Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
24 лютого – 2 березня 2014

Івано-Франківськ, 2014

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
24 лютого – 2 березня 2014 року

Івано-Франківськ, 2014

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 24 лютого – 2 березня 2013 р. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2014. – 92 с.

Організаційний комітет:

Загороднюк Андрій Васильович

Осипчук Михайло Михайлович

Шарин Сергій Володимирович

Слободян Світлана Ярославівна

Кравців Вікторія Василівна

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторському варіанті.

Частина I

ПЛЕНАРНІ ЛЕКЦІЇ

Узагальнено опуклі множини в дійсних і комплексних евклідових просторах

Зелінський Ю. Б.

Інститут математики НАН України

Лекції в основному присвячені дослідженню лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих множин в багатовимірному комплексному просторі. Буде розглянуто зв'язок цих множин з питаннями теорії ймовірностей та інтегральної геометрії. Буде показано, які нові погляди на питання дійсного опуклого аналізу виникають на основі узагальнено опуклих множин в комплексних просторах.

1. Приклади узагальнено опуклих множин.

2. Спряжені множини та теореми двоїстості.

3. Зв'язок узагальнено опуклих множин з задачами теорії ймовірностей.

4. Структура сильно лінійно опуклих множин. Паралелі та відмінності з дійсним випадком.

5. Локальна та глобальна узагальнена опуклість.

6. Задача топологічної класифікації узагальнено опуклих множин з гладкою межею в комплексному та дійсному випадках.

7. Топологічні властивості лінійно опуклих множин. Оцінки груп когомологій таких множин та їх об'єднань.

8. Системи лінійних включень.

9. Узагальнена опуклість вищого порядку (порядок опуклості).

10. Відкриті проблеми.

[1] Ю.Б. Зелинский. *Многозначные отображения в анализе* - Киев. Наук. думка, 1993. - 264с.

[2] Ю.Б. Зелинский. *Выпуклость. Избранные главы* // Праці Інституту математики НАН України.- т. 92.– - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. - 280с.

Third step to nonlinear analysis

Kondratyuk Andriy Andriyovych

Ivan Franko National University of Lviv

kond@franko.lviv.ua

The following topics will be exposed.

1. A short history.
2. Loxodromic meromorphic and multiplicatively periodic functions in the punctured euclidean spaces.
3. Multiplicatively periodic subharmonic functions in the punctured euclidean spaces.
4. Piersed euclidean space and multiplicatively periodic harmonic functions.

[1] Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470p.

[2] Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 p.

[3] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002, 381 p.

[4] Kondratyuk A. A. *Loxodromic meromorphic and δ-subharmonic functions*,Conference Proceedings on Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations in the honour of Ilpo Laine's 70th birthday, (to appear).

[5] Kondratyuk A. A., Zaborovska V.S. *Multiplicatively periodic subharmonic functions in the punctured euclidean space*, Mat. Stud. – 2014. – V.41, №1. – (to appear).

Про нулі цілих гаусових функцій

Скасків Олег Богданович

Львівський національний університет ім. І.Франка

matstud@franko.lviv.ua

Нарізно неперервні відображення і теорія наближень

Маслюченко Володимир Кирилович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vmaslyuchenko@ukr.net

Лекція №1. Поточкове наближення нарізно неперервних функцій.

Будуть розглянуті результати А.Лебега, Г.Гана, В.Рудіна про поточкову апроксимацію нарізно неперервних функцій та їх розвиток у працях сучасних чернівецьких математиків, а також обговорюватимуться нерозв'язані проблеми.

Лекція №2. Пошарово рівномірна апроксимація нарізно неперервних функцій.

На просторі S всіх нарізно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ буде введена локально опукла топологія $\mathcal{T}$ пошарової рівномірної збіжності і вивчатиметься секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ підпростору P всіх многочленів від двох змінних у просторі $(S, \mathcal{T})$.

Про деякі методи оцінювання розв'язків параболічних рівнянь

Портенко Микола Іванович

Інститут математики НАН України

portenko@imath.kiev.ua

Осипчук Михайло Михайлович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

myosyp@gmail.com

Фундаментальні розв'язки диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу є предметом особливої цікавості з боку спеціалістів зі стохастичного аналізу, оскільки вони є щільностями ймовірностей переходу відповідних процесів Маркова.

