\rho_j - 1)|^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{Re\ \rho_j > \frac{1}{2}} \frac{Re(|\rho_j|^2 - \bar{\rho}_j)^2(2Re\rho_j - 1)(2|\rho_j|^2 - 2Re\rho_j + 1)}{|\rho_j(\rho_j - 1)|^4}, \end{aligned} \quad (1)$$

where γ is the Euler constant,

$$\gamma_1 = - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \leq N} \frac{1}{m} \log m - \frac{\log^2 N}{2} \right).$$

Also we obtain a new restatement of the Riemann Hypothesis.

Теорема 2. The Riemann Hypothesis holds if and only if

$$\frac{1}{2\pi} \int_{Re\ s=\frac{1}{2}} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^6} |ds| = \frac{7}{2} - 4\gamma + \frac{\gamma_1 - \gamma^2}{2}. \quad (2)$$

- [1] Balazard M. *Notes sur la fonction ζ de Riemann*, 2/ M. Balazard, E.Saias, M. Yor// Advances in Mathematics. – 1999. – Vol. 143. – P. 284 – 287.
- [2] Kondratyuk A. *Summation of the Riemann zeta-function logarithm on the critical line*/ A. Kondratyuk, P. Yatsulka// Voronoï's impact on modern science: proceeding of the fourth international conference on analytic number theory and spatial fessellations, September 22 - 28, 2008. – Kyiv, 2008. – P. 59 – 63.

Оцінки на мінімальні відхилення від 0 та ∞ мероморфної в проколеній площині функції з малою кількістю нулів та полюсів

БЕРЕЗА О. Ю.

Львівський національний університет імені Івана Франка
berezalesya@gmail.com

ХРИСТИЯНИН А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка
khrystiyanyn@ukr.net

Для мероморфної в проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функції f , $f \not\equiv 0$ позначимо $N_0(r, f) = \int_1^r \frac{n_0(t, f)}{t} dt$, $r \geq 1$, де $n_0(t, f)$ – лічильна функція полюсів функції f в кільці $\{z : \frac{1}{t} \leq |z| \leq t\}$, $t \geq 1$. Характеристика $T_0(r, f)$ типу Неванлінни для функцій f , мероморфних в $\mathbb{C}^*$ була введена у [1]. Порядком ρ функції f називається порядок зростання її характеристики $T_0(r, f)$ [2].

Нехай

$$\kappa_0(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)}{T_0(r, f)}$$

а також

$$\beta_0(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f) + \ln^+ M(\frac{1}{r}, a, f)}{T_0(r, f)}, \quad a \in \overline{\mathbb{C}},$$

де

$$M(t, a, f) = \max_{|z|=t} \frac{1}{|f(z) - a|} \quad \text{при } a \in \mathbb{C}, \quad M(t, \infty, f) = \max_{|z|=t} |f(z)|.$$

Дефект $\delta_0(a, f)$ функції f для значення $a \in \overline{\mathbb{C}}$ визначається наступним чином ([3], [2]) :

$$\delta_0(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_0(r, \frac{1}{f-a})}{T_0(r, f)} \quad \text{при } a \in \mathbb{C}, \quad \delta_0(\infty, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_0(r, f)}{T_0(r, f)}.$$

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geq 1$. Тоді для $a = 0, \infty$ має місце оцінка*

$$\beta_0(a, f) \leq \pi + \kappa_0(f)K(1 + \rho) \ln(1 + \rho),$$

де K – деяка стала.

Теорема 2. *Нехай f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geq 1$. Якщо $\sum_a \delta_0(a, f) = 2$ то $\beta_0(\infty, f) \leq \pi$.*

- [1] A. Khrystiyanyan, A. Kondratyuk *On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I*, Mat. Stud., **23** (2005), p. 19–30.
- [2] A. Kondratyuk, I. Laine, *Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series method in complex analysis* (Merkijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., **10** (2006), p. 9–111.
- [3] A. Khrystiyanyan, A. Kondratyuk, *On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II*, Mat. Stud., **24** (2005), p. 57–68.

Оцінки мінорів вронскіана фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння з параметром

БОВИК І. О.

Національний університет „Львівська політехніка“
igor.bobyk@gmail.com

СИМОТЮК М. М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net

Нехай $n, p \in \mathbb{N}$; $A_j(\xi)$, $j = \overline{1, 2n}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$, — многочлен змінних $\xi_1, \dots, \xi_p$ степеня $(2n - j)$, $L(\lambda, \xi) = \lambda^{2n} + \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j}(\xi) \lambda^j$; $f_q(t, k)$, $q = \overline{1, 2n}$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, — такий розв'язок диференціального рівняння $L(d/dt, k)y(t) = 0$ з параметром k , що $f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,q}$, $j = \overline{1, 2n}$, де $\delta_{j,q}$ — символ Кронекера; $V(t, k) = \det \|f_{n+q}^{(j-1)}(t, k)\|_{j,q=1}^n$. Визначник $V(t, k)$ є мінором n -го порядку вронскіана $\det \|f_q^{(j-1)}(t, k)\|_{j,q=1}^{2n}$ системи розв'язків $f_1(t, k), \dots, f_{2n}(t, k)$, що відповідає викресленню першим n стовпцям та останнім n рядкам. Нехай $\Lambda(k) = \min\{\operatorname{Re} \lambda : L(\lambda, k) = 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $M = -\min\{0; \inf_{k \in \mathbb{Z}^p} \Lambda(k)/(1 + |k|)\}$.

За допомогою метричного підходу [1, 2] встановлено такий результат.

Теорема 1. Для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t > 0$ оцінка

$$|V(t, k)| \geq (1 + |k|)^{-\omega} \exp(-\delta t |k|), \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|,$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > (p + 1)(\xi - 1) + (n^2 + 1)$, $\delta \geq nM$, де $\xi \geq C_{2n}^n(n^2 - n + 1)$.

Теорему 1 можна застосувати для оцінок знизу малих знаменників, які виникають при дослідженні розв'язності задач з двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними.

Отримані результати є продовженням досліджень праць [1, 2].

- [1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
- [2] Пташник Б.Й., Лыків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

БОДНАР Д. І.

Тернопільський національний економічний університет
bodnar4755@ukr.net

БІЛАНІК І.

Тернопільський національний педагогічний університет
irena_bilan@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) спеціального вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{1}, \quad (1)$$

де $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_k : 1 \leq i_k \leq i_{k-1}; k \geq 1; i_0 = N\}$, N – фіксоване натуральне число.

Нехай задано вектор вагових коефіцієнтів $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, $\sum_{j=1}^N v_j < 1$.

Теорема 1. *Нехай елементи дробу (1) належать параболічним областям, тобто $a_{i(k)} \in P_{i_k}(\gamma)$, $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$, де*

$$P_s(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\gamma}) < 2p_s \cos^2 \gamma\},$$

$-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, $p_s = v_s(1 - \sum_{j=1}^s v_j)$, $s = \overline{1, N}$. Тоді

1) ГЛД (1) збігається на будь-якому компактній області

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \dots \times \mathcal{P}_N;$$

2) областю значень цього дробу є круг

$$\mathcal{K} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{e^{-i\gamma}}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma} \right| < \frac{1}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma} \right\}.$$

Приведення матриць до канонічного вигляду оборотніми теплецевими матрицями

Бохонко В. В.

*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,
Україна*

linabokhonko@gmail.com

ЗАБАВСЬКИЙ Б. В.

*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,
Україна*

zabavskii@gmail.com

Під кільцем розуміємо асоціативне кільце R з 1 і $1 \neq 0$. Під правим (лівим) кільцем Безу розуміємо кільце, в якому довільний скінченнопо-роджений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу це кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу одночасно. Нехай R комутативне кільце Безу назовемо теплецевим, якщо для будь-яких $a, b \in R$ існує T — оборотна теплецева матриця така, що виконується $(a, b)T = (d, 0)$. Кільце R називається кільцем одиничного квадратного стабільного рангу 1, якщо з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує оборотний елемент t такий, що $a^2 + bt$ — оборотний елемент кільця R .

Теорема 1. *Нехай R — комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу 1. Тоді будь-яка матриця 2-го порядку над R діагоналізується оборотними теплецевими матрицями.*

Теорема 2. *Нехай R комутативне кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді:*

- 1) довільний унімодулярний рядок (стовпець) довжини над R доповняється до оборотної теплецевої матриці;*
- 2) довільна матриця порядку над R , шляхом домноження справа та зліва на оборотні теплецеві матриці приводиться до канонічного діагонального вигляду;*
- 3) довільна оборотна матриця порядку над кільцем R , розкладається у добуток оборотних теплецевих матриць.*

[1] B. V. Zabavsky, M. Y. Komarnytsky *Distributive elementary divisor domains* Ukr. Math. J., 1996

- [2] B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings* Mathematical Studies, Lviv, 2012.

Застосування ізометричності функціональних просторів з різним числом змінних в теорії наближення функцій

БУШЕВ Д. М.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

КАЛЬЧУК І. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

kalchuk_i@ukr.net

ФІЛОЗОВ Л. І.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

В статті [1] були побудовані простори дійсних функцій від $n + k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на n -вимірному евклідовому просторі. Оскільки ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних рідкісне явище, то доцільно розглянути її застосування. Наведемо приклади рівності основних апроксимаційних характеристик в ізометричних просторах.

Нехай φ — ізометричне і лінійне відображення лінійного нормованого простору X на лінійний нормований простір Y . Тоді віддаль між довільними елементами a і b простору X дорівнює віддалі між їх образами $\varphi(a)$ і $\varphi(b)$ в просторі $\varphi(X) = Y$, тобто

$$\rho_X(a, b) = \|a - b\|_X = \rho_Y(\varphi(a), \varphi(b)) = \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_Y, \quad \|a\|_X = \|\varphi(a)\|_Y. \quad (1)$$

Остання рівність випливає з лінійності відображення.

Нехай далі M і T — довільні множини простору X , $\varphi(M)$ і $\varphi(T)$ — їх ізометричні образи в просторі $\varphi(X)$, A — довільний лінійний оператор, який відображає простір X в підпростір $A(X) = U \subseteq X$, $A \circ \varphi$ — відповідний йому лінійний оператор, який відображає простір $\varphi(X)$ в підпростір $\varphi(U)$ так, що для кожного елемента $b \in X$

$$A(\varphi(b)) = \varphi(A(b)). \quad (2)$$

Позначимо через $\rho_X(b, A(b)) = \|b - A(b)\|_X$ віддаль між елементом $b \in X$ і його образом $A(b) \in U$, яку називають наближенням елемента b заданим лінійним оператором A , $\rho_Y(\varphi(b), A(\varphi(b))) = \|\varphi(b) - A(\varphi(b))\|_Y$; $\rho_X(a, T) = \inf_{u \in T} \rho_X(a, u) = \inf_{u \in T} \|a - u\|_X$ — віддаль від елемента $a \in X$ до множини $T \subset X$, яку називають найкращим наближенням елемента a елементами множини T , $\rho_Y(\varphi(a), \varphi(T)) = \inf_{\varphi(u) \in \varphi(T)} \rho_Y(\varphi(a), \varphi(u)) = \inf_{\varphi(u) \in \varphi(T)} \|\varphi(a) - \varphi(u)\|_Y$; $\rho_X(M, A(M)) = \sup_{a \in M} \rho_X(a, A(a))$ — віддаль між множиною $M \subset X$ і її образом $A(M)$, яку називають наближенням множини M заданим лінійним оператором A , $\rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M))) = \sup_{\varphi(a) \in \varphi(M)} \rho_Y(\varphi(a), A(\varphi(a)))$; $\rho_X(M, T) = \sup_{a \in M} \rho_X(a, T)$ — віддаль між множинами M і T , яку називають найкращим наближенням множини M елементами множини T , $\rho_Y(\varphi(M), \varphi(T)) = \sup_{\varphi(a) \in \varphi(M)} \rho_Y(\varphi(a), \varphi(T))$;

$L(X, U)$ — множина всіх лінійних операторів A , які відображають простір X в лінійний підпростір U , $L(\varphi(X), \varphi(U))$ — множина всіх лінійних операторів $A \circ \varphi$, які відображають простір $\varphi(X)$, ізометричний простору X , в підпростір $\varphi(U)$, ізометричний простору U , $\lambda(M, U)_X = \inf_{A \in L(X, U)} \rho_X(M, A(M))$ — найкраще лінійне наближення множини M лінійними операторами множини $L(X, U)$, $\lambda(\varphi(M), \varphi(U))_Y = \inf_{A \circ \varphi \in L(\varphi(X), \varphi(U))} \rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M)))$; $\{M_n\}$ — множина всіх лінійних підпросторів F_n розмірності не більше n простору X , $\{\varphi(M_n)\}$ — множина всіх лінійних підпросторів $\varphi(F_n)$ розмірності не більше n ізометричного образу простору X , $d_n(M)_X = \inf_{F_n \in \{M_n\}} \rho_X(M, F_n)$ — n -вимірний поперечник по Колмогорову множини M в просторі X , $d_n(\varphi(M))_Y = \inf_{\varphi(F_n) \in \{\varphi(M_n)\}} \rho_Y(\varphi(M), \varphi(F_n))$; $\lambda_n(M)_X = \inf_{F_n \in \{M_n\}} \lambda(M, F_n)_X$ — лінійний n поперечник множини M в просторі X , $\lambda_n(\varphi(M))_Y = \inf_{\varphi(F_n) \in \{\varphi(M_n)\}} \lambda(\varphi(M), \varphi(F_n))_Y$.

З рівностей (1), (2) і відповідних означень випливає рівність апроксимаційних характеристик для ізометричних елементів і ізометричних класів елементів з відповідних ізометричних просторів, а саме:

$$\rho_Y(\varphi(b), A(\varphi(b))) = \rho_X(b, A(b)), \quad (3)$$

$$\rho_Y(\varphi(a), \varphi(T)) = \rho_X(a, T), \quad \rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M))) = \rho_X(M, A(M)), \quad (4)$$

$$\lambda(\varphi(M), \varphi(U))_Y = \lambda(M, U)_X, \quad \rho_Y(\varphi(M), \varphi(T)) = \rho_X(M, T), \quad (5)$$

$$d_n(\varphi(M))_Y = d_n(M)_X, \quad \lambda_n(\varphi(M))_Y = \lambda_n(M)_X. \quad (6)$$

Якщо $u_0 \in T, a_0 \in M, a_1 \in M, u_1 \in T, A_0 \in L(X, U), F_n^0 \in \{M_n\}$ і $F_n^1 \in \{M_n\}$ — екстремальні елементи відповідно для величин $\rho_X(a, T) = \rho_X(a, u_0)$, $\rho_X(M, A(M)) = \rho_X(a_0, A(a_0))$, $\rho_X(M, T) = \rho_X(a_1, u_1)$, $\lambda(M, U)_X = \rho_X(M, A_0(M))$, $d_n(M)_X = \rho_X(M, F_n^0)$ і $\lambda_n(M)_X = \lambda(M, F_n^1)_X$, то з рівностей (1)–(6) випливає, що їх ізометричні образи $\varphi(u_0) \in \varphi(T)$, $\varphi(a_0) \in \varphi(M)$, $\varphi(a_1) \in \varphi(M)$, $\varphi(u_1) \in \varphi(T)$, $A_0 \circ \varphi \in L(\varphi(X), \varphi(U))$, $\varphi(F_n^0)$ і $\varphi(F_n^1)$ — екстремальні елементи відповідно для величин, записаних в лівих частинах рівностей (4)–(6).

Оскільки апроксимаційні характеристики для функцій і класів функцій найбільш повно досліджені в просторах дійсних функцій від однієї дійсної змінної, то будемо розглядати ізометричні відображення просторів дійсних функцій від $1 + m$ змінних, які побудовані в [1], на простори дійсних 2π -періодичних функцій від однієї змінної.

Нехай $\tilde{X}$ — один з просторів $\tilde{C}, \tilde{L}_\infty$ або $\tilde{L}_p$ ($1 \leq p < \infty$) дійсних 2π -періодичних функцій від однієї змінної, відповідно неперервних, істотно обмежених і вимірних з нормами $\|f\|_{\tilde{C}} = \sup_{x \in [0, 2\pi)} |f(x)|$,

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi)} |f(x)|$, $\|f\|_{\tilde{p}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$, $\tilde{X}M_m$ — лінійні нормовані простори функцій $f(x, \bar{y}) = f(x, y_1, \dots, y_m)$ 2π -періодичних по змінній x , які при кожному фіксованому $\bar{y} > \bar{0}$ належать відповідно просторам $\tilde{X}$ з нормами $\|f(x, \bar{y})\|_{\tilde{X}M_m} = \sup_{\bar{y} > \bar{0}} \|f(x, \bar{y})\|_{\tilde{X}}$, де нерівність $\bar{y} > \bar{0}$ означає, що

всі координати вектора $\bar{y}$ невід'ємні і хоча б одна з них додатна, $K_{\bar{y}^m}(x) = K(x, \bar{y})$ — дельтаподібне ядро (див. (10) з [1]) 2π -періодичне по змінній x з рядом Фур'є: $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{\bar{y}^m}(|k|) e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{\bar{y}^m}(k) \cos kx \right) \sim K_{\bar{y}^m}(x)$,

$\tilde{X} \supset F_{2n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) : a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$ — простір всіх тригонометричних поліномів степеня не вище $(n-1)$ з дійсними коефіцієнтами.

В [1] встановлено, що лінійний нормований простір $\tilde{X}$ ізометричний лінійному нормованому простору згортки простору $\tilde{X}$ з невід'ємними дельтаподібними ядрами $\{\tilde{X} * K_{\bar{y}^m}\}$ з нормою простору $\tilde{X}M_m$ і $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\} = \left\{ (T_{n-1} * K_{\bar{y}^m})(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{\bar{y}^m}(k) A_k(x) : (T_{n-1}(x) \in F_{2n-1}) \wedge (\bar{y} > \bar{0}) \right\}$ — ізометричний образ простору F_{2n-1} .

Позначимо через $U_n(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi} (\lambda_n * f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_n(t) f(x-t) dt$ — лінійний оператор з ядром $\lambda_n(t) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kt$, який відображає простір $\tilde{L}$ в підпростір F_{2n-1} , $U_n \circ K_{\bar{y}^m} = U_n * K_{\bar{y}^m}$ — відповідний його

му лінійний оператор (2), $U_n(\Lambda * K_{\bar{y}^m}, f)(x) = \frac{1}{\pi}((\lambda_n * K_{\bar{y}^m}) * f)(x)$, який відображає простори $\{\tilde{X} * K_{\bar{y}^m}\}$ (див. (14) з [1]) відповідно в підпростори $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}$. Якщо дельтаподібне ядро $K_{\bar{y}^m}(x)$ невід'ємне, то, в силу ізометричності просторів $\{\tilde{X} * K_{\bar{y}^m}\}$ і $\tilde{X}$, та їх підпросторів $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}$ і F_{2n-1} , з (2)–(6) одержимо

$$\|f * K_{\bar{y}^m} - U_n(\Lambda, f * K_{\bar{y}^m})\|_{\tilde{X}M_m} = \|f - U_n(\Lambda, f)\|_{\tilde{X}},$$

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{X}M_m}(\{M * K_{\bar{y}^m}\}, U_n(\Lambda, \{M * K_{\bar{y}^m}\})) &= \sup_{f \in M} \|f * K_{\bar{y}^m} - U_n(\Lambda, f * K_{\bar{y}^m})\|_{\tilde{X}M_m} = \\ &= \rho_{\tilde{X}}(M, U_n(\Lambda, \{M\})) = \sup_{f \in M} \|f - U_n(\Lambda, f)\|_{\tilde{X}}, \end{aligned}$$

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(f * K_{\bar{y}^m}, \{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}) = E_n(f * K_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}M_m} = \rho_{\tilde{X}}(f, F_{2n-1}) = E_n(f)_{\tilde{X}},$$

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(\{M * K_{\bar{y}^m}\}, \{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}) = E_n(\{M * K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m} = \rho_{\tilde{X}}(M, F_{2n-1}) = E_n(M)_{\tilde{X}},$$

$$\lambda(\{M * K_{\bar{y}^m}\}, \{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m} = \lambda(M, F_{2n-1})_{\tilde{X}},$$

$$d_n(\{M * K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m} = d_n(M)_{\tilde{X}}, \quad \lambda_n(\{M * K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m} = \lambda_n(M)_{\tilde{X}},$$

Позначимо через $D^{(k)}(f(x)) = f^{(k)}(x)$ оператор диференціювання, $D^{(k)} \circ K_{\bar{y}^m} = D^{(k)} * K_{\bar{y}^m}$ — відповідний йому лінійний оператор (2), тобто

$$D^{(k)}(f * K_{\bar{y}^m})(x) = (f^{(k)} * K_{\bar{y}^m})(x) = \frac{\partial^k (f * K_{\bar{y}^m})(x)}{\partial x^k}.$$

Відомо (див., напр., [2, с. 127]), що в просторі F_{2n-1} має місце нерівність Зигмунда, тобто $\|T_{n-1}^{(k)}(x)\|_{\tilde{X}} \leq (n-1)k \|T_{n-1}\|_{\tilde{X}}$. В силу ізометричності просторів F_{2n-1} і $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}$ маємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{(k)}(K_{\bar{y}^m} * T_{n-1})(x)}{\partial x^k} \right\|_{\tilde{X}M_m} &= \|T_{n-1}^{(k)} * K_{\bar{y}^m}\|_{\tilde{X}M_m} = \|T_{n-1}^{(k)}(x)\|_{\tilde{X}} \leq \\ &\leq (n-1)k \|(K_{\bar{y}^m} * T_{n-1})(x)\|_{\tilde{X}M_m}, \end{aligned}$$

тобто нерівність Зигмунда має місце в просторі $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\}$.

Позначимо через $M_1 = \{T_{n-1}(x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \cos(kx + \theta_k) : \rho_{n-1} = 1\}$ множину всіх тригонометричних поліномів степеня не вище $(n-1)$ з старшим коефіцієнтом $\rho_{n-1} = 1$. Тоді $\{M_1 * K_{\bar{y}^m}\} = \{(T_{n-1} * K_{\bar{y}^m})(x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{\bar{y}^m}(k) \rho_k \cos(kx + \theta_k) : \rho_{n-1} = 1\}$ — ізометричний образ M_1 .