При дослідженні локальних властивостей випадкових процесів, граничної поведінки послідовностей випадкових процесів часто використовуються ті чи інші оцінки фундаментальних розв'язків відповідних параболічних диференціальних рівнянь (класичні, оцінки Крилова і т. п.).

В доповіді обговорюються деякі підходи до проблеми оцінювання фундаментальних розв'язків таких рівнянь.

Частина II

СЕКЦІЙНІ ДОПОВІДІ

1 СЕКЦІЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Представлення для похідної за початковими даними розв'язку стохастичного диференціального рівняння з нерегулярним коефіцієнтом переносу

Арясова Ольга Вікторівна

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

oaryasova@gmail.com

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x))dt + dw_t, \\ \varphi_0(x) = x, \end{cases} \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 1,\ (w_t)_{t\geq 0}$ — d-вимірний вінерів процес, $a = (a^1, \ldots, a^d)$ — обмежена вимірна функція із $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$.

За теоремою Веретеннікова [6] існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1).

Добре відомо, що при неперервно диференційовному коефіцієнті переносу a, похідна якого є обмеженою, рівняння (1) породжує потік дифеоморфізмів. Виявляється, що ця умова може бути значно послаблена, і потік дифеоморфізмів існує у випадку можливо необмеженого неперервного за Гельдером вектора переносу [3]. Нещодавно у роботах [1, 2, 4, 5] було доведено соболівську диференційовність розв'язку рівняння (1) при достатньо слабких припущеннях на коефіцієнт переносу. Так автори [1] розглядають вектор переносу, що належить до простору $L^q(0, T; L^p(\mathbb{R}^d))$ при деяких $p, q \in \mathbb{R}^d$ таких, що

$$p \geq 2,\ q > 2,\ \frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1.$$

В [5] було доведено, що при обмеженому вимірному векторі переносу a розв'язок належить $L^2(\Omega; W^{1,p}(U))$ при всіх $t \in \mathbb{R}^d, p > 1$ і відкритій обмеженій множини $U \in \mathbb{R}^d$.

Ми припускаємо, що для $1 \leq i \leq d$, a^i є функцією обмеженої варіації на $\mathbb{R}^d$, тобто для всіх $1 \leq j \leq d$ узагальнена похідна $\mu^{ij} = \frac{\partial a^i}{\partial x_j}$ є зарядом на

$\mathbb{R}^d$. Нехай $\mu^{ij,+}, \mu^{ij,-}$ — міри з розкладу Хана-Жордана $\mu^{ij} = \mu^{ij,+} - \mu^{ij,-}$. Позначимо $|\mu^{ij}| = \mu^{ij,+} + \mu^{ij,-}$. Ми вимагаємо, щоб при всіх $1 \le i,j \le d$ міри $|\mu^{ij}|$ задовольняли умову

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{\|y-x\|^2}{2s} \right\} ds \right) |\mu^{ij}|(dy) = 0.$$

Ця умова на коефіцієнт переносу є більш обмежувальною в порівнянні з умовами робіт [1, 5], але вона дозволяє нам одержати представлення для похідної в термінах параметрів початкового рівняння. Ми доводимо, що похідна $Y_t(x)$ по x є розв'язком інтегрального рівняння

$$Y_t(x) = E + \int_0^t dA_s(\varphi(x)) Y_s(x),$$

де $A_t(\varphi(x))$ — неперервний адитивний функціонал від процесу $(\varphi_t(x))_{t\ge 0}$, який дорівнює $\int_0^t \nabla a(\varphi_s(x))ds$, якщо a є диференційовним, E — d-вимірна одинична матриця. Це представлення є природним узагальненням виразу для похідної у випадку гладенького коефіцієнта переносу.

[1] E. Fedrizzi and F. Flandoli. Hölder flow and differentiability for SDEs with nonregular drift. *Stochastic Analysis and Applications*, 31(4):708–736, 2013.

[2] E. Fedrizzi and F. Flandoli. Noise prevents singularities in linear transport equations. *Journal of Functional Analysis*, 264(6):1329 – 1354, 2013.

[3] F. Flandoli, M. Gubinelli, and E. Priola. Flow of diffeomorphisms for SDEs with unbounded Hölder continuous drift. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 134(4):405 – 422, 2010.

[4] T. Meyer-Brandis and F. Proske. Construction of strong solutions of SDE's via Malliavin calculus. *Journal of Functional Analysis*, 258(11):3922 – 3953, 2010.

[5] S.E.A. Mohammed, T. Nilssen, and F. Proske. Sobolev differentiable stochastic flows of SDE's with measurable drift and applications. 2012. arXiv/1204.3867.

[6] A. Y. Veretennikov. On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations. *Math. USSR Sborn*, 39(3):387–403, 1981.

Породження вінеровим процесом багатовимірних дифузій

Бігун Галина Степанівна

Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України імені Я. С. Підстригача

Осипчук Михайло Михайлович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

myosyp@gmail.com

Одним з найбільш простих і найбільше вивчених дифузійних процесів є вінерів процес. В такого процесу коефіцієнт переносу — функція, що характеризує макроскопічний рух середовища, — нульовий, а коефіцієнт дифузії — функція, що описує мікроскопічний (тепловий) рух в середовищі, — одиничний. Загалом у випадку одновимірного фазового простору при виконанні не надто обмежливих умов стосовно коефіцієнтів переносу і дифузії, кожен дифузійний процес може бути одержаний з вінерового процесу перетворенням фазового простору та спеціально влаштованою заміною часу. В багатовимірному просторі ситуація є не такою простою. В роботі [1] одержано достатню умову у випадку двовимірного фазового простору. Продовжуючи ідеологію цієї роботи розглянуто загальний випадок. В доповіді обговорюються умови, при виконанні яких дифузійний процес в багатовимірному просторі може бути утворений з вінерового процесу шляхом перетворення фазового простору та випадкової заміни часу.

[1] *Бігун Г. С., Осипчук М. М.* Дифузії породжені вінеровим процесом Карпатські математичні публікації, Том 5, № 2, с. 180 – 186.

Модель системи масового обслуговування із часом обслуговування, залежного від інтенсивності вхідного потоку

Вотякова Леся Андріївна

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Дьогтєва Ірина Оксентіївна

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

irishka_do@mail.ru

В доповіді розглядається варіант побудови залежності часу вхідного потоку і часу обслуговування у функціонуванні системи масового обслуговування з пуассонівським потоком вимог.

Вимоги практики висувають перед теорією масового осблуговування цілу низку задач. Найважливішою серед них вважають побудову такої моделі системи масового обслуговування (СМО), яка б досить точно описувала реальну систему.

До недавнього часу математичні моделі, що описують функціонування СМО, будувались на припущенні, що вхідний потік і час обслуговування незалежні. Запропонуємо один із можливих варіантів побудови залежності цих факторів.

Нехай на обслуговуючий пристрій надходить пуассонівський потік вимог з параметром $\lambda > 0$, тобто вхідним потоком вимог є рекурентний потік заданий функцією розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, \text{ якщо } t > 0 \end{cases}$$

Вимоги надходять на обслуговуючий пристрій і за умови, коли він вільний, причому обслуговується вимога випадковий час η, який має розподіл

$$G(t) = P(\eta < t) = 1 - (1 + (\alpha - 1)\mu t)e^{-\alpha\mu t},$$

де $\mu > 0$, $\alpha > 1$.

Для даного розподілу щільність розподілу буде

$$g(t) = (\mu + \alpha(\alpha - 1)\mu^2 t)e^{-\alpha\mu t},$$

а середній час обслуговування

$$M(\eta) = \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2 \mu}.$$

Можна показати, що існує марковський процес для якого G(t) є функцією розподілу часу перебування його у фіксованій множині станів.

Побудуємо марковський процес $\eta_0(t)$, який може перебувати у трьох станах e_0, e_1, e_2, причому у нульовому стані він перебуває час $\min(\eta_1, \eta_2)$, де η_1, η_2- незалежні випадкові величини з параметрами μ і $(\alpha - 1)\mu$, у першому стані він перебуває випадковий час η_3, який має показниковий розподіл з параметром $\alpha\mu$. Другий стан поглинаючий, тобто коли процес потрапить в нього, то він ніколи з нього не вийде. Із нульового стану процес з ймовірністю $P_{01}(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ переходить у перший стан, і з ймовірністю $P_{02}(t) = \frac{1}{\alpha}$ переходить у другий стан. З першого стану з ймовірністю 1 він переходить в другий стан.