Найменшу норму в просторі $\tilde{X}$ (див., напр., [2, с. 110-111]) серед поліномів множини M_1 має поліном $\cos((n-1)x + \theta_{n-1})$, тобто

$$\rho_{\tilde{X}}(0, M_1) = \inf_{T_{n-1} \in M_1} \|T_{n-1}\|_{\tilde{X}} = \|\cos((n-1)x + \theta_{n-1})\|_{\tilde{X}} = \|\cos x\|_{\tilde{X}}. \quad (7)$$

З (1) і (7) випливає, що найменшу норму в просторі $\tilde{X}M_m$ серед елементів множини $\{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}$ має елемент $\psi_{\bar{y}^m}(n-1) \cos((n-1)x + \theta_{n-1})$, тобто

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{X}M_m}(0, \{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}) &= \inf_{K_{\bar{y}^m} * T_{n-1} \in \{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}} \|K_{\bar{y}^m} * T_{n-1}\|_{\tilde{X}M_m} = \\ &= \|\psi_{\bar{y}^m}(n-1) \cos((n-1)x + \theta_{n-1})\|_{\tilde{X}M_m} = \|\cos x\|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

- [1] Бушев Д.М. *Изометричность функциональных пространств с разным числом переменных* // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 8. — С. 1027-1045.
- [2] Н.П. Корнейчук. В.Ф. Бабенко. А.А. Лигун. *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*. — К.: Наукова думка, 1992. — 304 с.

Про простори (p, q) -лінійних і (p, q) -однорідних відображень між комплексними лінійними просторами

ВАСИЛИШИН Т. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
taras.v.vasylyshyn@gmail.com

Для лінійних просторів E і F над тим самим полем позначимо $\mathcal{L}^n(E, F)$ простір всіх відображень з E^n в F , які є лінійними відносно кожного зі своїх аргументів (так званих n -лінійних відображень). Для комплексного лінійного простору X будемо позначати $X_{\mathbb{R}}$ простір із дійсною структурою. Простір $X_{\mathbb{R}}$ відрізняється від простору X тим, що в $X_{\mathbb{R}}$ не дозволено множення на скаляри з ненульовою уявною частиною. Нехай X і Y — комплексні лінійні простори, p і q — цілі невід'ємні числа. Будемо позначати $\mathcal{L}^{(p,q)}(X, Y)$ простір всіх відображень $f \in \mathcal{L}^{(p+q)}(X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}})$ таких, що $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{p+q}) = \lambda^p \bar{\lambda}^q f(x_1, \dots, x_{p+q})$ для всіх комплексних λ і для всіх $x_1, \dots, x_{p+q} \in X$. Назвемо елементи простору $\mathcal{L}^{(p,q)}(X, Y)$ (p, q) -однорідними відносно сукупності аргументів $(p+q)$ -лінійними в дійсному сенсі відображеннями.

В [1, Теорема 1.15] доведено, що простір $\mathcal{L}(^n X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}})$ є прямою сумою підпросторів $\mathcal{L}(^{k,n-k} X, Y)$, де k змінюється від 0 до n . З іншого боку, дослідженими є деякі властивості так званих (p, q) -лінійних відображень (див. [2, 3]), які є елементами вищезгаданих підпросторів. Відображення $f : X^{p+q} \rightarrow Y$ називають (p, q) -лінійним відображенням, якщо f є лінійним відносно перших p аргументів і антилінійним відносно решти q аргументів. Простір всіх (p, q) -лінійних відображень з X^{p+q} в Y позначимо $\mathcal{L}(^{p,q} X, Y)$. Простір $\tilde{\mathcal{L}}(^{p,q} X, Y)$ є підпростором $\mathcal{L}(^{p,q} X, Y)$

У даній роботі показано, що $\tilde{\mathcal{L}}(^{p,q} X, Y)$ є власним підпростором в $\mathcal{L}(^{p,q} X, Y)$ і побудовано проектор з $\mathcal{L}(^{p,q} X, Y)$ на $\tilde{\mathcal{L}}(^{p,q} X, Y)$.

- [1] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford – 1986. – 447 p.
- [2] T.V. Vasylyshyn, A.V. Zagorodnyuk, *Polarization formula for (p, q) -polynomials on a complex normed space*, *Methods of Functional Analysis and Topology*, **17** (1) (2011), 75–83.
- [3] Т.В. Василичин, А.В. Загороднюк, *Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p, q) -лінійних відображень*, *Карпат. мат. публ.*, **2** (1) (2009), 128–144.

Про симетричні $*$ -поліноми від двох комплексних змінних

ВАСИЛИШИН Т. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
taras.v.vasylyshyn@gmail.com

СТРУТИНСЬКИЙ М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
strutinski1991@gmail.com

Основна теорема про симетричні поліноми від скінченної кількості змінних стверджує, що кожен такий поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних поліномів. Природним узагальненням поліномів від комплексних змінних є $*$ -поліноми. $*$ -Поліном – це

відображення між комплексними лінійними просторами, яке є звуженням на діагональ сум відображень, які є лінійними по частині змінних і антилінійними по решті змінних. У даній роботі встановлено аналог основної теореми для симетричних $*$ -поліномів від двох комплексних змінних.

Теорема 1. *Кожен симетричний $*$ -поліном від двох комплексних змінних можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних $*$ -поліномів $\sigma_{10}(x, y) = x + y$, $\sigma_{01}(x, y) = \bar{x} + \bar{y}$, $\sigma_{20}(x, y) = xy$, $\sigma_{02}(x, y) = \bar{x}\bar{y}$, $\sigma_{11}(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y$.*

Оцінки групи відхилень аналітичних функцій

ВЕРЕМІЙ М. А.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

ГАЄВСЬКИЙ М. В.

*Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
mgaevskij@gmail.com*

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in D$ — розклад в ряд Тейлора-Маклорена аналітичної в крузі D функції, $S_n(f, z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ — частинна сума її ряду Тейлора-Маклорена.

Розглянемо множину H_{∞} аналітичних в D функцій з нормою $\|f\|_{H_{\infty}} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty$. Нехай далі $\{\psi(k)\}$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$. Позначимо через H_{∞}^{ψ} клас функцій з H_{∞} для яких $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k$, $z \in D$ є рядом Тейлора функції $f^{\psi} \in H_{\infty}$.

В роботі досліджуються сильні середні Валле Пуссена $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |f(z) - S_k(f; z)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Ці величини на різних класах функцій вивчалися, наприклад, у роботах [1] та [2].

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови $|\psi(k)| \neq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$ та $V_n(\psi) := \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{k \leq m} |\psi(m) - \psi(m+1)| < \infty$, тоді*

для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$\sup_{z \in D} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |f(z) - S_k(f; z)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq K_p \left(V_n(\psi) + \max_{n \leq j < 2n} \left((j+1) \sup_{j \leq k} |\psi(k) - \psi(k+1)| \right) \right) E_n(f^\psi),$$

де $E_n(f^\psi)$ — найкраще наближення функції f^ψ алгебраїчними поліномами порядку не вище n в просторі H_∞ , K_p — деяка абсолютна стала, що залежить від p .

- [1] Степанец А.И. Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\bar{\psi}$ -интегралов // Укр.мат.журн., 51:12 (1999), С.1673–1693.
- [2] Гаєвський М.В., Задерей П.В. Оцінки групи φ -відхилень аналітичних функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. Т.12, №:4 Теорія наближення функцій та суміжні питання. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015., С. 156–166.

Про відображення кулі фіксованої кратності

ВИГОВСЬКА І. Ю.

Інститут математики НАН України, Київ
vkirinata@gmail.com

Доля Д. С.

Інститут математики НАН України, Київ
dasha.dolja@mail.ru

ХАЙДЖАА КХУДХАИР ДАКХІЛ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В доповіді досліджуються неперервні відображення постійної кратності.

Теорема 1. В класі неперервних відображень замкнутої кулі B^n n -вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ в себе, таких, що обмеження відображення на межу кулі є гомеоморфізмом, існує відображення для якого кожна точка $y \in \text{int } B^n$ має рівно $2m - 1$ прообразів, де m — фіксоване натуральне число.

- [1] Ю. Зелинский, *Открытые вопросы отображения областей на многообразиях*, Збірник праць Інституту математики НАНУ, **7** (2), (2010), 242–248.
- [2] Yu. Zelinskii *Continuous mappings between domains*, Bulletin de la société des sci. et etters de Łódź, **60**, (2), (2010), 10–14.

Ортопроекційні поперечники класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій

ВЛАСИК Г. М.

Інститут математики НАН України
annawlasik@gmail.com

У доповіді основна увага зосереджена на встановленні точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $L_{\beta,p}^\psi$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q [1, с. 25]. Зазначимо, що у випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, вони співпадають з класами Вейля-Надя $W_{\beta,p}^r$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Через Ψ позначимо множину додатних і незростаючих послідовностей $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, таких, що $\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C$, де $C > 0$ деяка абсолютна стала.

Нехай L_q , $1 \leq q \leq \infty$, – простір вимірних 2π -періодичних функцій f зі стандартною нормою. Розглянемо для $f \in L_q$ апроксимативні характеристики:

$$d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \left\| f - \sum_{j=1}^m (f, u_j) u_j \right\|_q, \quad (1)$$

$$d_m^B(L_{\beta,p}^\psi, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi \cap D(G)} \left\| f - Gf \right\|_q, \quad (2)$$

де $\{u_j\}_{j=1}^m$ – ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1, m}$, $(f, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_j(x)} dx$, $\overline{u_j}$ – функції комплексно-спряжені до u_j ; $\mathcal{L}_m(B)_q$ – множина лінійних операторів G таких, що їх область визначення $D(G)$ містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься в підпросторі L_q розмірності m ; існує число $B \geq 1$ і для всіх k виконується нерівність $\|Ge^{ikx}\|_2 \leq B$.

Величину (1) називають ортопроекційним поперечником (В. М. Темляков, 1982 р.). Зазначимо, що з означення величин (1) і (2) слідує співвідношення $d_m^B(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \leq d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi, L_q)$.

Теорема 1. Нехай $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедливі порядкові оцінки

$$d_m^B(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \asymp d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \asymp \psi(m).$$

Теорема 2. Нехай $1 < p < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді

$$d_m^B(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \asymp d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}.$$

Зауваження 3. Для класів $W_{\beta,p}^r$ відповідні до теорем 1 і 2 твердження було встановлено В. М. Темляковим (див., наприклад, [2, с. 54]).

- [1] А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, — К.: Наук. думка, 1987 — 268 с.
- [2] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993 — 419 p.

Задача з багатоточковими умовами для рівняння, однорідного за порядком диференціювання

ВОЛЯНСЬКА І. І.

Національний університет „Львівська політехніка“
i.volyanska@i.ua

ІЛЬКІВ В. С.

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@i.ua

СИМОТЮК М. М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net

Використовуємо такі позначення: $\Pi(T) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0; T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, — простір таких функцій $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для яких є скінченною норма [1]

$$\|\varphi\|_{E_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi},$$

де $\tilde{\varphi}(\xi)$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$.

У смузі $\Pi(T)$ для рівняння

$$\frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = 0, \quad (t, x) \in \Pi(T), \quad (1)$$

де $b_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, розглядаємо задачу з багатоточковими умовами

$$u((j-1)t_0, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 < t_0 \leq T/(n-1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Для задачі (1), (2) встановлено умови коректної розв'язності у класах функцій $C^2([0; T]; E_{\alpha, \beta})$. Отримані результати є продовженням досліджень праці [2] на випадок багатоточкової задачі для рівняння з частинними похідними високого порядку у необмеженій (за просторовою змінною) смузі.

- [1] *Дубинский Ю.А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // УМН. — 1982. — Т. **37**, вып. 5 (227). — С. 97—137.
- [2] *Волянська І.І., Ільків В.С.* Умови розв'язності триточної задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі // Збірник праць ІМ НАН України. — 2015. — Т. 12, №2. — С. 74—100.

Деякі геометричні криві у сенсі d -відрізка

ГАЛУЩАК С. І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
sv.halushchak@ukr.net

Доповідь присвячено побудові деяких геометричних кривих, базуючись на їх метричних інваріантах. А саме, у метричних просторах $(\mathbb{R}^2, d_1)$ та $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ побудовано еліпс та гіперболу у сенсі d -відрізка [1]. Також зроблено узагальнення щодо побудови еліпсів у заданих метричних просторах при повертанні їх фокальної осі.

Замінюючи в означенні опуклих множин звичайні лінійні відрізки на d -відрізки приходимо до ідеї d -опуклих множин. Основні результати про d -опуклі множини та їх властивості подано у [1] та [2]. У доповіді будуть наведені деякі приклади d -опуклих та слабо опуклих множин [3].

Доповідь базується на спільній роботі з Шаріном С. В.

- [1] H. Martini, K. J. Swanepoel, *The Geometry of Minkowski Spaces — A Survey. Part II*, Expo. Math., 2004, p. 93–144.
- [2] V. Boltjanskij, H. Martini, P. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1997.
- [3] P. Maragos, R. W. Schafer, M. A. Butt, *Mathematical Morphology and Its Application to Image and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

Наближення функцій багатовимірними неперервними дробами

Гоєнко Н. П.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
hoyenko@gmail.com*

Кучмінська Х. Й.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
khkuchminska@gmail.com*

Розвивати аналітичні функції у багатовимірні неперервні дробі, такі як: гіллясті неперервні дробі, гіллясті неперервні дробі з нерівнозначними змінними, двовимірні неперервні дробі можна як використовуючи інтерполяцію, так і відповідності послідовності наближень таких дробів до формальних багатовимірних степеневих рядів [1].

Для відношення спеціальних гіпергеометричних функцій використовуємо метод типу Вісковатова і рекурентні співвідношення для цих функцій. Зокрема, рівномірну збіжність розвинення функції Лаурічелли-Сарана $F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; z_1, z_2, z_3)$ у багатовимірний неперервний дріб досліджено у деяких областях і при певних умовах на параметри функції [2].

Оцінки збіжності для наближень двовимірних неперервних дробів також отримано, якщо елементи дробу задовольняють умови типу Ворпільського [3].

- [1] Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська, *Багатовимірні узагальнення g -дробів*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **51** (2) (2007), 34–41.
- [2] Н. Гоєнко, Т. Антонова, С. Ракінцев, *Апроксимація гіпергеометричних функцій Лаурічелли–Сарана F_S гіллястими ланцюговими дробами*, Математичний вісник НТШ, **8** (2011), 28–42.
- [3] Х. Й. Кучмінська, *Межові версії теореми Ворпіцького для двовимірних неперервних дробів*, Укр. мат. журн., **66** (8) (2014), 1106–1116.

Застосування симетричних поліномів до аналітичних автоморфізмів банахового простору

ГОЛУБЧАК О. М.

*Івано-Франківський коледж Львівського національного
аграрного університету
oleggol@ukr.net*

Нехай X — комплексний банахів простір. Аналітичне відображення $F : X \rightarrow X$ називається аналітичним автоморфізмом, якщо F — бієктивне і F^{-1} — аналітичне. Прикладом аналітичного автоморфізму можуть бути ін'єктивні аналітичні відображення трикутного вигляду у просторі з базисом $P_k(x)$ (див. [1]). Зауважимо, що у нескінченновимірному випадку трикутні автоморфізми не завжди ін'єктивні.

В доповіді буде розглянуто дослідження трикутних аналітичних автоморфізмів за допомогою симетричних аналітичних поліномів.

- [1] *Голубчак О. М.* Гільбертовий простір симетричних функцій на ℓ_1 // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №3. – С. 49–52.

Проблема часонезворотності тахіонових кінематик

ГРУШКА Я. І.

Інститут математики НАН України, м. Київ.

grushka@imath.kiev.ua

З метою побудови нового математичного апарату для розв'язання шостої проблеми Гільберта в роботах [1, 2] було створено теорію мінливих множин. В роботі [3] на базі теорії мінливих множин було побудовано новий клас математичних об'єктів — універсальні кінематики, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики. Універсальні кінематики являють собою математичні об'єкти, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами, і в яких задано певне універсальне перетворення координат (тобто таке перетворення координат, яке визначається лише геометрично-часовим положенням матеріального об'єкта і не залежить від інших його фізичних властивостей). Надалі користуватимемось системою понять і позначень, прийнятою в роботі [3].

Означення 1. Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика.

1. Будемо говорити, що система відліку $\mathbf{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часододатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathbf{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathbf{m} \uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathbf{l}$), якщо для довільних $w_1, w_2 \in \mathbb{M}k(\mathbf{l})$ з умов $\text{bs}(w_1) = \text{bs}(w_2)$ і $\text{tm}(w_1) <_{\mathbf{l}} \text{tm}(w_2)$ випливає нерівність, $\text{tm}([\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{l}] w_1) <_{\mathbf{m}} \text{tm}([\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{l}] w_2)$.

2. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **слабко часопозитивною**, якщо існує хоч одна система відліку $\mathbf{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ така, що для довільної системи відліку $\mathbf{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ має місце співвідношення $\mathbf{l}_0 \uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathbf{l}$.

Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **безумовно часонезворотною**, якщо в цій кінематиці не існує потенційної можливості послідовно “перескакуючи” з однієї системи відліку до іншої потрапити у власне минуле. З огляду на громіздкість, математично строге означення безумовної часонезворотності тут опущене.

Теорема 2. Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **безумовно часонезворотною**.

Теорема 2 дає змогу проаналізувати на часонезворотність тахіонів кінематики, побудовані на основі узагальнених перетворень Лоренца–Пуанкаре в сенсі Е.Ресамі, які дозволяють надсвітловий рух для інерційних систем відліку. Зокрема доведено існування безумовно часонезворотної універсальної кінематики, перетворення координат якої є підмножиною узагальнених перетворень Лоренца–Пуанкаре в сенсі Е.Ресамі і яка допускає для інерційних систем відліку рух з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

- [1] Ya.I. Grushka. *Abstract concept of changeable set*. Preprint arXiv:1207.3751v1, (2012).
- [2] Я.І. Грушка. *Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів*. Праці Ін-ту математики НАНУ. **11**, (1), (2014), 192-227.
- [3] Грушка Я.І. *Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат*. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – **12**. – Н 1 – 2015. – С. 74-118.

Застосування гіперкомплексних моногенних функцій в крайовій задачі типу задачі у зміщеннях плоскої теорії пружності

Грищук С. В.

Інститут математики НАН України, м. Київ
 serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

Розглянемо комутативну алгебру $\mathbb{B}$ над полем комплексних чисел, що містить базис $\{e_1, e_2\}$: $(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0$, $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$. Нехай D — область в xOy , $D_\zeta := \{xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mathbb{B}$. Кажемо, що $\mathbb{B}$ -значна функція $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$, $\Phi(\zeta) = U_1 e_1 + U_2 ie_1 + U_3 e_2 + U_4 ie_2$, $\zeta = xe_1 + ye_2$, $U_k = U_k(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, є моногенною в D_ζ , тоді і тільки тоді, коли Φ має класичну похідну в кожній точці D_ζ . Кожна U_k , $k = \overline{1, 4}$, є бігармонічною функцією в D .

Задача зі знаходження пружної рівноваги для ізотропного тіла, геометрично зображуваного областю D , за заданими граничними значеннями на ∂D частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ для зміщень u , v , еквівалентна крайовій задачі для моногенних функцій, що полягає у знаходженні Φ за заданими граничними значеннями U_1 та U_4 .

- [1] Gryshchuk S.V. *$\mathbb{B}$ -valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D Elasticity*, ArXiv preprint /arXiv:1601.01626v1 [math.AP]/, (2016), 12 pages.

Елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві

ДИРІВ М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mashadyriv@ukr.net

Так званий *гауссівський аналіз білого шуму*, тобто пов'язаний з гауссівськими випадковими процесами аналіз на просторах основних, квадратично інтегровних за гауссівською мірою і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних (див., наприклад, [1]), має численні застосування у сучасній математиці. Однак у багатьох задачах стохастичного аналізу, математичної фізики та функціонального аналізу природним чином виникають не лише гауссівські випадкові процеси, тому існує необхідність у побудові аналогів аналізу білого шуму для негауссівських процесів і відповідних ймовірнісних мір.

Одними із тих, що найбільш широко застосовуються зараз, є так звані процеси Леві (випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами, див. детальніше, наприклад, [2]). Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім вінерівського та пуассонівського) так званої *властивості хаотичного розкладу* (тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів від невинуватливих функцій), яка грає ключову роль при побудові гауссівського аналізу білого шуму.

Існують різні підходи до побудови аналізу білого шуму Леві, які ґрунтуються на різних аналогах властивості хаотичного розкладу. Один з підходів, запропонований Є. В. Литвиновим [3], ґрунтується на розкладі квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій (випадкових величин) у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу за поліномами Ерміта у гауссівському аналізі. Цей підхід на сьогодні є одним з найбільш цікавих та перспективних з

точки зору застосувань. Отже, розбудова аналізу білого шуму Леві з використанням щойно згаданого підходу і, зокрема, розбудова так званого *віківського числення* (теорії, що вивчає природні аналоги поточкового добутку (так званий віківський добуток) і голоморфних функцій (так звані віківські версії голоморфних функцій) на просторах основних і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних) у його термінах, є важливою та актуальною задачею.

За аналогією з [4] ми вводимо та вивчаємо віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, розглядаємо основні теореми віківського числення, а також зв'язок між операторами стохастичного диференціювання [5] та віківським численням. Це є необхідним для подальшої розбудови віківського числення і дає можливість розширити на аналіз білого шуму Леві та поглибити відповідні результати гауссівського аналізу білого шуму.

- [1] Hida T., Kuo H. H., Potthoff J., Streit L. *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [2] Bertoin J. *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Lytvynov E.W. *Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **Vol. 6**, (1) (2003), 73–102.
- [4] Kachanovsky N. A., *An extended stochastic integral and a Wick calculus on parametrized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **Vol. 11**, (4) (2008), 541–564.
- [5] Dyriv M.M., Kachanovsky N.A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions of Lévy white noise analysis*, Carpathian Mathematical Publications **Vol. 6**, (2) (2014), 212–229.

Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

ДМИТРИШИН Р. І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
dmytryshynr@hotmail.com

Встановленню різних властивостей гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) спеціального вигляду присвячені роботи [1], де досліджуються ГЛД з дійсними додатними і комплексними елементами, [3] — 1-періодичні ГЛД спеціального вигляду, [2] — функціональні ГЛД з нерівнозначними змінними і ГЛД спеціального вигляду з комплексними змінними, [4] — додатно визначені ГЛД спеціального вигляду.

Встановлено, що за певних умов значення підхідних дробів додатно визначеного ГЛД спеціального вигляду

$$\Phi_0 + \frac{1}{b_{01} + z_{01} - \Phi_1} + \frac{-a_{02}^2}{b_{02} + z_{02} - \Phi_2} + \frac{-a_{03}^2}{b_{03} + z_{03} - \Phi_3} + \dots,$$
$$\Phi_p = \frac{1}{b_{1p} + z_{1p} + b_{2p} + z_{2p} + b_{3p} + z_{3p} + \dots}, \quad p \geq 0,$$

де a_{rs} , $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r \neq 1$, $r + s \geq 2$, b_{rs} , $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні сталі, z_{rs} , $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні змінні, належать деякому кругу. Крім того, досліджено рівномірну збіжність ГЛД, який є частинним випадком додатно визначеного ГЛД спеціального вигляду, в деякій обмеженій параболічній області.

- [1] Антонова Т.М., Боднар Д.І. *Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України, **31** (2000), 19–32.
- [2] Баран О.Є. *Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Карпатські математичні публікації, **5** (1) (2013), 4–13.
- [3] Боднар Д.І., Бубняк М.М. *Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду*, Математичний вісник НТШ, (8) (2011), 5–16.
- [4] Dmytryshyn R.I. *Positive definite branched continued fractions of special form*, Carpathian Mathematical Publications, **5** (2) (2013), 225–230.

Достатні умови існування кутової v -щільності нулів цілої функції нульового порядку

ЗАБОЛОЦЬКИЙ М. В.

Львівський національний університет ім. І. Франка
m_zabol@franko.lviv.ua

МОСТОВА М. Р.

Львівський національний університет ім. І. Франка
memyr23@gmail.com

Позначимо через L клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій v таких, що $rv'(r)/v(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$; $H_0(v)$ – клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} n(r, 0, f)/v(r) < +\infty$; $n(r, \alpha, \beta)$ – кількість нулів $f \in H_0(v)$ в секторі $\{z: |z| \leq r, \alpha \leq \arg z < \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$; $F(z) = zf'(z)/f(z)$ – логарифмічну похідну f ; $c_k(r, F)$ – її коефіцієнти Фур'є; C_0^α – сім'ю множин $E \subset \mathbb{C}$, які можна покрити послідовністю кругів $\{z: |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ таких, що $\sum_{|z_j| \leq r} r_j^\alpha = o(r^\alpha)$, $r \rightarrow +\infty$, $0 < \alpha \leq 2$; $\mathcal{E}_\delta$ – сім'ю вимірних множин $G \subset \mathbb{R}_+$ таких, що $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \text{mes}(G \cap [0, r])/r \leq \delta$, $0 \leq \delta < 1$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(v)$ мають кутову v -щільність, якщо для всіх α і β , що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$, існує границя

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} n(r, \alpha, \beta)/v(r).$$

Якщо $v \in L$, $f \in H_0(v)$ і нулі f мають кутову v -щільність, то ([1])

1) існує множина $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$, така, що

$$F(re^{i\varphi}) = \Delta v(r) + o(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad z = re^{i\varphi} \notin E;$$

2) існує множина $D \in \mathcal{E}_0$ така, що для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} c_0(r, F)/v(r) = \Delta, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty, r \notin D} c_k(r, F)/v(r) = 0, \quad k \neq 0;$$

3) існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, така, що для довільного $p \in [1, +\infty)$

$$\|F(re^{i\varphi}) - n(r)\|_p = o(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad r \notin G.$$

Нами будуть виділені підкласи цілих функцій f класу $H_0(v)$, для яких з виконання однієї з умов 1)-3) випливатиме існування кутової v -щільності нулів f .

- [1] Заболоцький М. В., Мостова М. Р. *Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку*, Укр. мат. журн., **66** (4) (2014), 473–481.

Операція згортки на спектрах алгебр блочно-симетричних аналітичних функцій

ЗАГОРОДНЮК А. В.

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника"*

andriyzag@yahoo.com

КРАВЦІВ В. В.

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника"*

maksymivvika@gmail.com

Розглянемо простір $\mathcal{X}^2 = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^2$ елементами якого є вектори $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \dots \right)$, де $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на $\mathcal{X}^2$, $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ — алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}^2$.

У роботах [1], [2] було введено поняття оператора симетричної та мультиплікативної згортки на спектрах алгебр симетричних аналітичних функцій. У роботі [3] було введено поняття оператора симетричної згортки на спектрах алгебр блочно-симетричних поліномів.

У доповіді буде розглядатися поняття мультиплікативного зсуву для елементів простору $\mathcal{X}^2$ і мультиплікативної згортки на спектрі алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ та доведено деякі їхні властивості.

- [1] I. Chernega, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic function*, J. Math. Anal. Appl., **395** (2012), 569–577.

- [2] I. Chernega, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*, Rev. Mat. Complut., **27** (2014), 575–585.
- [3] В.В. Кравців, *Алгебри блочно-симетричних поліномів: твірні елементи та оператор зсуву*, Математичний вісник НТШ, **8** (2011), 107–121.

Дослідження регулярності за Аренсом $\bigotimes_{s,\pi}^n A$

ЗАГОРОДНЮК А. В.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника”
andriyzag@yahoo.com

ТАРАС О. Г.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника”
elena_taras@ukr.net

Нехай A – комплексна банахова алгебра. $H_b(A)$ – алгебра Фреше аналітичних функцій на A , які є обмеженими на обмежених підмножинах. Білінійне відображення $B(x, y)$ називається *регулярним за Аренсом*, якщо $\lim_{\alpha, \beta} B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_{\beta, \alpha} B(x_\alpha, y_\beta)$.

Якщо на A кожне $B(x, y)$ є регулярним за Аренсом, то алгебра називається *регулярною за Аренсом*. На проективному тензорному степені $\bigotimes_\pi^n A$ існує натуральне множення, таке, що $\bigotimes_\pi^n A$ є банаховою алгеброю. Симетричний тензорний добуток $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ є замкненим підпростором у $\bigotimes_\pi^n A$, а, отже, є банаховою алгеброю.

Теорема 1. *Нехай (x_α) , (y_β) є n -поліноміально збіжні напрямленості в A^{**} такі, що для довільного $P \in \mathcal{P}(^n A)$ виконується умова $\lim_{\alpha, \beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta, \alpha} P(x_\alpha y_\beta)$. Тоді $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ не є регулярним за Аренсом.*

Дослідимо питання регулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри $H_b(A)$, використовуючи операцію “мультиплікативної” згортки (спосіб побудови передспряженого простору описаний у [1], детальніше про “мультиплікативну” згортку див. [3]).

Лема 2. *Передспряжений простір до $H_b(A)$ є банаховою алгеброю відносно операцій “ $\star$ ” і “ $+$ ”.*

Теорема 3. Нехай $(x_\alpha), (y_\beta)$ є n -поліноміально збіжні напрямленості такі, що для довільного $P \in \mathcal{P}(^n A)$ виконується

$$\lim_{\alpha, \beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta, \alpha} P(x_\alpha y_\beta), \quad (1)$$

тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ передспряжений простір до $H_b(A)$ не є регулярним за Аренсом.

- [1] P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre, *Entire functions of bounded type on Fresher spaces*, Math. Nachr., **161** (1986), 25–40.
- [2] O. Taras, A. Zagorodnyuk, *A generalization of the Arens extension for Banach algebras*, Indagationes Mathematicae, **26** (2) (2015), 324–328.

Про розв’язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю у комплексній області

ІЛЬКІВ В. С.

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@i.ua

СТРАП Н. І.

Національний університет „Львівська політехніка“
n.strap@i.ua

В області $\mathcal{D}^p = [0, T] \times \mathcal{S}^p$, де $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T > 0$, $p \geq 2$, розглянуто нелокальну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною та оператором диференціювання $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \partial / \partial z_j$, $j = 1, \dots, p$, який діє на функції просторових комплексних змінних $(z_1, \dots, z_p)$,

$$\sum_{|\vec{s}| \leq n} a_{\vec{s}} B^{\vec{s}} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = \varepsilon f(u), \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=T} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

де $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$, $a_{s_0, s}$ — комплексні коефіцієнти ($a_{n,0} = 1$), ε — комплексний параметр, u — шукана функція.

За допомогою ітераційної схеми Неша-Мозера встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у шкалі $\{\mathbf{H}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$ просторів функцій багатьох комплексних змінних

$$\mathbf{H}_q = \left\{ u(t, z) = \sum_{\hat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} u_{\hat{k}} e^{\tau(k_0)t} z^{\hat{k}} : \|u\|_q^2 = \sum_{\hat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} \check{k}^{2q} |u_{\hat{k}}|^2 < +\infty \right\},$$

де $\hat{k} = (k_0, k_1, \dots, k_p)$, $\check{k} = \sqrt{1 + k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$, $\tau(k_0) = \frac{\ln \mu}{T} + \frac{i 2\pi k_0}{T}$.

Найбільш важливим моментом у цій схемі є отримання оцінок норм обернених лінеризованих операторів, що виникають у кожній ітерації алгоритму, і основна трудність, яка з цим пов'язана — це їх діагональні елементи, які можуть бути як завгодно малими. Для подолання проблеми малих знаменників використано метричний підхід. Саме тому розв'язки задачі знайдено не на множині всіх параметрів задачі, а на множині тих параметрів, для яких власні значення лінеризованих операторів не є близькими до нуля.

Наближення класів $W_\beta^r H^\alpha$ бігармонійними інтегралами Пуассона

КАЛЬЧУК І. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
kalchuk_i@ukr.net

ХАРКЕВИЧ Ю. І.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Нехай C — простір 2π -періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; L — простір 2π -періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Нехай $f \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фур'є функції f . Нехай $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то цю функцію називають (r, β) -похідною функції $f(x)$ і позначають через f_{β}^r . Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через W_{β}^r . Такі класи були введені Б. Надем [1] і функцію f_{β}^r прийнято називати (r, β) -похідною в розумінні Вейля–Надя.

Якщо $f(x) \in W_{\beta}^r$ і, крім того, $\|f_{\beta}^r(\cdot)\|_{\infty} \leq 1$, то кажуть, що $f(x)$ належить класу $W_{\beta, \infty}^r$. У випадку $\beta = r$ класи $W_{\beta, \infty}^r$ співпадають з класами Соболева W_{∞}^r . Якщо $f \in W_{\beta}^r$, і при цьому $f_{\beta}^r \in H^{\alpha}$, тобто f_{β}^r задовольняє умову Ліпшиця порядку α : $|f_{\beta}^r(x+h) - f_{\beta}^r(x)| \leq |h|^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, то кажуть, що f належить до класу $W_{\beta}^r H^{\alpha}$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W_{\beta}^r H^0 = W_{\beta, \infty}^r$.

Нехай $f \in L$. Величину виду

$$B_{\delta}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} (1 - e^{-\frac{2}{\delta}}) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0,$$

називають бігармонійним інтегралом Пуассона функції f .

В даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta \rightarrow \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \sup_{f \in W_{\beta}^r H^{\alpha}} \|f(x) - B_{\delta}(f, x)\|_C. \quad (1)$$

Для бігармонійного інтеграла Пуассона введемо функцію

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - [1 + \frac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})u]e^{-u})\delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ (1 - [1 + \frac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})u]e^{-u})u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}. \end{cases}$$

Теорема 1. При $r > 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $r + \alpha \leq 2$ і $\delta \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{1+r}} + \frac{1}{\delta^2}\right),$$

$$2^{\alpha-1} \leq \theta(\alpha) \leq 1,$$

де величина $A(\alpha, \tau)$ означена співвідношенням

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha} \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt$$

і для неї справедлива оцінка

$$A(\alpha, \tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases}$$

- [1] Nagy B. *Über gewisse extremalfragen bei transformierten trigonometrischen entwicklungen, I.* // Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie. zu — Leipzig, 1938. — **90**. — C. 103–134.

The problem with integral conditions for the homogeneous equation

KALENYUK P.

*National University „Lviv Polytechnic“, University of Rzeszow, Poland,
pkalenyuk@gmail.com*

NYTREBYCH Z.

*National University „Lviv Polytechnic“
znytrebych@gmail.com*

KUDUK G.

*University of Rzeszow, Poland
gkuduk@onet.eu*

SYMOTYUK M.

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
quaternion@ukr.net*

Let $\Pi(T) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0; T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$. Let us denote by $E_{\alpha, \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, the space of functions $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ with the finite norm [1]

$$\|\varphi\|_{E_{\alpha, \beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi},$$

where $\tilde{\varphi}(\xi)$ is the Fourier transform of function $\varphi(x)$.

In the domain $\Pi(T)$ we study the next problem

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$\int_0^T u(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^T tu(t, x) dt = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Assuming that the real parts of roots of the polynomial $\lambda^2 + ia_1\lambda - a_2$ are nonzero and different, the correctness of the problem (1), (2) in the spaces of functions $C^2([0; T]; E_{\alpha, \beta})$ is establish. This result continue the research of the work [2] in the case of the integral problem in the unlimited strip.

- [1] *Dubinskii Yu. A.* The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physics // Russian Mathematical Surveys (1982), **37**(5): 109–153.
- [2] *Kalenyuk P., Nytrebych Z.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. – Lviv, Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002.

Про стабільні берівські класи

КАРЛОВА О. О.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Maslenizza.ua@gmail.com

Символом $C(X, Y)$ позначається клас усіх неперервних відображень між X та Y . Послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ відображень $f_n : X \rightarrow Y$ *стабільно збігається до відображення* $f : X \rightarrow Y$ *на просторі* X (позначається це так: $f_n \xrightarrow{\text{st}} f$), якщо для кожного $x \in X$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$, таке, що $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \geq n_0$. Якщо $A \subseteq Y^X$, то символом $\overline{A}^{\text{st}}$ ми позначаємо множину всіх стабільних границь послідовностей відображень з множини A .

Визначимо стабільні берівські класи так: нехай $B_0^{\text{st}}(X, Y) = C(X, Y)$ і для всіх $\alpha \in [1, \omega_1)$ покладемо $B_\alpha^{\text{st}}(X, Y) = \overline{\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta^{\text{st}}(X, Y)}^{\text{st}}$.

Дійснозначні функції першого стабільного класу Бера на топологічно-му просторі X природно виникають як цікавий підклас класу функцій, які є різницями нарівнеперервних [2, 3], а також в задачах про берівську класифікацію інтегралів, залежних від параметра [5] і задачах про композицію берівських функцій [4]. Функції вищих стабільних берівських класів були введені і вивчалися в [6, 7]. Характеризація функцій першого стабільного класу, які визначені на досконалому паракompактному спадково берівському просторі з властивістю Прейса-Симона і набувають значень у лінійно зв'язних просторах зі спеціальними властивостями продовження, була встановлена в [1].

Топологічний простір Y назвемо *склеювачем для простору X* і позначимо це $Y \in \text{Ad}(X)$, якщо для довільних двох неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X і довільних неперервних відображень $f, g : X \rightarrow Y$ існує неперервне відображення $h : X \rightarrow Y$, таке, що $h|_A = f|_A$ і $h|_B = g|_B$. Простір Y ми називаємо *абсолютним склеювачем* для класу $\mathcal{C}$ топологічних просторів і позначаємо $Y \in \text{AAd}(\mathcal{C})$, якщо $Y \in \text{Ad}(X)$ для довільного $X \in \mathcal{C}$. У випадку, коли Y є склеювачем для довільного простору X , ми будемо позначати цей факт $Y \in \text{AAd}$.

Нехай E – підпростір топологічного простору Y . Пара (Y, E) є **-склеювачем для простору X* (це позначається $(Y, E) \in \text{Ad}^*(X)$), якщо існує така точка $y^* \in E$, що для довільного неперервного відображення $f : X \rightarrow Y$ і довільних двох неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X з умовою $f(A) \subseteq E$, існує неперервне відображення $h : X \rightarrow Y$, таке, що $h|_A = f|_A$ і $h|_B = y^*$. Простір Y ми називаємо *σ -склеювачем для X* , якщо існує покриття $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ простору Y функціонально замкненими підпросторами Y_n , такими, що $(Y, Y_n) \in \text{Ad}^*(X)$ для кожного n .

Назвемо простір X *маловимірним*, якщо кожна його точка має базу відкритих оточень з дискретною межею.

Теорема 1. *Нехай Y – топологічний простір. Тоді: 1) Y є абсолютним склеювачем для класу сильно нульвимірних просторів; 2) Y є абсолютним склеювачем для класу маловимірних компактів, якщо Y – лінійно зв'язний; 3) $Y \in \text{AAd}$ в тому і тільки тому випадку, коли Y – стягуваний.*

Теорема 2. *Нехай X, Y – топологічні простори, $\alpha \in [1, \omega_1)$ і нехай $\beta = \alpha$ у випадку $\alpha < \omega_0$, і $\beta = \alpha + 1$ у випадку $\alpha \geq \omega_0$. Для відображення $f : X \rightarrow Y$ розглянемо умови: (i) $f \in B_\alpha^{\text{st}}(X, Y)$; (ii) існують зростаюча послідовність $(X_n)_{n=1}^\infty$ множин функціонально мультиплікативних класів $< \beta$ та послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ відображень $f_n \in B_{<\alpha}^{\text{st}}(X, Y)$, такі, що $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ і $f_n|_{X_n} = f|_{X_n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$; (iii) існують розбиття $(X_n : n \in \mathbb{N})$ простору X функціонально двосторонніми множинами X_n класу β та послідовність неперервних відображень $f_n : X \rightarrow Y$, такі, що $f_n|_{X_n} = f|_{X_n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Тоді (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Якщо простір Y має функціонально замкнену діагональ, то (i) $\Rightarrow$ (ii).

Якщо виконується одна з умов: (a) Y – склеювач для X , або (b) Y – лінійно зв'язний σ -склеювач для X , то (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Теорема 3. *В класі монотонних функцій справджуються рівності*

$$B_1^{\text{st}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = B_2^{\text{st}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dots = B_\alpha^{\text{st}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dots$$

- [1] T. Banach, B. Bokalo *On scatteredly continuous maps between topological spaces*, Topology Appl. **157** (1) (2010), 108–122.
- [2] F. Chaatit, H. Rosenthal, *On differences of semi-continuous functions*, Quaest. Math. **23** (3) (2000) 295–311.
- [3] R. Haydon, E. Odell, H. Rosenthal, *On certain classes of Baire-1 functions with applications to Banach space theory*, in: Functional Analysis, Austin, TX, 1987/1989, in: Lecture Notes in Math., vol. 1470, Springer, Berlin, 1991, pp. 1–35.
- [4] O. Karlova, V. Mykhaylyuk, *On composition of Baire functions*, arxiv.org/abs/1511.08982.
- [5] T. Banakh, S. Kutsak, O. Maslyuchenko, V. Maslyuchenko, *Direct and inverse problems of the Baire classifications of integrals dependent on a parameter*, Ukr. Math. J. **56** (11) (2004), 1443–1457.
- [6] Á. Császár, M. Laczkovich, *Discrete and equal convergence*, Studia Sci. Math. Hungar. **10** (1975), 463–472.
- [7] Á. Császár, M. Laczkovich, *Some remarks on discrete Baire classes*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **33** (1979), 51–70.

The linear space $\mathcal{L}_{qp}$

KONDRATYUK A. A.

Ivan Franko National University of Lviv

kond@franko.lviv.ua

LUKIVSKA D. V.

Ivan Franko National University of Lviv

d.lukivska@gmail.com

Denote $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Означення 1. Let $q \in \mathbb{C}^*$, $0 < |q| < 1$. A meromorphic function f in $\mathbb{C}^*$ is said to be **p -loxodromic of multiplier q** if there exists $p \in \mathbb{C}^*$, $p \neq 1$, such that for every $z \in \mathbb{C}^*$

$$f(qz) = pf(z). \quad (1)$$

Denote the class of p -loxodromic functions of multiplier q by $\mathcal{L}_{qp}$. The set $\mathcal{L}_{qp}$ with fixed p forms an Abelian group with respect to addition.

The case $p = 1$ has been already studied. The meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f satisfying (1) for every $z \in \mathbb{C}^*$ with $p = 1$ is called loxodromic. Loxodromic functions of multiplier q form a field, which we denote by $\mathcal{L}_q$. The theory

of loxodromic functions is well known due to the works of O. Rausenberger, G. Valiron, Y. Hellegouarch.

If $f \in \mathcal{L}_{qp}$ and a is a zero of f , then aq^n , $n \in \mathbb{Z}$, are as well. That is, in the case of non-positive q the zeros of f lay on a logarithmic spiral. Let $a = |a|e^{i\alpha}$, $q = |q|e^{i\gamma}$. Then the logarithmic spiral in polar coordinates (r, φ) takes the form

$$\log r - \log |a| = k(\varphi - \alpha),$$

where $k = \frac{\log |q|}{\gamma}$. The same concerns the poles of f .

The set $\mathcal{L}_{qp}$ forms a linear space over the fields $\mathbb{C}$ and $\mathcal{L}_q$.