Таким чином, маємо марковський процес з поглинаючим станом, час перебування якого у станах e_0, e_1 має показниковий розподіл з параметром $\alpha\mu$, матриця ймовірностей переходів має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай $Q_{ij}(t)$- ймовірність того, що процес в і-ому стані проведе час менший t і перейде в j-ий стан. В нашому випадку

$$Q_{01}(t) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\mu t}).$$

Крім того, нехай $\bar{F}_0(t)$ - ймовірність того, що процес $\eta_0(t)$ проведе на множині станів $\{e_0, e_1\}$ час більший за t за умови, що $\eta(0) = 0$, $\bar{F}_1(t) = e^{-\alpha\mu t}$ - ймовірність того, що процес проведе на множині станів час більший t за умови, що $\eta(0) = 0$. Маючи $Q_{01}(t)$,$\bar{F}_1(t)$ можна розрахувати:

$$\bar{F}_0(t) = e^{-\alpha\mu t}(1 + (\alpha - 1)\mu t),$$

що збігається з $1 - G(t)$.

Існування розв'язку гіперболічного рівняння з орлічевою правою частиною

Довгай Богдан Валерійович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики

bogdov@gmail.com

В доповіді розглядається задача

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho(x)\xi(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \in [0,T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0, \quad (3)$$

де $T > 0$ — деяка стала, функції $p(x)$ та $\rho(x)$, $x \in [0,\pi]$ —двічі неперервно диференційовні, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$; $q(x)$, $x \in [0,\pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x,t)$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$ — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Відповідна задача Штурма-Ліувілля має вигляд

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right) - qX + \lambda\rho X = 0$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Тоді розв'язок задачі (1)–(3) шукається у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t \sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)\,du, \quad (4)$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^\pi \xi(x,t)X_n(x)\rho(x)\,dx.$$

Теорема 1 *Нехай в (1) $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умові. Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо виконуються умови:*

1. Збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)<\infty,$$

де

$$C_{k,m}=\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}}|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|.$$

2. Для довільного $\varepsilon>0$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right)dv<\infty.$$

3. Існують такі сталі $b_{k,m}>0$*, що*

$$\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right|\le b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m}<\infty.$$

Тоді ряд (4) *збігається рівномірно за ймовірністю в області* $[0,\pi]\times[0,T]$ *(*$T>0$ *– деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з* (4) *почленним диференціюванням один та два рази по* t *і один та два рази по* x *та з імовірністю одиниця задача* (1)–(3) *має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду* (4).

Використано результат роботи [1].

[1] *Довгай Б.В.* Гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, N 2. – С. 64–78.

[2] *Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V.* The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side // Random operators and stochastic equations, – 2005, – Vol. 13, No. 3, – pp. 281–296.

[3] Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. – Kiev: "ТВіМС"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.

Оцінка точності методу моделювання Монте-Карло розв'язку одного параболічного рівняння з сингулярним коефіцієнтом

Ганиченко Юрій Валерійович

Київський національний університет імені Т.Шевченка

iurii_ganychenko@ukr.net

Розглядається задача Коші для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку:

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x) + \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t,x) - \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x) u(t,x), \\ u(0,x) = g(x),\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}^m,\ m \geq 2, \end{cases} \tag{1}$$

де λ^m – міра Лебега в $\mathbb{R}^m$, μ – W-міра, W – вінерівський процес в $\mathbb{R}^m$, $g(\cdot)$ – ліпшицева обмежена функція, $\sigma \equiv (\sigma_{ij})_{i,j=1}^m = bb^*$, а вектор a та матриця b – відповідно коефіцієнти зсуву та дифузії багатовимірного дифузійного процесу X в $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2$, що визначений наступною рівністю:

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t a(X(s))ds + \int\limits_0^t b(X(s))dW(s),\ t \in \mathbb{R}^+,$$

його генератор: $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

За заданим W-функціоналом $\phi^{s,t} = \int\limits_s^t \frac{d\mu}{d\lambda^m}(X(r))dr,\ 0 \leq s \leq t$ побудуємо підпроцес X^ϕ з перехідною імовірністю

$$P[X^\phi(t) \in \Gamma | X^\phi(0) = x] = E[\mathbb{I}_\Gamma(X(t)) \cdot \exp(-\phi^{0,t}) | X(0) = x],$$

де $t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}^m,\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (див. [1]).

При накладанні певних обмежень формула Фейнмана-Каца дає генератор процесу X^ϕ у вигляді $\mathcal{A}^\phi f = \mathcal{A} f - \frac{d\mu}{d\lambda^m} \cdot f$ (див. [2], §1.2), тобто для довільної ліпшицевої обмеженої функції $g(\cdot)$ розв'язок (1) має наступне ймовірнісне представлення:

$$u(t,x) = E[g(X(t)) \cdot \exp(-\phi^{0,t}) | X(0) = x].$$

Результат [1] дає теоретичну можливість застосування методу Монте-Карло для розв'язку задачі Коші (1) через факт збіжності

$$u_n(t,x) \to u(t,x),\ n \to \infty,\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}^m,$$

де $u_n(t,x) = E[g(X_n(t)) \cdot \exp(-\phi_n^{0,t})|X_n(0) = x]$, а X_n та ϕ_n – відповідні апроксимуючі послідовності для X та ϕ.

У нашому дослідженні ми уточнюємо результат [1] оцінкою на швидкість збіжності та наводимо явну оцінку на точність методу моделювання Монте-Карло розв'язку задачі Коші (1).

[1] A.M. Kulik, *Difference approximation for local times of multidimensional diffusions*, Prob. Theory and Math. Stat, **78**(2008), 67-83.

[2] A. Sznitman, *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer, 1998.

Система $M^\theta/G/1/m$ з параметрами функціонування, залежними від довжини черги

Жерновий Костянтин Юрійович

Львівський національний університет імені Івана Франка

k_zhernovyi@yahoo.com

Моделі систем обслуговування, в яких замовлення надходять групами, а параметри функціонування цілеспрямовано змінюються разом з довжиною черги, використовуються для вивчення телекомунікаційних процесів, зокрема процесів передавання даних у мережах ATM з використанням технологій мультиплексування.

Ми вивчаємо систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в якій час обслуговування кожного замовлення визначається за правилом: якщо в момент початку обслуговування цього замовлення у системі перебуває n замовлень, то його часу обслуговування відповідає функція розподілу $F_n(x)$. Параметри вхідного потоку замовлень для кожного режиму функціонування системи також можуть бути різними і визначаються в моменти завершення обслуговування замовлень.

Використовуючи ідею методу потенціалу В. С. Королюка [1] для неперервних знизу випадкових блукань, знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості та для функції розподілу періоду зайнятості, визначено середню тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі. Одержані результати перевірено за допомогою імітаційної моделі, побудованої за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

[1] *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 139 с.

Система $\mathbf{M_2^X/M/n}$ з гістерезсисним керуванням інтенсивнстю вхідного потоку

Жерновий Юрій Васильович

Львівський національний університет імені Івана Франка

yu_zhernovyi@yahoo.com

Системи обслуговування з гістерезисним керуванням інтенсивністю вхідного потоку можуть слугувати адекватними моделями для оцінювання якості функціонування інформаційно-телекомукаційних систем (зокрема, SIP-серверів) в умовах перевантаження.

Ми вивчили багатоканальну систему обслуговування без обмежень на довжину черги з показниковими розподілами часу обслуговування та інтервалів часу між моментами надходження груп замовлень, в якій застосовується двопороговий гістерезисний механізм керування інтенсивністю вхідного потоку. У систему надходять незалежні потоки замовлень двох типів, один з яких блокується в режимі перевантаження.

Запропоновано алгоритм відшукання стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі і стаціонарних характеристик (середньої довжини черги, середнього часу очікування в черзі, ймовірності втрати замовлень). Отримані результати перевірено за допомогою імітаційної моделі, побудованої за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Використання комп'ютерів при вивченні теорії ймовірностей

Жмурко Олександр Іванович

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського
alzhmu@gmail.com

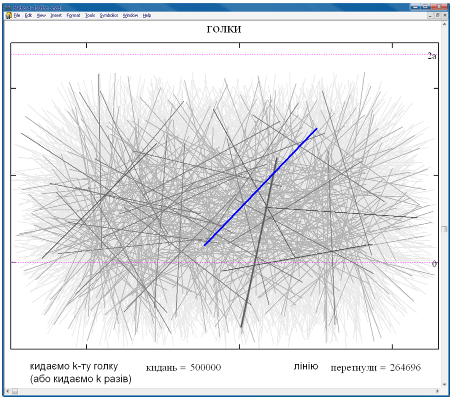
Жмурко Тетяна Олександрівна

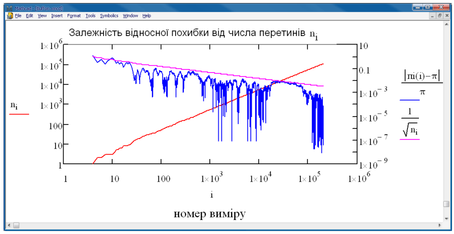
Національний авіаційний університет
taniazhm@gmail.com