Твердження 2. *The linear space $\mathcal{L}_{qp}$ has the following properties:*

1. *The map $D : f(z) \mapsto zf'(z)$ maps $\mathcal{L}_{qp}$ to $\mathcal{L}_{qp}$.*
2. *The map $D_l : f(z) \mapsto z \frac{f'(z)}{f(z)}$ maps $\mathcal{L}_{qp}$ to $\mathcal{L}_q$.*
3. *$f(z) \in \mathcal{L}_{qp} \Rightarrow f(\frac{1}{z}) \in \mathcal{L}_{q\frac{1}{p}}$.*

Двосторонні інтегральні нерівності з багатьма незалежними змінними

КОПАЧ М. І.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”

kopachm2009@gmail.com

Для інтегральних рівнянь вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s)) ds \quad (1)$$

встановлені теореми про двосторонні оцінки розв’язків, коли $K(t, s, p, q)$ підпорядковано деяким слабкішим за ізотонність щодо p та антитонність щодо q умовам за припущення про немонотонність $k(t, s, x) \equiv K(t, s, x, x)$ щодо x , де $t, s \in [a, b]$, $a \leq b$, $a, b, t, s \in \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N$ – N -вимірний евклідов простір.

Тут нерівність $a \leq b$ означає, що $a = (a^1, \dots, a^N)$, $b = (b^1, \dots, b^N)$, $-\infty < a^i \leq b^i < \infty$.

Інакше кажучи, рівняння (1) можна подати у вигляді

$$x(t^1, \dots, t^N) = f(t^1, \dots, t^N) + \\ + \int_{a^1}^{t^1} \dots \int_{a^N}^{t^N} K(t^1, \dots, t^N, s^1, \dots, s^N, x(s^1, \dots, s^N), x(s^1, \dots, s^N)) ds^1 \dots ds^N \\ (a^i \leq t^i \leq s^i \leq b^i, i = \overline{1, N}, a^i, b^i - \text{дійсні числа}).$$

Відзначимо, що випадок монотонності щодо x функції $k(t, s, x)$ і $N = 1$ розглянутий в [1], а немонотонності щодо x функції $k(t, s, x)$ при монотонно неспадній щодо p і незростаючій щодо q функції $K(t, s, p, q)$ розглянутий в [2]. Зазначені дослідження із [2] поширені в [3] на випадок $N \geq 1$.

- [1] Бондаренко В.А. *Интегральные неравенства для уравнения Вольтерра в банаховом пространстве с конусом*, Мат.заметки, **9** (3) (1971), 151–160.
- [2] Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Двусторонние операторные неравенства и их применения*, Киев: Наук. думка, 1980, 267 с.
- [3] Шувар Б.А., Копач М.И. *О двусторонних интегральных неравенствах со многими независимыми переменными*, Укр.мат.журнал, **33** (6) (1984), 848 – 853.

Аналоги принципу Біркгофа-Тарського про нерухому точку

КОПАЧ М. І.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”

korachm2009@gmail.com

ОБШТА А. Ф.

Національний університет “Львівська політехніка”

ШУВАР Б. А.

Національний університет “Львівська політехніка”

Теорема про нерухому точку монотонного оператора, яка належить А. Тарському (див., напр., [1]) і відома також як принцип Біркгофа-Тарського, узагальнена М.С. Курпелем [2] на випадок рівняння з гетеротонним оператором вигляду

$$x = T(x, x).$$

Надалі вважатимемо, що E – повна структура. Наступні два твердження є аналогами теореми А. Тарського для рівняння

$$x = Fx, \tag{1}$$

коли оператор F можна подати у вигляді $Fx = T(x, x)$.

Твердження 1. *Нехай:*

1) оператор F має властивість лівосторонньої ліпшицієвості, тобто існує лінійний додатний щодо w оператор $A_1(y, z)w$, для якого з нерівності $y \leq z$ випливає нерівність

$$-A_1(z, y)(z - y) \leq Fz - Fy,$$

причому оператор $A_1(y, z)w$, не спадає щодо y , не зростає щодо z при $w \geq \theta$, де θ – нульовий елемент в E , і оператори

$$F_1(u, v) = -A_1(v, u)(v - u) + Fu,$$

$$F_2(u, v) = A_1(u, v)(u - v) + Fu$$

діють з $E \times E$ в E ;

2) якщо система рівнянь

$$y = -A_1(z, y)(z - y) + Fu,$$

$$z = A_1(z, y)(z - y) + Fz$$

має розв'язок (y, z) , то (y, y) та (z, z) також є розв'язками цієї системи.

Тоді існує принаймні один розв'язок рівняння (1).

Твердження 2. Нехай:

1) існує правосторонній оператор Ліпшиця $A_2(y, z)w$, лінійний додатний щодо w , неспадний щодо y , незростаючий щодо z . для якого з нерівності $y \leq z$ випливає нерівність

$$Fz - Fu \leq A_2(z, y)(z - y),$$

причому оператори

$$F_3(u, v) = -A_2(v, u)(v - u) + Fu,$$

$$F_4(u, v) = A_2(u, v)(u - v) + Fu$$

діють з $E \times E$ в E ;

2) якщо існує розв'язок (y, z) системи

$$y = -A_2(z, y)(z - y) + Fz,$$

$$z = A_1(z, y)(z - y) + Fz,$$

то (y, y) та (z, z) також є розв'язками цієї системи.

Тоді існує принаймні один розв'язок рівняння (1).

- [1] Вулих Б.З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*, М.: Физматгиз, 1961, 407 с.
- [2] Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Об одном обобщении теоремы А. Тарского о неподвижной точке*, Изв.вуз. Математика, **192** (5) (1984), 135 – 137.

Про першу українську математичну публікацію

КУЗЬ А. М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
kuz.anton87@gmail.com

СИМОТЮК М. М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net

ФЕНИК М. Т.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

У січні 1894 року Володимир Левицький, на той час 22-річний студент Львівського університету, подав до „Записок НТШ“ працю [1] „Про симетричні вираження з вартостий функцій mod- m “, а в лютому 1894 року подав її переклад польською мовою [2] до часопису „Prace Matematyczno-Fizyczne“, що вийшов 1895 р. у Варшаві. Стаття [1] стала першою фаховою публікацією з математики, написаною українською мовою [3, 7, 6, 4, 5]. Дослідження, викладені у [1, 2], В.Левицький виконав під керівництвом професора Юзефа Пузини і пізніше подав як частину докторського проекту (див. [4]).

Нехай C_m^k , $1 \leq k \leq m$, — кількість k -елементних підмножин множини з m елементів; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — різні корені m -го степеня з 1. Для функції f , аналітичної в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, через $H_k(f, z, m)$, $k \leq m$, позначимо

$$H_k(f, z, m) = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f(z\varepsilon_{i_1}) \cdot \dots \cdot f(z\varepsilon_{i_k})}{C_m^k}. \quad (1)$$

У статті [1] розв’язано такі питання:

1) для випадку, коли функція f є многочленом, наведено конструктивний спосіб побудови виразів $H_k(f, z, m)$, $1 \leq k \leq m$; з'ясовано, якими мають бути числа k , m і степінь многочлена f , щоб функція $H_k(f, z, m)$ була сталою; доведено, що коли f — многочлен, а функції $H_1(f, z, m), \dots, H_k(f, z, m)$ є сталими, то

$$H_{k+1}(f, z, m), \dots, H_m(f, z, m)$$

можна виразити через деякі $(m - k - 1)$ значень $f(z\varepsilon_1), \dots, f(z\varepsilon_m)$ (при цьому використано формули Ньютона, які дозволяють виразити основні симетричні многочлени через степеневі суми).

2) для випадку, коли аналітична функція $f(z)$ є відмінною від многочлена, отримано зображення для функцій $H_k(f, z, m)$, $1 \leq k \leq m$, у вигляді рядів, і досліджено питання про існування границь $\lim_{m \rightarrow \infty} H_k(f, z, m)$, $1 \leq k \leq m$. Для обчислення цих граничних значень застосовано теорію лишків, започатковану О.Коші.

Доповідь присвячено історії зародження української математичної термінології, а також обговоренню результатів [1, 2], їх зв'язку з теорією кривих сталої ширини, геометричним означенням гармонічної функції [8, 9].

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 65/4-2015).

- [1] *Володимир Левицький*. Про симетричні вираження з вартостей функцій mod- m // Записки НТШ. – 1894. – Т. 4. – С. 124–139.
- [2] *Lewicki W.* O wyrażeniach symetrycznych z wartości funkcji mod. m // Prace mat.-fiz., Warszawa. – 1895. – Tom VI, no. 1. – P. 5–19.
- [3] *Бобик О., Притула М., Пташник Б., Хобзей П.* Видатний український математик і просвітник Володимир Левицький (до 135-річчя від дня народження) // Математичний вісник НТШ: зб. наук. праць. – Львів, 2007. – Т. 4. – С. 440–450.
- [4] *Притула Я.Г.* Пузина Юзеф // <http://mmf.lnu.edu.ua/index.php/istoriia/vydatni-osobystosti/item/1023-jozef-puzyna.html>
- [5] *Пташник Б.Й.* Піонер української математичної науки (про проф. Володимира Левицького) // Вісник НТШ (Інформ. видання Світової Ради Наукових Товариств ім. Шевченка). – 1997. – Число 18.
- [6] *Суллим Г.Т.* Левицький Володимир // <http://mmf.lnu.edu.ua/index.php/istoriia/vydatni-osobystosti/item/183-history-levyts.html>
- [7] *Хобзей П.* Основоположник математичної культури нашого народу // Аксиоми для нащадків: Українські імена у світовій науці: Зб. нарисів. – Львів: Каменяр, 1991. – С. 102–118.
- [8] *Арнольд В.И.* Два занятия школьного кружка при МГУ // Квант, 2010. – № 4. – С. 4–10.
- [9] *Успенский В.А.* Геометрический вывод основных свойств гармонических функций // Успехи мат. наук, 1949. – Т. 4, № 2 (30). – С. 201–205.

Generalization of the Weierstrass $\wp$ -function

KHOROSHCHAK V. S.

Ivan Franko National University of Lviv

v.khoroshchak@gmail.com

KONDRATYUK A. A.

Ivan Franko National University of Lviv

kond@franko.lviv.ua

Denote $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Let ω_1, ω_2 be complex numbers such that $Im \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$.

Definition 1. A meromorphic function g in $\mathbb{C}$ is called *p -elliptic*, if there exists $p \in \mathbb{C}^*$, $p \neq 1$, such that for every $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = g(u), \quad g(u + \omega_2) = pg(u).$$

Denote the class of p -elliptic functions by $\mathcal{E}_p$. If $p = 1$ we obtain the classical theory of elliptic functions, which are well known due to the works of K. Jacobi, N. Abel, K. Weierstrass.

We generalize the elliptic Weierstrass $\wp$ -function

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

where $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. The proposed generalized function will be a p -elliptic function.

Let $p = e^{i\alpha}$, $p \neq 1$. Consider the function

$$g_\alpha(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{e^{i\alpha}}{(u - \omega)^2} - \frac{e^{i\alpha}}{\omega^2} \right).$$

Definition 2. The function

$$\wp_\alpha(u) = g_\alpha(u) + C_\alpha,$$

where

$$C_\alpha = \frac{g_\alpha\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\alpha}g_\alpha\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1},$$

is called **generalized the Weierstrass $\wp$ -function**.

Theorem. Generalized the Weierstrass $\wp$ -function $\wp_\alpha$ belongs to $\mathcal{E}_p$ with $p = e^{i\alpha} \neq 1$.

Одна властивість інтегральних середніх мероморфної у замиканні півсмуги функції

КРОХТЯК І. З.

Львівський національний університет ім. І. Франка
iryna_krohtyak@mail.ru

СОКУЛЬСЬКА Н. Б.

Львівський національний університет ім. І. Франка
natalya.sokulska@gmail.com

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂S , і, крім того, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$.

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S , $s_j = \sigma_j + it_j$, через $\{p_j\}$ - послідовність її полюсів в S .

Через S^* позначимо смугу S з розрізами $\{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\}$, $\{\tau\text{Re}p_j + i\text{Im}p_j : \tau \geq 1\}$. Нехай $s_0 \in S^*$ і вибране деяке значення $\log f(s_0)$. Покладемо

$$\log f(s) = \int_{s_0}^s \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \log f(s_0), \quad (1)$$

де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$ і не залежить від шляху інтегрування.

Таким чином,

$$\arg f = \text{Im} \log f,$$

де $\log f$ визначений співвідношенням (1).

Розглянемо інтегральні середні

$$A(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg f(\sigma + it) dt.$$

Твердження 1. *Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, не має в ньому ні уявних нулів, ні уявних полюсів і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. Тоді*

$$A(\sigma, f) = A(0, f), \quad \sigma > 0.$$

Some properties of Lipschitz p-summing operators

MARTSINKIV M.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
mariadubey@gmail.com

ZAGORODNYUK A.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
andriyzag@yahoo.com

Given two metric spaces (X, d_X) and (Y, d_Y) , let us recall that a map $f : X \rightarrow Y$ is said to be Lipschitz if there exists a real constant $C \geq 0$ such that $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)$ for all $x, y \in X$.

Let X and Y are Banach spaces. A linear operator $u : X \rightarrow Y$ is p-summing for $1 \leq p \leq \infty$ precisely when there is a constant $C \geq 0$ such that for $x_1, \dots, x_n \in X$ and regardless of the natural number n , we have

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

We consider a natural non linear version of p-summing operator which are named Lipschitz p-summing operators. The notion of Lipschitz p-summing operators was introduced by J. D. Farmer and W. B. Johnson in [1]. Suppose X and Y are metric spaces and $1 \leq p \leq \infty$. A Lipschitz map $T : X \rightarrow Y$ is Lipschitz p-summing if there is a constant C such that for all $(x_i), (y_i)$ in X and all positive reals a_i , we have

$$\left(\sum a_i \|T x_i - T y_i\|^p \right) \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p,$$

where $B_{X^\sharp}^\sharp$ is the unit ball of $X^\sharp$, $X^\sharp$ is the space of all real valued Lipschitz function and $\|x - y\|$ is the distance from x to y in Y .

In this report we show what results about p-summing operators and Lipschitz functions have analogues for Lipschitz p-summing operators.

- [1] J. D. Farmer and W. B. Johnson, *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (9) (2009), 2989–2995.

Про розриви нарізно неперервних відображень зі значеннями в прямій Зоргенфрея

МАСЛЮЧЕНКО В. К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@ukr.net

МИРОНИК О. Д.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
myronyk.oks@gmail.com

Множина $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень f та їх аналогів зі значеннями в прямій Зоргенфрея $\mathbb{L}$ вивчалася в працях [1, 2]. Зокрема, в [2] були встановлені такі результати.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, у якому кожна точка має зв’язний окіл, Y – довільний топологічний простір. Тоді кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{L}$ є неперервним за сукупністю змінних.*

Теорема 2. *Для довільної точки $a \in \mathbb{L}$ і довільної підмножини B раціональної прямої $\mathbb{Q}$ існує таке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{L}$, що $D(f) = \{a\} \times B$.*

Виникає природне питання про опис множин $D(f)$ для нарізно неперервних відображень $f : \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{L}$. Тут ми подаємо нові результати наших досліджень у цьому напрямку.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний простір, Y – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності і $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{L}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді для кожного $y \in Y$ множина*

$$D_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in D(f)\}$$

є першою категорії в X .

Зауважимо, що раніше подібні результати були встановлені для відображень зі значеннями в метризовних чи сильно σ -метризовних просторах, а пряма Зоргенфрея $\mathbb{L}$ не є навіть σ -метризовним простором.

Теорему 2 доповнює розв’язання ще однієї оберненої задачі.

Теорема 4. Нехай A – F_σ -множина першої категорії на прямій Зоргенфрея $\mathbb{L}$ і $b \in \mathbb{Q}$. Тоді існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{L}$, таке, що $D(f) = A \times \{b\}$.

Побудова використовує наступний опис відкритих множин в $\mathbb{L}$. Ми кажемо, що проміжок $I = (a, b)$ прилягає до проміжку $J = [c, d)$, якщо $b = c$. Так само проміжок $I = [a, b)$ прилягає до проміжку $J = [c, d)$, якщо $b = c$ або $a = d$.

Теорема 5. Нехай G – відкрита підмножина прямої Зоргенфрея $\mathbb{L}$. Тоді існує така не більша, ніж зліченна диз'юнктна система $\mathcal{I}$ непорожніх проміжків $I = (a, b)$ або $[a, b)$, кожний з яких не прилягає до іншого, що

$$G = \bigsqcup_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Якщо $\mathcal{I}$ та $\mathcal{J}$ – такі диз'юнктні системи непорожніх проміжків виду (a, b) чи $[a, b)$, кожний з яких не прилягає до іншого і

$$G = \bigsqcup \mathcal{I} = \bigsqcup \mathcal{J},$$

то $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

- [1] В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук, *Істотність σ -метризованості в результатах про сукупну неперервність КС-функцій*, Міжнар. конф., присв. 125 річч. від нар. Ганса Гана. Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р. Тези доповідей. Чернівці: Рута, (2004), 65–66.
- [2] В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Пряма Зоргенфрея та нарізно неперервні відображення*, Буков. мат. журн. (2014), **2** (1), 59–68.

Теореми про проміжну функцію для опуклих функцій

МАСЛЮЧЕНКО В. К.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
vmasyuchenko@ukr.net

МЕЛЬНИК В. С.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
windchange7@gmail.com

Добре відомо [1, с. 105], що для нормального простору X , неперервної зверху функції $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ і неперервної знизу функції $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X , існує така неперервна функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X . Це твердження, яке для метричних просторів довів ще Г. Ган [2], називають теоремою про проміжну функцію. Г. Тонг [3] і М. Катетов [4] узагальнили результат Гана на випадок нормальних просторів і показали, що теорема про проміжну функцію є характеристичною для нормальності у класі T_1 -просторів. Після цього з'явилося багато модифікацій і узагальнень цієї теореми (див. [5] і вказану там літературу). Недавно в [6] був знайдений новий аналог теореми про проміжну функцію: для зростаючої неперервної зверху функції $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і зростаючої неперервної знизу функції $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$ існує така зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. У зв'язку з цим постало природне питання: для яких ще властивостей функцій, крім зростання, можна встановити подібні аналоги теореми про проміжну функцію. Тут ми обговорюємо різні аналоги теореми про проміжну функцію для опуклих функцій.

Нагадаємо, що функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, яка визначена на опуклій підмножині E деякого дійсного векторного простору X називається *опуклою* або *опуклою вниз*, якщо для довільних елементів x_1 і x_2 з E і будь-яких скалярів λ_1 і $\lambda_2 \geq 0$, таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, виконується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Якщо завжди виконується протилежна нерівність $\geq$, то функція називається *вгнутою* або *опуклою вгору*. Легко перевірити, що функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ буде опуклою /вгнутою/ тоді і тільки тоді, коли її *строгий надграфік*

$$Gr^+(f) = \{(x, y) : x \in E \text{ і } y > f(x)\}$$

$$Gr^-(f) = \{(x, y) : x \in E \text{ і } y < f(x)\} /$$

буде опуклою множиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *афінною*, якщо існує такий лінійний функціонал $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$f(x) = \varphi(x) + \gamma$$

на X для деякого числа $\gamma \in \mathbb{R}$. Афінна функція на множині E — це звуження на E деякої афінної функції на X .

Наступне твердження зводить питання про існування проміжної афінної функції до теореми про відокремлення опуклих множин.

Теорема 1. *Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X , $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E . Тоді для того щоб існувала така афінна функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E , необхідно і досить, щоб множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ відокремлювались деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Якщо до того ж X — це топологічний векторний простір і внутрішність множини E непорожня, то для існування неперервної афінної функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, такої, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E необхідно і досить, щоб множини A і B відокремлювались замкненою гіперплощиною в $X \times \mathbb{R}$.*

Звідси, використавши теорему про відокремлення опуклої відкритої і опуклої множин [7, с. 23], отримуємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай E — відкрита опукла множина в дійсному топологічному векторному просторі X , $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна вгнута функція, $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E . Тоді існує така неперервна афінна функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E .*

В математичній енциклопедії [8, ст. 797] твердиться, що довільні диз'юнктні опуклі множини у дійсному векторному просторі відокремлюються деякою гіперплощиною. Звідси можна отримати відповідний результат про існування афінної проміжної функції для вгнутої і опуклої функцій g і h , заданих на довільній опуклій множині. Є ще теорема про відокремлення опуклих множин, в якій використовується поняття C -внутрішньої точки [9, с. 446], яку тут теж можна використати.

- [2] Hahn H. *Über halbstetige und unstetige Functionen* // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien.Math.-naturwiss.Kl.Abt.IIIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.
- [3] Tong H. *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces* // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.
- [4] Katetov M. *On real-valued functions in topological spaces* // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.
- [5] Маслоченко В. К., Мельник В. С. *Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — Київ: Інститут математики НАН України. — 2014. — **11**,№3 — С.173-181.
- [6] Маслоченко В.К., Петей С.П. *Поточкові границі неперервних монотонних функцій та обмеженої варіації* // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№2. — С.64-71.
- [7] Маслоченко В.К. *Елементи теорії двоїстості*. — Чернівці: Рута, 2005. — 160 с.
- [8] *Математическая энциклопедия. Т.1.* — М.:1977. — 1152 ст.
- [9] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория*. — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

Спектральні властивості оператора Шредінгера з безвідбивним потенціалом.

МЕЛЬНИК Б. О.