В доповіді розглядається основні засади використання сучасної обчислювальної техніки та пакетів комп'ютерної алгебри для вивчення і розуміння теорії ймовірностей та математичної статистики.

Традиційним підходом [1, 2] до вивчення теорії ймовірностей є розв'язання задач на знаходження імовірностей та числових характеристик розподілів. Результатом розрахунків є абстрактне число, яке часто не асоціюється з ймовірнісними процесами, так, у студентів, результуючі імовірності більше 1 та від'ємні подекуди не викликають ні дій ні емоцій. Можна також зустріти вирази $P(win) = P_{39}(0) = 0.999954197$ з величезною кількістю непотрібних знаків.

Потрібно більш ефективно використовувати обчислювальну техніку, в тому числі: проведення комбінаторних розрахунків, заміна таблиць вбудованими функціями, такими як функції Лапласа, χ^2, функцій розподілів, обернених розподілів, квантилі, персентилі; моделювання результатів розв'язання класичних задач із находження імовірності, наприклад серія витягань кульок; демонстрація законів великих чисел та швидкості збігання до результатів; швидкі розрахунки статистичних моментів; побудова в реальному часі якісних гістограм та функцій розподілу, тут основна увага витрачається на розуміння ймовірнісних речей, а не рутину побудови графічного матеріалу; дослідження з вибору чи підбір оптимальних інтервалів для гістограм — побудова значної кількості гістограм в залежності від відрізку розбиття; моделювання для досліджень великої кількості серій одного і того ж розподілу, так Mathcad містить генератори псевдовипадкових величин **майже** всіх досліджуваних в теорії розподілів; графіки залежності параметрів від кількості змодельованих вимірів та зміни умов проведення досліджень, наприклад напруженості поля; побудова на одному графіку великої кількості серій вимірювань; візуалізація результатів вимірювань таких як кинуті голки, кубики, точки на геометричну фігуру,





витягнуті кольорові кульки, мішені стрільби, орієнтація диполів, спінів в електричних та магнітних полях тощо; генерація заданого розподілу, а потім його дослідження як невідомого, та в динаміці, не для однієї серії, а для цілої низки серій; генерація розподілу та демонстрація довірчих інтервалів, експерименти з перевірки гіпотез; дослідження відповідності заданому розподілу; розрахунки згорток та генерації розподілів і підтвердження результатів; демонстрація точності методу Монте-Карло.

Використання комп'ютерів з MS Excel чи програмами комп'ютерної алгебри, таких, наприклад, як Mathcad, зводиться переважно до ефективного калькулятора з можливостями відображення графічного матеріалу, що підтверджує і [3].

Кроком в цьому напрямку (більш ефективного використання обчислювальної техніки) можна вважати [4]. Однак не зовсім чіткі завдання типу 'змоделювати, розрахувати та дослідити' переносять центр ваги дослідження на студентів і конкретні ідеї та методи явно не проявляються.

Прикладом описаного вище підходу є створена нами в Mathcad, в межах практикуму, лабораторна робота з дослідження задачі Бюффона. Документ дозволяє генерувати задану кількість дослідів, відображати її, генерувати і переглядати анімацію дослідження. Також в реальному часі досліджується точність отримання π і, відповідно, демонструється робота методу моделювання.

Як бачимо частина підходу використання комп'ютерів вже реалізована, водночас сучасна техніка та її програмне забезпечення дозволяє отримувати більш вражаючі демонстрації випадкових величин та процесів у реальному проміжку часу. Такій підхід зменшую ступінь абстракції в практичну сторону, але, очевидно, має право на існування та використання.

Підсумовуючи, можемо сказати, що використання цифрової техніки на-дає 'відчуття' ймовірнісних параметрів та їх поведінки за рахунок проведення та візуалізації значної кількості стохастичних експериментів, змодельованих у реальному проміжку часу.