Львівський національний університет імені Івана Франка
bohdmelnyk@gmail.com

МИКИТЮК Я. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка
yamkytyuk@yahoo.com

В доповіді розглядається самоспряжений оператор Шредінгера, що діє у просторі $L_2(\mathbb{R})$ за формулою

$$T_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q,$$

у якій q є безвідбивним потенціалом спеціальної конструкції. Цей потенціал q ми будуємо наступним чином. Нехай H – сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot | \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$, а

$K : H \rightarrow H$ – обмежений додатний оператор з простим спектром. Позначимо через ρ циклічний вектор оператора K , який належить області визначення оператора $K^{-1/2}$. Можна довести, що тоді існує єдиний обмежений додатний оператор $\Gamma : H \rightarrow H$, для якого

$$K\Gamma + \Gamma K = (\cdot \mid \rho)\rho.$$

Задамо потенціал q формулою

$$q(x) = -4\|K^{1/2}e^{xK}(e^{2xK} + \Gamma)^{-1}\rho\|^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Основним результатом у доповіді є наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай q задано формулою (1), тоді*

- 1) *потенціал q є безвідбивним і $\|q\|_\infty \leq 2\|K\|$;*
- 2) *оператор T_q унітарно еквівалентний прямій сумі $T_0 \oplus (-K^2)$, де T_0 – незбурений оператор Шредінгера.*

- [1] V. A. Marchenko. *The Cauchy problem for the KdV equation with Non-decreasing initial data. Springer Ser. Nonlinear Dynamics, What is Integrability?* (V.E. Zakharov, Ed.), Berlin, (1991), 273-318.
- [2] F. Gesztesy, W. Karwowskiy, Z. Zhao. *Limits of soliton solutions.* Duke Mathematical Juurnal, Vol. 68, No 1, (1992).
- [3] S. Kotani *KdV Flow on Generalized Reflectionless Potentials* Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry vol. 4, No. 4, (2008), 490-528.
- [4] I. Hur, M. McBride, and C. Remling. *The Marchenko representation of reflectionless Jacobi and Schrödinger operators*, Trans. Amer. Math. Soc. published electronically on February 3, 2015.

Чисельні методи розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

МЕНТИНСЬКИЙ С. М.

Національний університет «Львівська політехніка»

omp@lp.edu.ua

ПЕЛЕХ Я. М.

Національний університет «Львівська політехніка»

omp@lp.edu.ua

Задачі будівельної механіки, електротехніки, автоматичного управління, хімічної кінетики, багатовимірної оптимізації і т.д. приводять до необхідності розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Використання наближених методів, що базуються на неперервних дробах, при виконанні певних умов, дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення.

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Вольтерра

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)] dy, \quad x \in I_L, \quad (1)$$

де $F[x, y, f(y)]$ – достатньо гладка функція в області

$$\Omega = \{(x, y, f) : y \leq x; y, x \in I_L, |f| < C\}.$$

Розділимо інтервал $I_L : [a, b]$ на N частин довжини $h = \frac{b-a}{N}$ і позначимо $x_{i+1} = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots$), $f_i = f(x_i)$, причому $f(1) = 0$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та ідею побудови методів Рунге-Кутта, наближений розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$Y_2^{[k,l]} = \frac{c_{0,0}}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}, \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned}
c_{0,0} &= h\delta_1, & d_{0,0} &= 1, & d_{1,0} &= \frac{\delta_2}{\delta_1}, \\
d_{2,0} &= \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}, & d_{1,1} &= \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}, & (\delta_1, \delta_2 \neq 0), \\
\delta_i &= \sum_{j=1}^p a_{ij}k_j, & k_j &= F \left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h \sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm} k_m \right], & \gamma_{j0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Виписемо, як приклад, два конкретних набори коефіцієнтів для методу другого порядку точності:

$$1). \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{1}{2}, \gamma_{21} = 12, a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = -1;$$

$$2). \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \gamma_{21} = 1, a_{11} = \frac{3}{4}, a_{12} = \frac{1}{4}, a_{21} = \frac{3}{4}, a_{22} = -\frac{3}{4};$$

а також два конкретні набори параметрів для методу третього порядку точності:

$$\text{А) } \alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = \frac{2}{3}, \gamma_{21} = 1, \gamma_{31} = \frac{4}{9}, \gamma_{32} = \frac{2}{9}, a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{21} = \frac{3}{4}, a_{22} = 0, a_{23} = -\frac{3}{4}, a_{3i} = 0, i = 1, 2, 3.$$

$$\text{Б) } \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{2}{3}, \beta_3 = 0, \gamma_{21} = \frac{2}{3}, \gamma_{31} = -1, \gamma_{32} = 1, a_{11} = a_{12} = 0, a_{13} = 1, a_{21} = 0, a_{22} = -\frac{3}{4}, a_{23} = \frac{3}{4}, a_{3i} = 0, i = 1, 2, 3.$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі (1) в наступних вузлових точках застосуємо метод рухомого початку та формули (2)-(3).

Про одне питання З. Гранде

МИРОНИК В. І.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vadmyron@gmail.com

МИХАЙЛЮК В. В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmykhaylyuk@ukr.net

Згідно з класичною теоремою Скорца-Драгоні [1] функція $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, вимірна відносно першій змінній і неперервна відносно другій змінній, за виключенням множини як завгодно малої міри, є неперервною за сукупністю змінних. Зокрема, така функція є $(L) - \text{sur}$ -вимірною, тобто такою, що для довільної вимірної функції $\varphi[a, b] \rightarrow [c, d]$ функція $f(x, \varphi(x))$ є вимірною. Дана властивість є важливою в теорії диференціальних рівнянь Каратеодорі (дивись, наприклад, [2]) і розвивалася у багатьох напрямках (дивись [3] і вказану там літературу). У недавній статті [4] було встановлено такий результат

Теорема 1. Нехай обмежена функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:

(1) для кожного $x \in X$ вертикальний розріз $f^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є квазінеперервним і напівнеперервним зверху;

(2) існує (зліченна) щільна в $\mathbb{R}$ множина B така, що для кожного $y \in B$ горизонтальний розріз $f_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є вимірним за Лебел'ом.

Тоді функція $f \in (L) - \text{sur-вимірною}$.

У зв'язку з цим результатом в [4] було поставлено таке питання.

Питання 2 (Z. Grande, [4]). Нехай локально обмежена функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови (1) і (2) теореми 1. Чи існує розв'язок Каратеодорі задачі Коші $y'(x) = f(x, y(x))$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$?

Наступний результат дає позитивну відповідь на дане питання при деяких додаткових умовах.

Теорема 3. Нехай функція $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:

(1) існує множина $A \subseteq [a, b]$ з $\mu(A) = b - a$ така, що для кожного $x \in A$ вертикальний розріз $f^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є квазінеперервним і напівнеперервним зверху;

(2) існує всюди щільна множина $B \subseteq \mathbb{R}$ така, що для кожного $y \in B$ горизонтальний розріз $f_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є вимірним за Лебел'ом;

(3) існує інтегровна за Лебел'ом функція $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ для будь-яких $(x, y) \in A \times \mathbb{R}$;

(4) для кожного $x \in A$ вертикальний розріз $f^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонно зростаючим.

Тоді для довільного $y_0 \in \mathbb{R}$ існує єдина максимальна абсолютно неперервна функція $z_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $z_0(x) = y_0 + \int_a^x f(t, z_0(t)) d\mu(t)$

Наступний приклад показує, що відповідь на питання 2 залишається негативною, навіть у випадку, коли функція f задовольняє властивість Дарбу відносно другої змінної.

Приклад 4. Існує напівнеперервна зверху квазінеперервна функція Дарбу $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ така, що задача Коші

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

не має розв'язків Каратеодорі.

- [1] *Scorza Dragoni G.* Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabili // Red. Sem. Mat. Univ. Padova, 17.- 1948.- P.102-106.
- [2] *Filippov A.* Differential equations with discontinuous righthand sides. (1988).
- [3] *Tolstonogov A.* Scorza-Dragoni's theorem for multi-valued mappings with domain of definition// Mat. Zametki, 48(5).- 1990.- P.109-120 (in Russian).
- [4] *Grande Z.* On the measurability of functions with quasi-continuous and upper semi-continuous vertical sections // Math. Slovaca, 63(4).- 2013.- P.793-798.

Універсальність оператора композиції на функціональних просторах

МОЖИРОВСЬКА З. Г.

Львівська комерційна академія
zoryana.math@gmail.com

Позначимо через $H_{bs}(\ell_p)$ алгебру Фреше симетричних цілих функцій на ℓ_p , які є обмеженими на обмежених підмножинах. Ця алгебра є поповненням простору симетричних поліномів на ℓ_p , яка наділена рівномірною топологією на обмежених підмножинах. В доповіді розглядаються умови універсальності (гіперциклічності) ([1]) оператора композиції на цій алгебрі $H_{bs}(\ell_p)$.

- [1] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **36** (1999), 345-381.

Про ослаблену неперервність оберненого відображення

НЕСТЕРЕНКО В. В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
math.analysis.chnu@gmail.com

Результати про наявність у оберненого відображення властивостей прямого зустрічаються в багатьох працях. Класичним результатом на цю тему є теорема про неперервність оберненої функції f^{-1} у неперервній бієкції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Те ж саме твердить класична теорема Банаха про обернений оператор для лінійної неперервної бієкції банахових просторів. Звичайно, не всі властивості прямого відображення автоматично переносяться на обернене. Так, З. Ґранде і Т. Натканец в [1] навели приклад квазінеперервної бієкції $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для якої обернене відображення f^{-1} не має властивості Бера, а отже, не є кліковим і тим більше не є квазінеперервним.

В цій замітці буде розглянуто деякі ослаблення неперервності на предмет наявності у оберненого відображення властивостей прямого.

Нам будуть потрібні наступні означення. Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$:

- *квазінеперервне у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X , така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;
- *псевдоквазінеперервне*, якщо для довільної відкритої непорожньої множини U в X та довільної множини E в X , такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X , така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$;
- *ледь неперервне у точці* $x \in X$, якщо $\text{int} f^{-1}(V) \neq \emptyset$ для кожного околу V точки $f(x)$ в Y ;
- *майже неперервне у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого околу V точки $f(x)$ в Y існує множина A в X , така, що $x \in \text{int} A$ і $f(A) \subseteq V$;
- *майже квазінеперервне у точці* $x \in X$, якщо для будь-яких околів V і U точок $f(x)$ і x відповідно в Y та X існує множина A в X , така, що $\text{int} A \neq \emptyset$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$;
- *майже ледь неперервне у точці* $x \in X$, якщо $\text{int} \overline{f^{-1}(V)} \neq \emptyset$ для кожного околу V точки $f(x)$ в Y ;

- має слабку властивість Дарбу, якщо образ $f(G)$ кожної області G з X є зв'язною множиною;
- перехідним у точці $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y , такі, що $W \subseteq V$ і $U \cap f^{-1}(fW) = \emptyset$.

Наступне твердження узагальнює результат з [1].

Твердження 1. Існує квазінеперервна бієкція $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною.

Твердження 2. Існує бієктивна функція $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, яке майже неперервна, але f^{-1} не є майже неперервною.

Твердження 3. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – квазінеперервна бієкція і f^{-1} – майже ледь неперервне відображення. Тоді f^{-1} – майже квазінеперервне відображення.

Твердження 4. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – майже квазінеперервна бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді f^{-1} – квазінеперервне відображення.

В [1] було встановлено, що для бієкції $f : X \rightarrow Y$ між метричними просторами X та Y з умови, що f і f^{-1} – ледь неперервні функції, випливає, що f і f^{-1} – клікові. Наступне твердження є модифікацією цього результату.

Твердження 5. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді відображення f і f^{-1} псевдоквазінеперервні.

Твердження 6. Нехай X – топологічний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – бієкція. Тоді f – перехідна функція.

Умова того, що функція f в твердженні 6 набуває значення в $\mathbb{R}$, є істотною. Існує бієкція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, яка не є перехідною.

З твердження 6 випливає наступний результат.

Теорема 7. Нехай X – локально зв'язний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – бієкція, яка має слабку властивість Дарбу. Тоді f – неперервне відображення.

- [1] Z. Grande, T. Natkaniec, *On quasi-continuous bijections*, Acta Math. Univ. Comenianae., **60** (1) (1991), 31–34.

Функціональна обернена задача наближення для скінченного числа підпросторів у F -просторах та лінійних нормованих просторах

НЕСТЕРЕНКО О. Н.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
NesterenkoON@ukr.net

ЦАРЕГОРОДЦЕВ Я. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
777Tsar777@mail.ru

С. Н. Бернштейн у 1938 році довів теорему про існування неперервної на відрізку функції з наперед заданою послідовністю величин її найкращих рівномірних наближень алгебраїчними многочленами. В. К. Маслюченко запропонував розглянути функціональну обернену задачу наближення алгебраїчними многочленами. Г. А. Волошин і В. К. Маслюченко [1] отримали існування розв'язку цієї задачі для випадку скінченної кількості підпросторів. Крім того, ці ж автори [2] одержали аналог теореми Бернштейна для F -просторів.

У даній роботі, використовуючи методи праць [1] і [2], ми отримуємо існування розв'язку функціональної оберненої задачі для скінченної кількості підпросторів для F -просторів та лінійних нормованих просторів.

Нехай X – F -простір над полем дійсних або комплексних чисел з квазінормою $|\cdot|$. Число $E(x, P) := \inf \{|x - y| : y \in P\}$ називається величиною найкращого наближення елемента $x \in X$ підпростором $P \subset X$.

Теорема 1. *Нехай T – топологічний простір, $n \in \mathbb{N}$, функції $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset C(T)$ такі, що $\alpha_1(t) \geq \dots \geq \alpha_n(t) \geq 0$ для всіх $t \in T$. Нехай також X – F -простір над полем дійсних або комплексних чисел, $\{X_1, \dots, X_n\}$ – набір підпросторів простору X і виконуються умови:*

- 1) *для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ підпростір X_k – чебишовська множина, причому оператор найкращого наближення $R_k : X \rightarrow X_k$ є неперервним;*

- 2) існує елемент $e \in X \setminus X_n$, для якого функція $[0, +\infty) \ni \lambda \mapsto E(\lambda e, X_n)$ строго зростає на $[0, +\infty)$ і $E(\lambda e, X_n) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$;
- 3) для кожного $k \in \{1, \dots, n-1\}$ існує елемент $e_{k+1} \in X \setminus X_k$ такий, що $X_{k+1} = \text{л.о.}(X_k \cup \{e_{k+1}\})$;
- 4) для всіх $k \in \{2, \dots, n\}$ і всіх $x \in X$ функція $[0, +\infty) \ni \lambda \mapsto E(x - R_k x + \lambda e_k, X_{k-1})$ строго зростає на $[0, +\infty)$ і прямує до $+\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Тоді існує така функція $\varphi \in C(T, X)$, що

$$E(\varphi(t), X_k) = \alpha_k(t) \text{ для всіх } t \in T \text{ і всіх } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Наслідок 2. Якщо X – F -простір з обмеженими скінченновимірними кулями, то теорема 1 залишається справедливою і в тому випадку, коли умову 2) замінити умовою 1') $\dim X_1 < +\infty$ і X_k – множина єдиності для всіх $k \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 3. Нехай X – лінійний нормований простір, $n \in \mathbb{N}$, $\{X_k | 1 \leq k \leq n\}$ – набір підпросторів такий, що $X_1 \subset \dots \subset X_n \subset X$, причому включення $X_n \subset X$ строге, і для всіх $k \in \{1, \dots, n\}$ X_k – множина єдиності, $\dim X_k = k$. Нехай також T – топологічний простір і функції $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset C(T)$ такі, що $\alpha_1(t) \geq \dots \geq \alpha_n(t)$ для всіх $t \in T$. Тоді існує функція $\varphi \in C(T, X)$, що задовольняє співвідношення (1).

Для випадку, коли $T = [0, 1]$ зі звичайною топологією, $X = C[0, 1]$, X_k – це підпростір алгебраїчних многочленів степеня не вище $k-1$ при $k \geq 1$, теорема 3 отримана в роботі [1].

- [1] Волошин Г. А., Маслюченко В. К., *Функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна* // Мат. студії. – 2010. – Т. 11, № 2. – С. 220–224.
- [2] Волошин Г. А., Маслюченко В. К., *Узагальнення однієї теореми Бернштейна* // Математичний вісник НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 62–72.

Наближення інтегралів Пуассона сумами Фейєра

НОВІКОВ О. О.

Донбаський державний педагогічний університет

РОВЕНСЬКА О. Г.

Донбаський державний педагогічний університет

o.rovenskaya@mail.ru

КОЗАЧЕНКО Ю. О.

Донбаський державний педагогічний університет

sgpi@slav.dn.ua

Позначимо [1] через $C_{\beta, \infty}^q$, $q \in (0; 1)$, $\beta \in R$, клас неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

де $P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а для функції $\varphi(x)$ виконано умову

$$\text{esssup} |\varphi(x)| \leq 1.$$

Задача наближення класів інтегралів Пуассона лінійними методами має багату історію, пов'язану з іменами С.М. Нікольського, С.Б. Стечкина, А.І. Степанця [1], А.С. Сердюка та інших.

Нехай $S_n(f; x)$ – суми Фур'є функції $f \in L$. Суми Фейєра функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x).$$

Теорема 1. *Нехай $q \in \left(0; \sqrt[3]{17/27 + \sqrt{11/27}} + \sqrt[3]{17/27 - \sqrt{11/27}}\right]$. Тоді для $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{0, \infty}^q, \sigma_n) = \sup_{f \in C_{0, \infty}^q} \|f - \sigma_n(f)\|_C = \frac{4}{\pi n} \left(\frac{q}{(1+q^2)} + \arctg q \right) + O(1) \frac{q^n}{n},$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена щодо n , q .

- [1] Степанец А.И. Приближение аналитических непрерывных функций. Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.

Методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з оцінкою головного члена локальної похибки

ПЕЛЕХ Р. Я.

Проектно-конструкторське технологічне бюро АСУ залізничного транспорту, м. Львів

ПЕЛЕХ Я. М.

*Національний університет «Львівська політехніка»
omp@lp.edu.ua*

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій в загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. За певних умов навантаження або припущень дану систему можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad (1)$$

де $y(x)$ — дійсний m -компонентний вектор, f — дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

Оскільки точні розв'язки досліджуваних математичних моделей вдається отримати лише в окремих випадках, то необхідно використовувати наближені методи. При розв'язуванні диференціальних рівнянь важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами.

У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближених методів, виникла необхідність розробки і дослідження двосторонніх алгоритмів.

В даному повідомленні пропонуються двосторонні числові алгоритми першого та другого порядку точності розв'язування задачі (1). Ці розрахункові формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^p K F(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} - відповідно точний і наближений розв'язок задачі(1), h - крок інтегрування, $F(f)$ - деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n) , K - константа, p - порядок точності, ω - параметр двосторонності.

Зауважимо, що у запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення $F(f)$ без додаткових звертань до правої частини диференціального рівнянь, що вигідно відрізняє ці схеми від відомих традиційних двосторонніх

Максимально негельфандові ідеали комутативної області Безу

ПІГУРА О. В.

*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,
Україна*

pihura.oksana@gmail.com

Всі розглядувані кільця є комутативними з одиницею і $1 \neq 0$.

Кільце R назвемо *гельфандовим*, якщо для довільної пари $a, b \in R$, для якої виконується умова $a + b = 1$, існують такі елементи $r, s \in R$, що $(1 + ar)(1 + bs) = 0$. Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R назвемо *гельфандовим*, якщо фактор-кільце R/aR є *гельфандовим*.

Ідеал I кільця R назвемо *гельфандовим ідеалом*, якщо I містить хоча б один *гельфандовий* елемент. У протилежному випадку ідеал I назвемо *негельфандовим*.

Негельфандовий ідеал N назвемо *максимально негельфандовим*, якщо для такого довільного ідеалу I , що $N \subset I$, $I \neq N$, існує *гельфандовий* елемент a , який належить I .

Означення 1. *Комутативну область Безу назвемо локально гельфандовою, якщо вона містить єдиний максимальний негельфандовий ідеал.*

Теорема 2. *Комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимальних негельфандових ідеалів є кільцем елементарних дільників.*

Теорема 3. *Комутативна область Безу R є областю з єдиним максимальним негелфандовим ідеалом тоді і лише тоді, якщо для таких довільних $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гелфандовим.*

Теорема 4. *Комутативна область Безу R є локально гелфандовою тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ або a або $1 - a$ є гелфандовим елементом.*

Теорема 5. *Довільна локально гелфандова область Безу є кільцем елементарних дільників.*

- [1] Kaplansky I. Commutative Rings. // Chicago and London: The University of Chicago Press – 1974.
- [2] Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over rings. // Mathematical Studies, Monograph Series. 2012 vol XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, P 251.

Logarithmic h –measure and entire Dirichlet series with monotonous coefficients

PANCHUK S. I.

Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
s.panchuk@lnu.edu.ua

SALO T. M.

National University "Lviv's'ka Politekhnik", Ukraine
tetyan.salo@gmail.com

SKASKIV O. B.

Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
olskask@gmail.com

Let $\mathcal{D}$ be a class of entire Dirichlet series of the form $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z \in \mathbb{C}$, where a sequence (λ_n) such that $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ($n \geq 0$), $\lambda_n \neq \lambda_k$ for any $n \neq k$ and $(\forall n \geq 0) : 0 \leq \lambda_n < \beta := \sup\{\lambda_j : j \geq 0\} \leq +\infty$. For $F \in \mathcal{D}$ and $x \in \mathbb{R}$ we denote $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$, $\nu(x, F) = \max\{n : |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$. By $\mathcal{D}_a$ we denote a subclass of Dirichlet series $F \in \mathcal{D}$ with a fixed sequence $a = (|a_n|)$, $|a_n| \searrow 0$ ($n_0 \leq n \rightarrow +\infty$) and $\mu_n := -\ln |a_n|$ ($n \geq 0$).

Let Φ be positive continuous increasing function on $[0; +\infty)$. Denote $\mathcal{D}_a(\Phi) = \{F \in \mathcal{D}_a : \ln \mu(x, F) \geq x\Phi(x) \ (x \geq x_0)\}$. It is known [1] that for every entire function $F \in \mathcal{D}_a$ the relation

$$F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x, F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x, F)}} \quad (A)$$

holds as $x \rightarrow +\infty$ outside some exceptional set E of finite logarithmic measure, i.e. $\log\text{-meas}(E) := \int_E d \ln x < +\infty$, uniformly in $y \in \mathbb{R}$, if and only if

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty. \quad (B)$$

In [2] it is proved that the finiteness of logarithmic measure of an exceptional set E is the sharp estimate in the class $\mathcal{D}_a$. Due to this statement the natural **question** arises: what conditions must satisfy the entire Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_a$ such that relation (A) holds for $x \rightarrow +\infty$ outside some set E of finite logarithmic h-measure, i.e. $h\text{-log-meas}(E) := \int_E h(x)d \ln x < +\infty$? In article [3] we give the answer to this question. Our main result is the following.

Theorem ([3]). *Let (μ_n) be a sequence such that condition (B) holds, h be a positive continuous functions increasing to $+\infty$ on $[0; +\infty)$ and φ the inverse function to function Φ . If $F \in \mathcal{D}_a(\Phi)$ and*

$$(\forall b > 0): \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\left(\varphi(\lambda_n) \cdot \left(1 + \frac{b}{\mu_{n+1} - \mu_n}\right)\right) \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \quad (C)$$

then the relation (A) holds as $x \rightarrow +\infty$ outside some set E of finite logarithmic h-measure uniformly in $y \in \mathbb{R}$.

Питання 1. Is the description of exceptional sets in our Theorem the best possible?

Питання 2. Is condition (C) in our Theorem necessary?

- [1] O.B. Skaskiv. *On the minimum of the absolute value of the sum for a Dirichlet series with bounded sequence of exponents*, Mat. Zametki **56**(5) (1994) 117–128. (in Russian). English translation in Math. Notes **56**(5) (1994) 1177–1184.
- [2] Ya. Stasyuk. *On the Dirichlet series with monotonous coefficients and the finality of description of the exeptional set*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **5** (2008) 202–207. (in Ukrainian)

- [3] Т.О. Salo, S.I. Panchuk, O.B. Skaskiv. *Entire Dirichlet series with monotonous coefficients and logarithmic h-measure* // arXiv: 1512.08032v1 [math.CV] 25 Dec 2015. – 10 p.

Оцінки $\ln \mu(r, \varphi)$ знизу для функцій скінченного порядку

ПЛАЦИДЕМ М. І.

Львівський національний університет

імені Івана Франка

marta.platsydem@gmail.com

Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, \infty)$ функція F називається ймовірносним законом, якщо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

а характеристичною функцією закону F називається функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Якщо функція φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, то вона називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Відомо, що для того, щоб характеристична функція φ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і досить, щоб для кожного $r \in [0, R)$

$$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), x \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Через $\Omega(-\infty, R)$, $0 < R \leq +\infty$, позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, R)$. Для функції $\Phi \in \Omega(-\infty, R)$ нехай

$\Psi(r) = r - \frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном, а ϕ - функція, обернена до Φ' .

Для $\Phi \in \Omega(0, R)$, $\Phi'(r_0) < a < b < +\infty$ прийемо

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{\Phi(\phi(t))}{t^2} dt \quad (3)$$

i

$$G_2(a, b, \Phi) = \Phi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t) dt \right). \quad (4)$$

Лема 1. Нехай $\Phi \in \Omega(0, R)$, $0 < R \leq +\infty$, а φ - аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірностного закону F , який задовольняє умову

$$\lim_{r \uparrow R} W_F(x) e^{Rx} = +\infty \quad (5)$$

i

$$\ln W_F(x_k) \geq -x_k \Psi(\phi(x_k)) \quad (6)$$

для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k) додатних чисел. Тоді для всіх $r \in [\phi(x_k), \phi(x_{k+1})]$ і всіх $k \geq k_0$ правильні непокрайовані оцінки

$$\ln \mu(r, \varphi) \geq \Phi(r) - (G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi) - G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi)), \quad (7)$$

$$\ln \mu(r, \varphi) \geq \Phi(r) \frac{G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi)}{G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi)} \quad (8)$$

i

$$\Phi^{-1}(\ln \mu(r, \varphi)) \geq r - (\Phi^{-1}(G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi)) - \Phi^{-1}(G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi))), \quad (9)$$

$$\Phi^{-1}(\ln \mu(r, \varphi)) \geq r \frac{\Phi^{-1}(G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi))}, \quad (10)$$

де Φ^{-1} - функція, обернена до Φ .

Теорема 2. Нехай φ - ціла характеристична функція ймовірностного закону F такого, що

$$\ln W_F(x_k) \geq -\frac{\rho-1}{\rho} \left(\frac{1}{T\rho} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \quad \rho > 1, T > 0, \quad (11)$$

для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k) додатних чисел. Тоді:

1) якщо $x_{k+1} - x_k \leq h(x_k)$ для $k \geq 1$, де функція h додатна, неперервна та неспадна на $[0, +\infty)$ і $h(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\ln \mu(r, \varphi) \geq Tr^\rho - \frac{(1+o(1))}{8T\rho(\rho-1)} r^{2-\rho} h^2(T\rho r^{\rho-1}), \quad r \rightarrow +\infty; \quad (12)$$

2) якщо $x_{k+1} \leq x_k \omega(x_{k+1})$ для $k \geq 1$, де ω - неперервна незростаюча на $[0, +\infty)$ функція і $\omega(x) > 1$ для всіх $x \geq 0$, то для всіх досить великих значень r

$$\ln \mu(r, \varphi) \geq \frac{T\rho^\rho r^\rho}{(\rho-1)^{\rho-1}} f(\omega(T\rho r^{\rho-1})),$$

$$f(\omega) = \frac{\omega(\omega - 1)^{\rho-1}(\omega^{\frac{1}{\rho-1}} - 1)}{\left(\omega^{\frac{\rho}{\rho-1}} - 1\right)^{\rho}}. \quad (13)$$

Квазі-евклідові дуо кільця з елементарною редукцією матриць

РОМАНІВ О. М.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна
 oromaniv@franko.lviv.ua

САГАН А. В.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна
 andrijsagan@gmail.com

Всі розглядувані в даній роботі кільця є асоціативними з відмінною від нуля одиницею.

Правим (лівим) дуо-кільцем називається кільце, в якому довільний правий (лівий) ідеал є двобічним. Кільце називають дуо-кільцем, якщо воно є правим і лівим дуо-кільцем одночасно.

Якщо на кільці R заданий *правий квазі-алгоритм*, тобто задана така функція $\varphi : R \times R \rightarrow W$, де W — ординал, що для довільних $a, b \in R$, $b \neq 0$, існують такі $q, r \in R$, що $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$, то кільце R називається *правим квазі-евклідовим* [1].

Кільце R називають *правим кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ і оборотна матриця P такі, що $(a, b)P = (d, 0)$. Кільце R називається *правим кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений правий ідеал кільця R є головним.

Кільце R має *стабільний ранг один*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує такий елемент t , що $a + bt = u$, де u — оборотний елемент кільця R .

Кільце R називається *кільцем з властивістю заміни*, якщо для будь-якого елемента $a \in R$ існує ідемпотент $e \in R$, такий, що $e \in aR$ і $1 - e \in (1 - a)R$. Кільце R називається *кільцем з властивістю напівзаміни*, якщо фактор-кільце $R/J(R)$ є кільцем з властивістю заміни.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [2], якщо для довільної матриці A над кільцем R існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \dots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \dots \cdot Q_s = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

Всі інші необхідні означення можна знайти в роботах [1, 2, 3].

Твердження 1. Нехай R — праве квазі-евклідове кільце, тоді R — праве кільце Ерміта.

Теорема 2. Дуо-кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем з елементарною редуцією матриць.

Теорема 3. Дуо-кільце Безу з властивістю напів-заміни є кільцем з елементарною редуцією матриць.

Теорема 4. Квазі-дуо-кільце Безу з властивістю напівзаміни є кільцем з елементарною редуцією матриць тоді і тільки тоді, коли R — дуо-кільце.

- [1] B. Bougaut *Anneaux Quasi-Euclidiens* These de docteur troisieme cycle. –1976, 67p.
- [2] B. V. Zabavsky *Rings with elementary reduction matrix* Ring Theory Conf., Miskolc, July 15-20, 1996.
- [3] B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings* Mathematical Studies, Lviv, 2012.

On some generalization of adequate duo-ring

RONSKA N.

Lviv national Ivan Franko university

Nataliarr@ukr.net

All rings considered will be associative and have identity.

A ring R is a right (left) duo ring if it satisfies the following equivalent conditions:

- (i) Each right (left) ideal of R is an ideal;
- (ii) For each $x \in R$, $Rx \subseteq xR$ ($Rx \supseteq xR$).

An element $a \neq 0$ of a Bezout domain R is called right adequate element if for any $b \in R$ there exists such elements $r, s \in R$, that

- (i) $a = rs$;
- (ii) $bR + rR = R$;
- (iii) $\forall s' \in R, sR \subset s'R \neq R \Rightarrow bR + s'R \neq R$.

A ring in which any nonzero element is right adequate is called a right adequate ring.

A duo ring R is said to be right avoidable ring if for any elements $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ such that $aR + bR + cR = R$ there exists elements $r, s \in R$ such that $c = rs$, where $rR + aR = R$, $sR + bR = R$ and $rR + sR = R$.

A ring R is called an elementary divisor ring if every matrix A with coefficients in R admits diagonal reduction, that is, if $A \in M_{m,n}(R)$, then there exists invertible matrices $P \in GL_m(R)$ and $Q \in GL_n(R)$ such that $PAQ = D$ with $D = (d_{ij})$ diagonal (i.e, $d_{ij} = 0$ if $i \neq j$) and every d_{ii} is a total divisor of $d_{i+1,i+1}$.

Theorem 1. A duo Bezout domain is an avoidable ring if and only if for any $c \in R \setminus \{0\}$ factor ring R/cR is a clean ring.

Theorem 2. An adequate duo Bezout domain is an avoidable domain.

Theorem 3. An avoidable duo Bezout domain is an elementary divisor ring.

- [1] Gatalevych A.I., On adequate and generalized adequate duo-rings and elementary divisor duo-rings Matematychni Studii 01/1998, 115-119. (In ukrainian).
- [2] I.Kaplansky, Elementary divisor rings and modules, Trans. Amer. Math. Soc. 66(1949) p.464-491.
- [3] W. K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 269-278.

Про співвідношення Бореля для рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле

СКАСКІВ О. Б.

Львівський національний університет імені Івана Франка
olskask@gmail.com

ТАРНОВЕЦЬКА О. М.

Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут"
savinska.olga@mail.ru

ТРУСЕВИЧ О. М.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
trusev14@gmail.com

Нехай L -клас додатних неспадних до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функцій, а $S(\lambda, \beta, \tau)$ клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0),$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ невід'ємні послідовності, $\tau(x)$ – додатна неспадна на $[0; +\infty)$ функція. Через $S(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$, $\Phi \in L$, позначимо підклас класу $S(\lambda, \beta, \tau)$, в який входять функції F , для яких $\ln F(x) \leq \Phi(x)$ ($x \geq x_0$).

Для $x \geq 0$ визначимо $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

Правильне таке твердження.

Теорема 1. Нехай $\tau'(x) \geq 1$ ($x > 0$). Якщо $F \in S(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$, $\Phi \in L$, і виконується умова

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \alpha_k \leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\alpha_k} = 0, \quad \alpha_k = \lambda_k + \beta_k, \quad (A)$$

то співвідношення Бореля $\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ справджується при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності, тобто $DE := \varlimsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{E \cap [0, R]} dx = 0$.

Твердження теореми раніше доведено ([1]) в класі $S(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$, який, наприклад, у випадку $\Phi(x) = x^\rho$, $\rho > 0$ є істотно вужчим за клас $S(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$.

Припущення. 1. Умова (A) є і необхідною для того, щоб співвідношення Бореля виконувалось для кожної функції $F \in S(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності.

2. Опис виняткової множини в нашій теоремі істотно покращити не можна.

- [1] О.Б. Скасків, О.М. Трусевич. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів* // Препринт № 17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.

Діофантові умови розв'язності однієї нелокальної задачі для факторизованого гіперболічного оператора парного порядку

САВКА І. Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

s-i@ukr.net

Гой Т. П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

tarasgoi@yahoo.com

Діофантові умови розв'язності часто зустрічаються в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях через так звану проблему малих знаменників [1, 2].

Зокрема, проблема малих знаменників виникає при дослідженні розв'язності крайової задачі для факторизованого гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами з нелокальними умовами за часовою змінною t та умовами періодичності за просторовими змінними $x = (x_1, \dots, x_p)$:

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta + c_j^2 \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega_{2\pi}^p, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} + \mu_2 \frac{\partial^{j-2} u(t, x)}{\partial t^{j-2}} \Big|_{t=0} + \mu_3 \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} - \\ - \mu_2 \frac{\partial^{j-2} u(t, x)}{\partial t^{j-2}} \Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (2)$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_m \neq c_j$ ($m \neq j$), $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$, $\mu_2 \neq 0$, $T > 0$, $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p -вимірний тор, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $u_t^{(-1)} \equiv \int_0^t u(t, \tau) d\tau$.

Нехай $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}$, $\lambda_{sk} = \sqrt{a_s^2 \|k\|^2 + c_s^2}$,

$$M_{sk}^\pm = \mu_1 + \mu_3 \exp(\pm i \lambda_{sk} T) + \mu_2 (\pm i \lambda_{sk})^{-1} (1 - \exp(\pm i \lambda_{sk} T)), \quad (3)$$

де $s \in \{1, \dots, n\}$.

У роботі показано, що діофантові умови коректної розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболева мають вигляд нерівностей для малих знаменників M_{sk}^+ і M_{sk}^- , визначених у (3):

$$|M_{sk}^\pm| \geq C \|k\|^{-\gamma}, \quad s = 1, \dots, n, \quad (4)$$

які повинні виконуватись з деяким показником $\gamma \in \mathbb{R}$ та деякою сталою $C > 0$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для довільного фіксованого параметра $T > 0$ виконання нерівностей (4) доведено з показником $\gamma = 1$, якщо

$$(|\mu_1| - |\mu_3|)^2 + \text{Im}^2 \left(\frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_2} \right) \neq 0. \quad (5)$$

Якщо нерівність (5) не виконується, то за допомогою метричного підходу доведено виконання діофантових умов (4) тільки для майже всіх за мірою Лебега значень параметра $T > 0$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівності (4) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > p + 1$.*

Зауважимо, що оператори вигляду (1) виникають у квантовій теорії поля. Наприклад, компоненти деякого поля Q , які відповідають вільним елементарним частинкам з різними масами $m_1, \dots, m_n$, повинні задовольняти рівняння [3]

$$\prod_{j=1}^n \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_j^2 \right) Q = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

- [1] Ільків В. С., Пташник Б. Й. *Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників*, Укр. мат. журн., **58** (12) (2006), 1624–1650.

- [2] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наук. думка (2002), 416 с.
- [3] Умэдзава Х. *Квантовая теория поля*, М.: Изд-во иностр. лит. (1958), 380 с.

Про потужність множини виключних значень в розумінні Валірона для мероморфних функцій

САВЧУК Я. І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
math@nung.edu.ua

Характеристикою росту цілої функції $f(z)$ її максимум $M(r, f)$ її модуль в крузі $\{|z| \leq r\}$, який досягається на колі $\{|z| = r\}$. Виявляється, що з цією характеристикою тісно пов'язана величина

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r,$$

де $n(r, a, f)$ — кількість a -точок з врахуванням їх кратності в крузі $\{|z| \leq r\}$, яка для «більшості» a -точок еквівалентна $\ln M(r, f)$.

Характеристика росту $T(r, f)$ для мероморфної в C функції, яку можна вважати часткою двох цілих, визначається по-іншому [1], однак для «більшості» a -точок також $N(r, a, f) \sim T(r, f)$ при $r \rightarrow \infty$. Ті a -точки, для яких це порушується, природно назвати виключними значеннями. Зокрема, якщо $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} < 1$, то a називається виключним значенням в розумінні Валірона. Множину усіх таких значень позначають $E_V(f)$.

Множину $U \subset C$ назовемо H -множиною, якщо існують $\alpha > 0$ та числа $a_1, a_2, \dots \in C$, такі що для довільного $a \in U$ виконується $|a - a_n| < \exp(-e^{n\alpha})$ для нескінченної кількості значень n .

В [2] показано, що для будь-якої H -множини U існує така мероморфна функція скінченного порядку, що $U \subset E_V(f)$. В [3] отримано уточнення цього результату.

Мною побудовано H -множину, яка має потужність континуум. Тим самим показано, що для мероморфних функцій $f(z)$ множина $E_V(f)$ може мати потужність континуум.

- [1] Хейман У. *Мероморфные функции* – М.: Мир, 1966. – 287 с.
- [2] Hylltngren A. *Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane*, Acta math. **124**, (1 - 2) (1970), 1–8.
- [3] Савчук Я.І. *Мероморфні функції скінченного порядку із заданою множиною валіронівських дефектних значень*, Прикарпатський вісник НТШ. Число. **1**, (2008), 37–42.

Про суперпозицію абсолютно неперервних функцій

САФОНОВ В. М.

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
safonov_v_m@ukr.net

Як відомо, Н. К. Барі і Д. Є. Меньшов повністю охарактеризували клас функцій, які є суперпозиціями абсолютно неперервних функцій [1]. У зв'язку з цим, в термінах категорії дамо уточнення характеристики такого класу функцій [2].

Сформулюємо запропоновану С. Банахом таку умову [1].

Нехай f – скінченна функція однієї дійсної змінної. Функція f задовольняє умову (T_1) на відрізку $[a, b]$, якщо майже кожне своє значення вона набуває на цьому відрізку не більше ніж скінченне число разів.

У подальшому потрібна і така умова, введена М. М. Лузіним [1].

Функція f задовольняє умову (N) на множині E , якщо вона кожному підмножині міри нуль цієї множини перетворює в множину, що має міру нуль.

Доповненням до результату Н. К. Барі є таке твердження.

Теорема 1. *Будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція f , що має множину незліченних рівнів першої категорії і задовольняє умову (T_1) , є на цьому відрізку суперпозицією двох неперервних функцій, з яких внутрішня має обмежену варіацію і монотонна на кожній компоненті деякої відкритої скрізь щільної множини $G = \bigcup_i G_i \subset [a, b]$, а зовнішня зростає і абсолютно неперервна. Якщо, далі, функція f задовольняє умову (N) , то f є суперпозицією двох абсолютно неперервних функцій, з яких зовнішня зростає, а внутрішня монотонна на компонентах G_i множини G .*

- [1] Сакс С., *Теория интеграла*. – М.: ИЛ, 1949. – 495 с.
- [2] Сафонов В. М., *Про зліченно-кратні функції* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Аналіз і застосування /. – 2012. – 9, №2. – К.: Ін-т математики НАН України, 2012. – С. 341–346.

Про вимірність множини точок максимальної кратності при многозначному відображенні

САФОНОВА О. В.

*Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ,
Україна
olechkadeadin@ukr.net*

ЗЕЛІНСЬКИЙ Ю. Б.

*Інститут математики НАН України, Київ, Україна
zel@imath.kiev.ua*

Нехай X та Y – топологічні простори, F – многозначне відображення.

Означення 1. Відображення $F : X \rightarrow Y$ назвемо простим, якщо для довільної пари точок $x, y \in X$ виконується одна із умов: $F(x) = F(y)$ або $F(x) \cap F(y) = \emptyset$.

Означення 2. Відображення $F : X \rightarrow Y$ назвемо відкритим, якщо образ відкритої множини є відкритою множиною.

Означення 3. Назвемо відображення $F : X \rightarrow Y$ ациклічним, якщо образ $F(x)$ кожної точки $x \in X$ є множиною, для якої усі зведені групи когомологій дорівнюють нулю [1].

Означення 4. Назвемо відображення $F : X \rightarrow Y$ нульвимірним, якщо $\dim F^{-1}(y) \leq 0$ для будь-якої точки $y \in Y$ [2].

Означення 5. Відображення $F : X \rightarrow Y$ називається напівнеперервним зверху в точці $x \in X$, якщо для будь-якої відкритої множини $V \subset Y$, такої, що $F(x) \subset V$, існує окіл $U(x)$ точки x , такий, що $F(U(x)) \subset V$. Відображення F називається напівнеперервним зверху, якщо воно напівнеперервне зверху в кожній точці $x \in X$.

Припустимо, що M, N – n -вимірні многовиди; $D \subset M$ і $D_1 \subset N$ – відкриті зв'язні області; $\overline{D}$ – замикання області D , $IntD$ – внутрішні точки області D , ∂D – межа області D .

Для багатовимірних ациклічних напівніперервних зверху простих відображень має місце така теорема.

Теорема 6. *Нехай $F : \overline{D} \rightarrow \overline{D_1}$ – багатовимірне відображення області степеня k таке, що $F(\partial D) \cap F(IntD) = \emptyset$. Тоді, або F є відкритим відображенням, або існує точка в образі, яка має щонайменше $|k| + 2$ прообразів. Якщо F -нульвимірне відображення, то у другому випадку множина точок образа, що мають не менше ніж $|k| + 2$ прообразів, має повну вимірність n .*

Аналог цього результату для власного неперервного відображення замкнутої області на многовиді отримано в роботах [3, 4, 5]. Умова простоти відображення в теоремі є суттєвою. На це вказує приклад багатовимірного відображення F замкнутого круга $B^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ на себе з властивістю

$$F(x, y) = \begin{cases} (x, y), & (x, y) \neq (0, 0); \\ \{(x_1, y) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}; y = 0\}, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- [1] Э. Спенсьер, *Алгебраическая топология*. – М.: Мир, 1971 – 680 с.
- [2] П.С. Александров, Б.А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*. – М.: Наука, 1973 – 576 с.
- [3] Ю.Б. Зелинский, *О некоторых проблемах Косинского* // Укр. матем. журнал. – 1975. – **27**, №4. – С. 510–516.
- [4] Ю.Б. Зелинский, *О кратности непрерывных отображений областей* // Укр. матем. журнал. – 2005. – **57**, №4. – С. 554–558.
- [5] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Інституту математики НАНУ. – **73**. – 2008. – 308 с.

Оцінки малих знаменників у задачі про малі поперечні періодичні коливання пучка струн

СКОВРОНСЬКА І. Я.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
litodana@gmail.com

СИМОТЮК М. М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net

Нехай H_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір тригонометричних рядів $\varphi(t) = \sum_k \varphi_k e^{ikt}$,
для яких

$$\|\varphi; H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|)^{2\alpha} |\varphi_k|^2} < \infty,$$

$C^n(I, H_\alpha)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$, I — відрізок дійсної прямої) — простір функцій

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x) e^{ikt}, \quad u_k \in C^n(I), \quad k \in \mathbb{Z},$$

таких, що для кожного фіксованого $x \in I$ похідні $\partial^j u(x, \cdot) / \partial x^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за x на I ; норму в просторі $C^n(I; H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u(x, t); C^n(I, H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^n \max_{x \in I} \|\partial^j u(x, t) / \partial x^j; H_\alpha\|.$$

Розглянемо задачу про знаходження функцій $u_i(x, t) \in C^2([0, l_i]; H_\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, які справджують рівняння

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = p_i \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} + f_i(x, t), \quad \rho_i, p_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in (0; l_i), \quad (1)$$

та умови

$$u_1(l_1, t) = \dots = u_n(l_n, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_1(0, t) = \dots = u_n(0, t), \quad (3)$$

$$m u_1(0, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial u_i(0+, t)}{\partial x} = \varphi(t), \quad m, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0. \quad (4)$$

До задачі (1)–(4) зводиться опис [1] малих поперечних коливань системи з n однорідних струн, натягнутих у формі зірки, з одним спільним внутрішнім кінцем, всі інші кінці струн є закріпленими.

Позначимо: $a_i = \sqrt{\rho_i/p_i}$, $i = 1, \dots, n$, $a(k)$ — стовпець довжини n , елементами якого є числа $\cos(a_1 l_1 k), \dots, \cos(a_n l_n k)$, $D(k)$ — діагональна матриця розміру n з елементами $\sin(a_1 l_1 k), \dots, \sin(a_n l_n k)$ на головній діагоналі, b — рядок довжини n , елементами якого є числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $A(k)$ — блочна матриця розміру $n + 1$:

$$A(k) = \begin{vmatrix} a(k) & D(k) \\ m & b \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Розв’язність задачі (1)–(4) залежить від діофантових властивостей визначників $\Delta(k) = \det A(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, що входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів рядів Фур’є, якими зображуються функції $u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$. На підставі метричного підходу [2, 3] встановлено оцінки знизу знаменників $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Теорема 1. *Нерівність $|\Delta(k)| \geq |k|^{-\varkappa}$ виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}_+^n$) векторів $(l_1, \dots, l_n)$ для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k при $\varkappa > 2$.*

- [1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* — М.: Физматлит, 2004. — 267 с.
- [2] Пташник Б.И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.
- [3] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.

Про малі знаменники багатоточкової задачі для параболічного рівняння високого порядку

СИМОТЮК М. М.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

ТИМКІВ І. Р.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

tymkiv_if@ukr.net

Нехай $L = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - q(x)$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, — еліптичний диференціальний вираз, коефіцієнти $p_{ij}(x), q(x)$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, якого є додатними і досить гладкими в обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂G ; $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — додатні власні значення задачі $LX + \lambda X = 0$, $X|_{\partial G} = 0$, яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$; $E_{\alpha,\beta}^b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$, — простір функцій $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\varphi; E_{\alpha,\beta}^b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \lambda_k^{2\alpha} \exp(2\beta \lambda_k^b)}$.

Для параболічного рівняння

$$W \left(\frac{\partial}{\partial t}, L \right) u \equiv \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{b(n-r)} A_r^s (-L)^s \frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} = 0, \quad (1)$$

розглянемо задачу з такими умовами

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(L) \frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} \Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad 0 \leq N_j \leq n-1, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

$$L^m u(t, x) \Big|_{\partial G} = 0, \quad m \in \{0, 1, \dots, (bn-1)\}, \quad (3)$$

де $A_r^s \in \mathbb{C}$, $a_r^j(L) = \sum_{i=0}^M a_{r,i}^j L^i$, $a_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $a_{N_j, M}^j \neq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T$.

При дослідженні коректності розв'язності задачі (1)–(3) у шкалі просторів $C^n([0, T]; E_{\alpha,\beta}^b)$ виникає потреба оцінити знизу модулі визначників

$$\Delta(k) = \prod_{1 \leq j < q \leq n} \frac{1}{\mu_q(k) - \mu_j(k)} \det \left\| \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k) \mu_q^r(k) \exp(\mu_q(k)t_j) \right\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\mu_q(k)$, $q \in \{1, \dots, n\}$, — різні корені рівняння $W(\mu, \lambda_k) = 0$. Ці корені справджують умову $\operatorname{Re} \mu_q(k) \leq -\delta_1 \lambda_k^b$, $q \in \{1, \dots, n\}$, де $\delta_1 > 0$. Позначимо: $\delta_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \max_{q \in \{1, \dots, n\}} \{|\operatorname{Re} \mu_q(k)| / \lambda_k^b\}$, $\omega_0 = n(n-1)(p/2+b)/2 - ((N_1 + \dots + N_n)b + n(M-1))$. На підставі метричного підходу [1] встановлено такий результат.

Теорема 1. Для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) та умов (2) і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$ нерівність

$$|\Delta(k)| \geq \lambda_k^{-\omega} \exp(-\nu \lambda_k^b) \quad (4)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) натуральних k , якщо $\omega > \omega_0$, $\nu \geq n\delta_2 T$.

Для деяких класів параболічних рівнянь оцінки (4) вдається встановити для довільних різних фіксованих $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння (1). Зокрема, якщо рівняння (1) допускає факторизацію вигляду

$$\prod_{q=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=0}^b A_q^s (-L)^s \right) u(t, x) = 0, \quad A_q^s \in \mathbb{C}, \quad 0 < \delta_3 < \operatorname{Re} A_1^b < \dots < \operatorname{Re} A_n^b < \delta_4,$$

встановлено таке твердження.

Теорема 2. Для довільних різних фіксованих чисел $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\operatorname{Re} A_1^b, \dots, \operatorname{Re} A_n^b) \in [\delta_3, \delta_4]^n$ нерівність

$$|\Delta(k)| \geq \lambda_k^{-\omega_1} \exp(-\nu_1 \lambda_k^b)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) натуральних k , якщо $\omega_1 > \omega_0 + \theta$, $\nu_1 \geq \delta_3(t_1 + \dots + t_n)$, де $\theta = \sum_{j=1}^n N_j(n-j+1)p/2 - N_1 p/2$.

Отримані результати узагальнюють дослідження, проведені в [1, 2], на випадок загальніших багатоточкових умов (2).

[1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.

- [2] Пташник Б.Й., Тимків І.Р. Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 1. – С. 15–26.

Метричні оцінки задачі з двома вузлами для системи навантажених гіперболічних рівнянь другого порядку

СИМОТЮК М. М.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С.
Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net*

ХОМЯК Д. В.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С.
Підстригача НАН України
khomiak.dmytro@gmail.com*

Розглянемо задачу

$$L(\partial_t, \partial_x) \vec{u}(t, x) \equiv \vec{u}_{tt} + A_1 \vec{u}_{tx} + A_2 \vec{u}_{xx} = \vec{f}(t, x) + \sum_{j=1}^M B_j \vec{u}(\tau_j, x), \quad (1)$$

$$\vec{u}(t_1, x) = \vec{\varphi}_1(x), \quad \vec{u}_t(t_2, x) = \vec{\varphi}_2(x), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

де $t \in (0, T)$, Ω — коло одиничного радіуса, $\vec{u}(t, x) = \text{col}(u^1(t, x), \dots, u^m(t, x))$, $\vec{f}(t, x) = \text{col}(f^1(t, x), \dots, f^m(t, x))$, $\vec{\varphi}_j(x) = \text{col}(\varphi_j^1(x), \dots, \varphi_j^m(x))$, $j = 1, 2$, A_1, A_2, B_j , $j = \overline{1, M}$, — квадратні матриці розміру m з комплексними елементами, L — строго гіперболічний вираз, $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_M \leq T$, $\{t_1, t_2\} \cap \{\tau_1, \dots, \tau_M\} = \emptyset$.

Позначимо: μ_q , $q = \overline{1, 2m}$ — корені рівняння $\|L(\mu_q, i)\| = 0$ (зі строгої гіперболічності виразу L випливає, що числа $\mu_1, \dots, \mu_{2m}$ є суто уявними і попарно різними), $\vec{h}_q = \text{col}(h_q^1, \dots, h_q^m)$ — деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\mu_q, i)$, яка є приєднаною до матриці $L(\mu_q, i) = 0$, $q = \overline{1, 2m}$.

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) виникає потреба встановити нерівності

$$|\Delta(k)| \geq |k|^{-\omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3)$$

$$|\Gamma(k)| \geq |k|^{-\omega_2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (4)$$

де $\Delta(k) = \det \|\vec{g}_{lj}\|_{l=1,2}^{j=\overline{1,2m}}$, $\vec{g}_{1j} = \vec{h}_j e^{\mu_j k t_1}$, $\vec{g}_{2j} = \vec{h}_j k \mu_j e^{\mu_j k t_2}$, $j = \overline{1, 2m}$,

$\Gamma(k) = \det \left(I - \sum_{j=1}^M B_j \int_0^T G_k(\tau_j, \tau) d\tau \right)$, де I — одинична матриця розміру m , $G_k(t, \tau)$, — матриця Гріна задачі $\vec{y}_k''(t) + A_1(ik)\vec{y}_k'(t) + A_2(ik)^2\vec{y}_k(t) = f_k(t)$, $\vec{y}_k(t_1) = 0$, $\vec{y}_k'(t_2) = 0$ (зауважимо, що матриця Гріна $G_k(t, \tau)$ коректно визначена тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \neq 0$).

За допомогою метричного підходу [1] встановлено такі результати:

Теорема 1. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$ нерівність (3) виконується для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k , якщо $\omega_1 \geq 4C_{2m}^m - m + 2$.

Теорема 2. Для довільного фіксованого $t_1 \in [0, T]$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in (t_1, T]$ нерівність (3) виконується для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k , якщо $\omega_1 \geq 2C_{2m}^m - m + 1$.

Теорема 3. Якщо $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^M$) векторів $(\tau_1, \dots, \tau_M) \in [0, T]^M$ нерівність (4) виконується для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k , якщо $\omega_2 \geq M(2d + 1) + 1$, де $d = 2m + 1 + C_{3m-1}^m$.

Якщо ж, в системі рівнянь (1) матриці B_j є діагональними, тобто

$$B_j = b_j I, \quad b_j \in \mathbb{R},$$

то $\omega_2 \geq M(2 \sum_{j=1}^m C_{2m}^j + 3) + 1$.

Дана робота узагальнює результат праці [2] на випадок системи рівнянь.

- [1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.
- [2] Симотюк М.М., Хомяк Д.В. Метричні оцінки багатоточкової задачі для навантаженого гіперболічного рівняння // Буковинський математичний журнал, 2015. - Т. 3, № 1, С. - 102-109.

Про збіжність дробів Нерлунда, Гауса, Ойлера у полі p -адичних чисел

Симолюк М. М.
 ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
 quartenion@ukr.net

Медвідь О. М.
 ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
 medoks@ukr.net

Ланцюгові дробу Гауса, Нерлунда, Ойлера визначаються рівностями [1]

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n z}{1}, \quad \beta_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(z)}{\beta_n(z)}, \quad 1 + \zeta_0 z + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k z}{1 + \zeta_k z}, \quad (1)$$

відповідно, де

$$\gamma_{2n+1} = -\frac{(a+n)(c-b+n)}{(c+2n)(c+2n+1)}, \quad n \geq 0,$$

$$\gamma_{2n} = -\frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)}, \quad n \geq 1,$$

$$\alpha_n(z) = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(c+n-1)} z(1-z), \quad n \geq 1,$$

$$\beta_n(z) = 1 - \frac{(a+b+2n+1)}{c+n} z, \quad n \geq 0,$$

$$\zeta_n = \frac{b-a+n+1}{c+n}, \quad n \geq 0, \quad \eta_n = -\frac{(c-a+n)(b+n)}{(c+n-1)(c+n)}, \quad n \geq 1,$$

де $a, b, c, z \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. У роботі [1] встановлено умови збіжності дробів (1) до відношень значень гіпергеометричної функції Гауса $F(a, b; c; z)$ у випадку комплексної змінної z . У даній роботі ці результати перенесено на випадок, коли параметри a, b, c, z дробів (1) є p -адичними числами, а збіжність розглядається у p -адичній нормі.

Нехай p – просте число, $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адичних чисел з p -адичною нормою $|\cdot|_p$. Позначимо: $D(r) = \{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < r\}$, $r > 0$.

Теорема 1. Нехай $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$. Тоді дріб Гауса рівномірно збігається в $D(1)$. Якщо, крім того, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p, |ab|_p\}$, то дріб Гауса рівномірно збігається в крузі $D(p^{1/(1-p)})$ до відношення функцій $F(a, b; c; z)/F(a, b + 1; c + 1; z)$.

Теорема 2. Нехай $|a|_p \neq |b|_p$, $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$. Тоді дроби Нерлунда та Ойлера рівномірно збігаються в $D(1)$. Якщо, крім того, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p, |ab|_p\}$, то дроби Нерлунда, Ойлера рівномірно збігаються в крузі $D(p^{1/(1-p)})$ до відношень функцій

$$F(a, b; c; z)/F(a + 1, b + 1; c + 1; z), \quad F(a, b; c; z)/F(a, b + 1; c + 1; z)$$

відповідно.

- [1] Lorentzen L., Waadeland H. *Continued fractions with applications* // Studies in Computational Mathematics (Book 3). – North Holland; 1 ed. – 1992. – 606 p.

Estimates for approximations by Fourier sums and best approximations of the classes of (ψ, β) -differentiable functions

SERDYUK A. S.

Institute of Mathematics NAS of Ukraine
serdyuk@imath.kiev.ua

STEPANIUK T. A.

Lesya Ukrainka Eastern European National University
tania_stepaniuk@ukr.net

Denote by $L_{\beta, \infty}^{\psi}$ the set of functions $f \in L_{\beta}^{\psi}$ such that $\|f_{\beta}^{\psi}\|_{\infty} \leq 1$ (see definitions in [1]).

In present paper we solve the problem about finding the exact order estimates of the quantities

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta, \infty}^{\psi})_s = \sup_{f \in L_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx}\|_s, \quad 1 \leq s < \infty,$$

where $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt$ are Fourier coefficients of the function f , and

$$E_n(L_{\beta,\infty}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,\infty}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s, \quad 1 \leq s < \infty,$$

where $\mathcal{T}_{2n-1}$ is the subspace of all trigonometric polynomials t_{n-1} with real coefficients of degrees not greater than $n - 1$.

We denote by P the set of positive, almost decreasing sequences $\psi(k)$, $k \geq 1$, (we remind, that sequence $\psi(k)$ almost decreases, if there exists a positive constant M such that for arbitrary $k_1 \leq k_2$ the following inequality is satisfied $\psi(k_2) \leq M\psi(k_1)$) such that

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1) - \psi_n(k)| \leq K\psi(n),$$

where

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi(k), & k \geq n, \end{cases}$$

and K is the quantity uniformly bounded with respect to n .

Теорема 1. *Let $\psi \in P$, $1 \leq s < \infty$ and $\beta \in \mathbb{R}$. Then*

$$E_n(L_{\beta,\infty}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,\infty}^\psi)_s \asymp \psi(n).$$

[1] A.I. Stepanets, *Methods of Approximation Theory*, VSP: Leiden, Boston, 2005.

Теорема про граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах у просторах Гельдера

СОЛДАТОВ В. О.

Інститут математики НАН України

soldatovvo@ukr.net

Знайдено достатні умови, за яких розв'язки лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку неперервно залежать від параметра у просторі Гельдера $C^{n+1,\alpha}([a, b])$, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ та $-\infty < a < b < \infty$.

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю лінійних крайових задач вигляду:

$$y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (2)$$

Тут є невідомою вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in C^{n+1, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m)$, де ціле $m \geq 1$, а заданими є довільні матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon) \in C^{n, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$, вектор-функція $f(\cdot, \varepsilon) \in C^{n, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m)$, лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon): C^{n+1, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$$

і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Крайову задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+1, \alpha}([a, b])$.

Теорема 1. *Припустимо, що крайова задача (1), (2) при $\varepsilon = 0$, $f(\cdot, \varepsilon) \equiv 0$ і $c(\varepsilon) = 0$ має єдиний розв'язок. Нехай при $\varepsilon \rightarrow 0+$ виконуються такі умови:*

- (i) $A(\cdot, \varepsilon) \rightarrow A(\cdot, 0)$ у $C^{n, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$;
- (ii) $f(\cdot, \varepsilon) \rightarrow f(\cdot, 0)$ у $C^{n, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m)$;
- (iii) $B(\varepsilon)y \rightarrow B(0)y$ для кожного $y \in C^{n+1, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m)$;
- (iv) $c(\varepsilon) \rightarrow c(0)$.

Тоді крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок для достатньо малих $\varepsilon > 0$, і він задовольняє граничну властивість

$$y(\cdot, \varepsilon) \rightarrow y(\cdot, 0) \quad \text{у} \quad C^{n+1, \alpha}([a, b], \mathbb{C}^m) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (3)$$

Зауважимо, що умови (i) – (iv) є також необхідними для виконання властивості (3) на класі розглянутих крайових задач.

On application of Fourier-Laplace operator transformation in convolution algebra of Gevrey ultradistributions

SOLOMKO A. V.

Precarpathian National University

ansolvas@gmail.com

For constructed operator calculus in [2]-[4] we can consider examples of calculating Dirac function for generator of n -parametric strongly continuous semigroup of operators and solve the problem of representation of multiplicative powers and derivatives for Dirac function from the generator of the semigroup of fractional integration.

Let $X = L^1(\mathbb{R}_+) \widetilde{\otimes} \dots \widetilde{\otimes} L^1(\mathbb{R}_+) = L^1(\mathbb{R}_+^n)$. The semigroup of fractional integration $[0, +\infty) \ni t \rightarrow f_t * \in L[L^1(\mathbb{R}_+)]$ is defined over the space $L^1(\mathbb{R}_+)$, where element $f_t \in G'_+$ is defined by formula $f_t(s) = \frac{\theta(s)s^{t-1}}{\Gamma(t)}$, $s \in [0, +\infty)$.

Determine the operator $f_t *$ as the convolution with the function $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+)$, then $f_t * \psi \in L^1(\mathbb{R}_+)$. In previous formula $\theta(s)$ is the Heaviside function with support $[0, +\infty)$ and $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy$ is the gamma function. The generator of fractional integration semigroup we designate by A . Thus, $f_t * = e^{tA}$.

Let us consider the n -parametric semigroup of convolution operators

$$\mathbb{R}_+^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \rightarrow F_t = (f_{t_1} *) \otimes \dots \otimes (f_{t_n} *) \in L[L^1(\mathbb{R}_+^n)].$$

Every operator $\mathcal{A}_j = I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes A_j \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_n$ generates one-parametric strongly continuous semigroup $e^{t_j \mathcal{A}_j} = I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes e^{t_j A_j} \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_n$ over the space $L^1(\mathbb{R}_+^n)$, where the identity operator $I_j = \delta_j *$ is the convolution with the Dirac function in the variable $t_j \in [0, +\infty)$. Semigroups $\{e^{t_j \mathcal{A}_j} : t_j \in [0, +\infty)\}$ belong to the algebra $L[L^1(\mathbb{R}_+^n)]$. So, the generator $\mathcal{A}$ of the n -parametric semigroup can be written as $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$.

Let $t \rightarrow \psi_\tau(t)$ be $L^1(\mathbb{R}_+^n)$ -valued function of a variable $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ from the space $G(\mathbb{R}_+^n, L^1(\mathbb{R}_+^n))$. Then $\widehat{\psi}_\tau \in \widehat{G}(\mathbb{R}_+^n, L^1(\mathbb{R}_+^n))$ and the subspace $\widehat{G}(\mathbb{R}_+^n, L^1(\mathbb{R}_+^n))$ is dense in $L^1(\mathbb{R}_+^n)$.

It is well known that the degrees of the Dirac function can be written as $\delta^m = \frac{1}{(2\pi)^m} \widehat{\theta}^{*m}$, $\delta = \frac{1}{2\pi} \widehat{\theta}$, $m \in \mathbb{N}$. So, the degrees of the Dirac function from

convolution algebra of Gevrey ultradistributions G'_+ we determine by formulae $\delta^{|k|}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{|k|}} \widehat{\theta}^{*|k|}(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$.

The Fourier transformation of functions from G_+ is defined by the formula $F : G_+ \ni \theta^{*|k|} \rightarrow \widehat{\theta}^{*|k|}$, where $\widehat{\theta}^{*|k|}(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-i(\xi, s)} \theta^{*|k|} d\xi$. We use the main formula of operator calculus from [4] and compute

$$\delta^{|k|}(\mathcal{A})\widehat{\psi}_\tau = \frac{1}{(2\pi)^{|k|}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\xi^{|k|-1|}}{(k-1)!} \int_{\mathbb{R}_+^n} (F_t * (\widehat{U}_t \widehat{\psi}_\tau))(\xi) dt d\xi.$$

For derivatives of the Dirac function the following formulae are known

$$\partial^k \delta = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\chi}_k, \quad \chi_k : \mathbb{R}_+^n \ni t \rightarrow \theta(t)(it)^{|k|},$$

where $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\partial^k = \partial_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial_n^{k_n}$, $\partial_j^{k_j} = (-i)^{k_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $t^{|k|} = t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n}$, $(j = 1, \dots, n)$.

So, we calculate derivatives of the Dirac function for the generator of fractional integration by formula

$$\partial^k \delta(\mathcal{A})\widehat{\psi}_\tau = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} (i\xi)^{|k|} \int_{\mathbb{R}_+^n} (F_t * (\widehat{U}_t \widehat{\psi}_\tau))(\xi) dt d\xi.$$

- [1] Hille E., Phillips R. *Functional analysis and semigroups*, AMS, Colloquium Publications, USA, **31** (1957).
- [2] Lopushansky O.V., Sharyn S.V., Solomko A.V. *Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone*, Mat. Stud., Lviv, **35** (1) (2011), 78–90.
- [3] Sharyn S.V., Solomko A.V. *Operator Fourier-Laplace transformation for convolution algebra of Roumieu ultradistributions*, Applied Problems of Mechanics and Mathematics, IPPMM, Lviv, **9** (2011), 55–62.
- [4] Solomko A.V. *Operator representations of algebra of Gevrey ultradistributions with supports in positive n -dimensional angle*, Carpathian Mathematical Publications, Ivano-Frankivsk, **1** (2) (2009), 197–207.

Екстремальні елементи та $\mathbb{H}$ -квазіопуклі множини в $\mathbb{H}^n$

СТЕФАНЧУК М. В.

Інститут математики НАН України

stefanmv43@gmail.com

Будемо розглядати n -вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n -копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ – довільна множина, яка містить початок координат $O = \{0, 0, \dots, 0\}$. Покладемо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, $\langle x, h \rangle = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n$. Множина $E^* = \{h | \langle h, x \rangle \neq 0 \forall x \in E\}$ називається *спряженою* множиною до множини E . [6]

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *гіперкомплексно опуклою*, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає E . [6]

Означення 2. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *сильно гіперкомплексно опуклою*, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою γ ациклічний, тобто $\tilde{H}^i(\gamma \cap E) = 0, \forall i$, де $\tilde{H}^i(\gamma \cap E)$ – зведена група когомологій Алєксандрова-Чеха множини $\gamma \cap E$ з коефіцієнтами в групі цілих чисел. [6]

Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ – довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H}^n \setminus E$ називається *h -комбінацією точок множини E* та позначається $[E]$. Якщо E – довільна множина в просторі $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, то скажемо, що точка x належить *h -комбінації точок з E* , якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E \cap \gamma]$. Множину таких точок з $\mathbb{H}^n$ називають *h -комбінацією точок E* і позначають $[E]$; m -кратну *h -комбінацію* визначають за індукцією $[E]^m = [[E]^{m-1}]$. [2]

Означення 3. *h -оболонкою множини $E \subset \mathbb{H}^n$ називається множина $\hat{E} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, де $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \lambda$ – всі можливі лінійні проєкції множини на гіперкомплексні прямі, $[\pi(E)]$ – h -комбінація точок множини $\pi(E)$, а $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n | \pi(x) \in \pi(E)\}$ – її повний прообраз.* [2], [6]

Теорема 1. *Якщо множина E є h -оболонкою, то $E = [E]$.*

Позначимо через $[\lambda \cap E^*]$ доповнення в $\mathbb{H}^0 = \lambda^0$ ($\mathbb{H}^0$ – одноточкова компактифікація прямої) до зв'язної компоненти, що містить початок координат, деякого перерізу $\lambda \cap E^*$, де λ – гіперкомплексна пряма, а E^* – множина, спряжена до множини E .

Теорема 2. Для довільної множини $E \subset \mathbb{H}^n$ її h -оболонку можна зобразити у вигляді $\hat{E} = (\bigcup_{\lambda} \lambda \cap E^*)^*$.

З леми 1, яка є аналогом теореми Каратеодорі, враховуючи, що жодна h -екстремальна точка не може бути отримана h -комбінацією інших точок компакта K , випливають наступні наслідки.

Лема 1. h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта в $\mathbb{H}^n$ співпадає з сукупністю не більше, ніж n -кратних комбінацій своїх h -екстремальних точок. [2]

Наслідок 1. Якщо $K \subset \mathbb{H}^n$ – компакт і $\hat{K}$ – його h -оболонка, яка співпадає з h -комбінацією $[K]^n$, то кожна h -екстремальна точка множини $\hat{K}$ належить K .

Наслідок 2. Довільну точку простору $\mathbb{H}^n$, яка належить h -оболонці $\hat{K} = [K]^n$, можна зобразити у вигляді не більше, ніж n -кратної комбінації точок компакта K .

Наслідок 3. Для того, щоб h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K співпадала з ним, необхідно, щоб всі перерізи його гіперкомплексними прямими γ не містили тривимірних коциклів, тобто $H^3(K \cap \gamma) = 0$.

Наслідок 4. Для того, щоб h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K співпадала з ним, необхідно, щоб усі проекції його спряженої множини K^* на гіперкомплексні прямі були зв'язними.

Означення 4. h -інтервалом з центром в точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром в точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x . [6]

Означення 5. Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається h -екстремальною точкою множини E , якщо в E немає жодного h -інтервалу, який містить x . [6]

Означення 6. h -променем назовемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.

Означення 7. Екстремальним h -променем множини $E \subset \mathbb{H}^n$ назовемо h -промінь H , який належить множині E , якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H буде h -екстремальною точкою для множини E . (Це еквівалентне тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h -інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H .)

Для множини $E \subset \mathbb{H}^n$ позначимо: $\text{hex} E$ – множину її h -екстремальних точок, $\text{ghex} E$ – множину h -екстремальних променів, $\text{hconv} E$ – h -оболонку E .

Лема 2. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ – замкнене сильно гіперкомплексно опукле тіло (тобто $\text{int}E \neq \emptyset$) з непорожньою сильно гіперкомплексно опуклою межею ∂F , тоді E має вигляд $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$, де E_1 – ациклічна підмножина прямої $\mathbb{H}$ з непорожньою внутрішністю відносно цієї прямої.

Означення 8. Афінна підмножина L називається дотичною до множини E , якщо $L \cap \overline{E} \subset \partial E$, $L \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Лема 3. Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – сильно гіперкомплексно опукла замкнена множина та L – її дотична гіперкомплексна пряма, то $\text{hext}(E \cap L) = (\text{hext}E) \cap L$.

Теорема 3. Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплексної прямої, буде h -оболонкою своїх h -екстремальних точок та h -екстремальних променів $E = \text{hconv}(\text{hext}E \cup \text{rhext}E)$.

Означення 9. Гіперкомплексно опуклу множину $E \subset \mathbb{H}^n$ назовемо $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \cap E) = 0$.

Теорема 4. Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$ -квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$ -квазіопуклим компактом.

Лема 4. Якщо всі співмножники $E_j, j = 1, \dots, n$, ациклічні, то довільний перетин множини $E = E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{H}^n$ не містить тривимірного коциклу.

З леми 4 фактично випливає, що декартовий добуток $\mathbb{H}$ -квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

Означення 10. Лінійним поліедром називається множина виду $E = \{x | f_j(x) \in E_j, j \in J = \{1, 2, \dots, N\}\}$, де $E_j \subset \mathbb{H}^1$, $f_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k$, причому довільні дві функції $f_k(x), f_j(x), k \neq j$, є лінійно незалежними, а кожна з функцій f_j відображає E в підмножину гіперкомплексної прямої E_j . [2]

Теорема 5. Компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять трохвимірних циклів, є $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

Наслідок 5. Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною.

Теорема 6. Кожен ациклічний в розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт E буде $\mathbb{H}$ -квазіопуклим.

- [2] Зелинский Ю. Б., Мкртчян Г. А. *Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях* // Докл. АН СССР. — 1990. — **311**, № 6. — С. 1299-1302.
- [3] Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
- [4] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*: Пер. с нем. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
- [5] Мкртчян Г. А. *О гиперкомплексной выпуклости* // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 177.
- [6] Мкртчян Г. А. *О гиперкомплексно выпуклых множествах*. — Киев: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.42)
- [7] Мкртчян Г. А. *О сильной гиперкомплексной выпуклости* // Укр. мат. журн. — **42**, № 2. — С. 182-187.
- [8] Спенсьер Э. *Алгебраическая топология*. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

The moment problem on configuration space: one-dimensional model case

TESKO V.

Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv
tesko.math@gmail.com

The configuration space Γ over $\mathbb{R}$ is defined as the set of all locally finite subsets (configurations) in $\mathbb{R}$. As usual we identify each $\gamma \in \Gamma$ with the generalized function $\sum_{x \in \gamma} \delta_x$, where δ_x is the Dirac delta function at x . Such space as well as probability measures on them appear naturally in several topics of mathematics and physics. An important tool to study the configuration space analysis is the so-called K -transform. This transform maps functions defined on the space Γ_0 of finite configurations into functions defined on the space Γ .

For a probability measure μ on Γ , the so-called correlation measure ρ_μ corresponding to μ is a σ -finite measure on Γ_0 defined by

$$\int_{\Gamma_0} F(\eta) d\rho_\mu(\eta) = \int_{\Gamma} (KF)(\gamma) d\mu(\gamma), \quad F \in \text{Fun}(\Gamma_0),$$

where $\text{Fun}(\Gamma_0)$ denotes a space of functions $F : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$. In some applications, a σ -finite measure ρ on Γ_0 appears as a given object and the problem is *to show that this ρ can be seen as a correlation measure for a probability measure on*

Γ . It is known different types of sufficient conditions for this to hold, see works A. Lenard, Yu. Berezansky, Yu. Kondratiev, T. Kuna, E. Lytvynov and others.

Let $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ be the Schwartz space of distributions. Since $\Gamma \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ and the mapping

$$\text{Fun}(\Gamma_0) \ni F \mapsto \int_{\Gamma_0} F(\eta) d\rho(\eta) \in \mathbb{C}^1$$

is a linear functional, the above mentioned problem is a particular case of the following moment problem: *for a given functional s over the space $\text{Fun}(\Gamma_0)$ when does there exist a finite Borel measure μ on $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ such that*

$$s(F) = \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} (KF)(x) d\mu(x), \quad F \in \text{Fun}(\Gamma_0)?$$

The answer to this and related questions we give in a one-dimensional case.

- [1] Volodymyr Tesko, *One generalization of the classical moment problem*, Methods Funct. Anal. Topology, **17** (4) (2011), 356-380.

Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК О. В

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,

Луцьк

fedunyk@ukr.net

Досліджуються класи $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних, які розглянуті в [1] і є аналогами відомих класів Бесова. Нехай $\Omega(t)$ – функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, \ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут розглядаються логарифми за основою 2, крім того $(\log \frac{1}{t_j})_+ = \max \{1, \log \frac{1}{t_j}\}$. Вважаємо також, що $b_j < r$, $j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$.

Це означає, що для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2] (позначаємо (S) і (S_l)).

Нехай $L_q(\pi_d)$ – простір 2π -періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$ – ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників $d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$, які визначаються наступним чином

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_q. \quad (2)$$

Сформулюємо один із одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1). Тоді при $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < l$, $b_j < \frac{r}{\frac{q}{p}-1}$ має місце співвідношення*

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+\right)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Цей результат для класів $B_{p,\theta}^r$ одержаний А.С. Романюком [3], а для класів H_p^Ω – М.М. Пустовойтовим [4].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами p та q .

- [1] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.
- [2] Н.К.Бари, С.Б.Стєчкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.
- [3] А.С.Романюк, *Поперечники и наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных*, Anal. Math., **37** (2011), 181–213.

- [4] Н.Н.Пустовойтов, *Ортоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержат как степенные, так и логарифмические множители*, Anal. Math., **34** (2008), 187–224.

Growth regularity of arguments of meromorphic functions of completely regular growth in the punctured plane

KHRYSTIYANYN A. YA.

Ivan Franko National University of Lviv

khrystiyanyn@ukr.net

VYSHYNSKYI O. S.

Ivan Franko National University of Lviv

vyshynskyi@ukr.net

Let f be a meromorphic function in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. By A^* denote $\mathbb{C}^*$ without the intervals $\{z = \tau c_j, \tau \geq 1\}$ if $|c_j| > 1$, and $\{z = \tau c_j, 0 \leq \tau \leq 1\}$ if $|c_j| < 1$, where c_j is a zero or pole of f . Let $\tilde{f}(z) = f(z) \prod_{|a_j|=1} (z - a_j)^{-1} \prod_{|b_j|=1} (z - b_j)$, where a_j is a zero and b_j is a pole of f . Then [1] there exists $m \in \mathbb{Z}$ such that for every closed path γ in A^* $\int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0$, where $F(z) = z^{-m} \tilde{f}(z)$.

Let λ be a function of moderate growth defined over $[1, +\infty)$, and $\lambda_1(r) = \int_1^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t} dt$. Let $T_0(r, f)$ is the Nevanlinna characteristic of f [2], [1].

Означення 1 ([1]). *A meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f is said to be of finite λ -type, in which case we write $f \in \Lambda$, if $T_0(r, f) \leq B\lambda(Cr)$ for some constants B, C and all $r, r \geq 1$.*

Означення 2 ([3]). *We say that a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f is of the first type completely regular growth (c.r.g.1) with respect to λ if $f \in \Lambda$ and for all $k \in \mathbb{Z}$ there exist $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_k(r, f)}{\lambda(r)} =: c_k^1$ and $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r}, f)}{\lambda(r)} =: c_k^2$.*

Означення 3 ([3]). *We say that a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f is of the second type completely regular growth (c.r.g.2) with respect to λ if $f \in \Lambda$ and for all $k \in \mathbb{Z}$ there exist $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_k(r, f) + c_k(\frac{1}{r}, f)}{\lambda(r)} =: c_k^*$.*

If f is of c.r.g.1 then the functions $h_1(\theta, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^1 e^{ik\theta}$, $h_2(\theta, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 e^{ik\theta}$ are called the growth indicators of f . In case of c.r.g.2 the growth indicator of f is $h(\theta, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* e^{ik\theta}$.

Teopema 4. Let λ be a function of moderate growth, λ_1 defined as above, f be a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function of c.r.g.1 with respect to λ , and h_1, h_2 be the growth indicators of f . Then for all $p \in [1, +\infty)$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \arg F(re^{i\theta}) + \lambda_1(r) h_1'(\theta, f) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = o(\lambda_1(r)), \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \arg F\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - \lambda_1(r) h_2'(\theta, f) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = o(\lambda_1(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Teopema 5. Let λ be a function of moderate growth, λ_1 defined as above, f be a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function of c.r.g.2 with respect to λ , and h be the growth indicator of f . Then for all $p \in [1, +\infty)$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \arg F(re^{i\theta}) - \arg F\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) + \lambda_1(r) h'(\theta, f) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = o(\lambda_1(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

- [1] Kondratyuk A., Laine I. *Meromorphic functions in multiply connected domains* // Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., 10 (2006), p. 9-111.
- [2] Khrystianyn A.Ya., Kondratyuk A.A. *On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I* // Mat. Stud. 2005. Vol. 23 (1). P. 19-30.
- [3] Goldak M., Khrystianyn A. *Holomorphic functions of completely regular growth in the punctured plane* // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech. Math., 2011, Issue 75, p. 91-96. (in Ukrainian)

Алгебра симметричних аналітичних функцій на просторі $\ell_1(A)$

ЧЕРНЕГА І. В.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
icherneha@ukr.net

У доповіді розглядається алгебра всіх A -значних симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$, де A — деяка комутативна банахова алгебра. Вводяться поняття симетричного полінома та симетричної аналітичної функції обмеженого типу на $\ell_1(A)$. Використовуючи напрацьовані в роботах [1, 2] методи, досліджуються комплексні гомоморфізми алгебри A -значних симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$.

- [1] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **55** (2012), 125–142.
- [2] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*, J. Math. Anal. Appl., **395** (2012) 569–577.

Про деякі властивості мероморфних розв'язків лінійного диференціального рівняння третього порядку

ШАВАЛА О. В.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
olena.shvl@gmail.com

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність комплексних чисел λ_k , яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$ і $P = \{p_k\}$ — послідовність натуральних чисел, $p_k \geq 2$.

Теорема. Для заданих послідовностей Λ і P існують мероморфні функції A_1 з полюсами не вище другого порядку і A_0 з полюсами не вище третього порядку такі, що рівняння

$$f''' - \frac{3f'_1}{f_1} f'' + A_1 f' + A_0 f = 0$$

має фундаментальну систему мероморфних розв'язків $\{f_1; f_2; f_3\}$, де $(f_2/f_1)'$ є цілою функцією з нулями в точках λ_k кратності p_k+1 , а $(f_3/f_1)'$ є мероморфною функцією без нулів з полюсами в точках λ_k кратності p_k .

Оскільки для рівняння $f''' + A_1 f' + A_0 f = 0$ розкриття визначника Вронського

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix} = 1$$

приводить до громістких обчислень, то ми не користуємось безпосередньо методом, який застосовується при розгляді подібних питань для рівняння $f'' + A_0 f = 0$ (див. наприклад [1]).

- [1] Е. Шавала, *О последовательностях нулей и полюсов фундаментальных систем решений уравнения $f'' + Af = 0$* , Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», Уфа, 2015.

Іменний покажчик учасників конференції

- Арясова О. В., 22
Аюбова Н. С., 23
Баран О. Є., 24
Береза О. Ю., 55
Біланик І., 57
Білінський А. Я., 25
Бобик І. О., 56
Боднар Д. І., 57
Бохонко В. В., 58
Бубняк М. М., 51
Буртняк І. В., 52
Бушев Д. М., 59
Царегородцев Я. В., 108
Чернега І. В., 147
Чорний Р. О., 48
Дирів М. М., 74
Дмитришин Р. І., 76
Доля Д. С., 66
Дрозденко В. О., 28
Федуник-Яремчук О. В., 143
Феник М. Т., 91
Філософ Л. І., 59
Гаєвський М. В., 65
Галушак С. І., 69
Ганиченко Ю. В., 27
Гап'як І. В., 11
Герасименко В. І., 11
Гоєнко Н. П., 70
Гой Т. П., 121
Голубчак О. М., 71
Гришук С. В., 73
Грушка Я. І., 72
Хайджаа Кхухдаир Дакхіл, 66
Харкевич Ю. І., 81
Хом'як Д. В., 131
Християнин А. Я., 55
Ільків В. С., 68, 80
Кальчук І. В., 59, 81
Капустей М. М., 33
Карлова О. О., 84
Кінаш О. М., 25, 48
Копач М. І., 87, 89
Копитко Б. І., 34
Козаченко Ю. В., 39
Козаченко Ю. О., 110
Кравців В. В., 78
Крохтяк І. З., 94
Кучмінська Х. Й., 70
Кучук-Яценко С. В., 35
Курченко О. О., 23
Кузь А. М., 91
Макогін В. І., 37
Малицька Г. П., 52
Маслюченко В. К., 14, 96, 98
Медвідь О. М., 133
Мельник Б. О., 100
Мельник В. С., 98
Ментинський С. М., 102
Михайлюк В. В., 103
Микитюк Я. В., 100
Мироник О. Д., 96
Мироник В. І., 103
Мішура Ю. С., 35, 42
Млавець Ю. Ю., 39
Моклячук М. П., 40
Молибога Г. М., 41
Мостова М. Р., 77
Можирівська З. Г., 105
Мунчак Є. Ю., 42
Нестеренко О. Н., 108
Нестеренко В. В., 106
Новіков О. О., 110
Обшта А. Ф., 89
Осипчук М. М., 43
Пелех Р. Я., 111
Пелех Я. М., 102, 111
Пелешенко Б. І., 18
Пилипенко А. Ю., 19

- Пігура О. В., 112
 Плацидем М. І., 115
 Портенко М. І., 20
 Романів О. М., 117
 Ровенська О. Г., 110
 Сафонов В. М., 124
 Сафонова О. В., 125
 Саган А. В., 117
 Савчук Я. І., 123
 Савка І. Я., 121
 Семиренко Т. Н., 18
 Симотюк М. М., 56, 68, 91, 127, 129, 131, 133
 Синявська О. О., 39
 Сідей М. І., 40
 Скасків О. Б., 120
 Сковронська І. Я., 127
 Сливка-Тилищак Г. І., 45
 Сокульська Н. Б., 94
 Солдатов В. О., 135
 Стефанчук М. В., 139
 Страп Н. І., 80
 Струтинський М. М., 64
 Шавала О. В., 147
 Шевчук Р. В., 34
 Шувар Б. А., 89
 Танцюра М. В., 47
 Тарас О. Г., 79
 Тарновецька О. М., 120
 Тимків І. Р., 129
 Трусевич О. М., 120
 Васишлишин Т. В., 63, 64
 Веремій М. А., 65
 Виговська І. Ю., 66
 Власик Г. М., 67
 Волошин Г. А., 14
 Волянська І. І., 68
 Возняк О. Г., 51
 Забавський Б. В., 58
 Заболоцький М. В., 77
 Загороднюк А. В., 79
 Загороднюк А. В., 78
 Затула Д. В., 30
 Зелінський Ю. Б., 12, 125
 Жерновий К. Ю., 32
 Bandura A. I., 50
 Basiuk Y.V. , 53
 Chabanyuk Ya. M., 21
 Kalenyuk P., 83
 Khimka U. T., 21
 Khoroshchak V. S., 93
 Khrystiyanyn A. Ya., 145
 Kondratyuk A. A., 14, 86, 93
 Kuduk G., 83
 Lukivska D. V., 86
 Martsinkiv M., 95
 Nytrebych Z., 83
 Panchuk S. I., 113
 Ronska N., 118
 Salo T. M., 113
 Serdyuk A. S., 134
 Skaskiv O. B., 113
 Solomko A. V., 137
 Stepaniuk T. A., 134
 Symotyuk M., 83
 Tarasyuk S. I. , 53
 Tesko V., 142
 Vyshynskyi O. S., 145
 Zagorodnyuk A., 95



Карпатські математичні публікації

Шановні колеги!

“Карпатські математичні публікації” – це науковий математичний журнал, що видається у Івано-Франківську. Він заснований Прикарпатським національним університетом імені Василя Стефаника у 2008 році. Журналом публікуються статті оглядового і проблемного характеру, в яких висвітлюються актуальні питання математики.

Журнал індексується та відображається у таких науково-метричних базах та реферативних ресурсах, як Mathematical Reviews, Zentrblatt MATH, DOAJ, Index Copernicus International та інших. У виданні для індексації статей використовується DOI ідентифікатор. Журнал виходить двічі на рік.

Запрошуємо Вас подавати у наш журнал до друку статті. Приймаються матеріали англійською мовою оформлені у сердовищі $\text{\LaTeX}$ 2_ε згідно з вимогами, з якими можна детально ознайомитись на сайті журналу за адресою <http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp/index>. За додатковою інформацією можна звертатись за електронною адресою cmp.if.ua@gmail.com.

З повагою,
редакція журналу “Карпатські математичні публікації”.

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Ворохта

24 — 27 лютого 2016 року

(тези доповідей)

Відповідальний за випуск Осипчук М. М.