[1] *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. // М.: ИЦ «Академия», 2003. — 464 с.

[2] *Томусяк А. А., Трохименко В. С., Шунда Н. М.* Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч.1 // Вінниця, ВДПУ, 2001. — 331 с.

[3] Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт з дисципліни "Теорія ймовірностей" / Упорядники: О. І. Василик, М. В. Карташов, В. П. Кнопова, Г. М. Шевченко, Р. Є. Ямненко. — К.: ВПЦ 'Київський університет', 2008. — 50 с.

[4] Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірності та математична статистика» / Уклад: О. К. Юдін, А. В. Чунарьова — К.: НАУ, 2010. — 25 с.

Асимптотичні властивості ОМВ для дискретних спостережень розв'язку СДР, керованого процесом Леві

Іваненко Дмитро Олександрович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ida@univ.net.ua

В доповіді розглядається випадковий процес, заданий рівнянням

$$dX_t^\theta = a_\theta(X_t^\theta)dt + dZ_t,$$

в якому Z – процес Леві без дифузійної складової, a_θ – невипадкова функція. Нехай $X^n = \{X_{hk}, k = 1, \ldots, n\}$ спостереження процесу X у дискретні моменти часу із заданим кроком $h > 0$.

За допомогою числення Маллявена і властивості *рівномірної асимптотичної нормальності* (коротко РАН) відповідної сім'ї розподілів доводиться асимптотична нормальність і асимптотична ефективність *оцінки максимальної вірогідності* невідомого параметра θ побудованої по спостереженням X^n.

Числення Маллявена дозволяє керувати властивостями логарифмічної функції вірогідності через об'єкти, що задають модель, а саме: через функцію $a_\theta(x)$, її похідні і міру Леві процесу Z. Для того, щоб довести властивість РАН для сім'ї імовірнісних мір породжених процесом X, доводиться *центральна гранична теорема* для першої похідної по параметру від логарифмічної функції вірогідності і *закон великих чисел* для її другої похідної. Для встановлення цього факту використовуються ергодичні властивості X.

Доповідь частково містить результати одержані в роботах [1] і [2].

[1] *Ivanenko D. O., Kulik A. M.* Malliavin calculus approach to statistical inference for Levy driven SDE's // arXiv:1301.5141.

[2] *Ivanenko D. O., Kulik A. M.* LAN property for families of distributions of solutions to Levy driven SDE's // arXiv:1308.3089.

Вартість опціонів у випадковому середовищі

Коцюба Ігор Богданович

Львівський національний університет імені Івана Франка
kotsiuba@hotmail.com

Інвестування коштів у ризикові фінансові інструменти сьогодні набирає неабиякої популярності, яка зумовленна більшою дохідністю, ніж їхнє вкладення у безризикові активи. Очевидно, що в такому випадку важливим елементом є розумний вибір моделі, котра б описувала динаміку зміни вартості ризикових активів. Саме тому у роботі розглянуто модель Блека-Шоулса у деякому випадковому середовищі, що описується Марківським процесом з непервним часом та скінченною множиною станів. Подібні дослідження добре висвітлені у працях [1], [2]. Справедлива ціна опціону у такому середовищі розраховується на основі минулої інформації стосовно активів та їх ймовірнісних цін у майбутньому. Крім цього на справедливу ціну впливають деякі зовнішні фактори, які не враховуються експертами при оцінці показників безризикової відсоткової ставки, очікуванної дохідності та волатильності. Тому виникає проблема побудови ймовірної міри настання того чи іншого стану середовища з врахуванням минулої інформації стосовно активів.

[1] *Fuh C.D.* Option Pricing in a Black-Scholes Model with Mawkov Switching / Fuh C.D., Wang R.H., Cheng J.C. // Technical report, Institute of Statistical Science, Academia Sinica, Taipei, Taiwan. - 2002. - no. C-10.

[2] *Bittlingmayer G.* Output, stock volatility and political uncertainty in a natural experiment: Germany, 1880-1940 // Journal of Finance. - 1998. - 53. -P.2243-2257.

Про розв'язок стохастичного диференціального рівняння за симетричним стійким процесом

Кнопова Вікторія Павлівна

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

vicknopova@googlemail.com

Розглянемо рівняння

$$dX_t = b(X_t)dt + a(X_t)dZ_t, \quad t > 0, \tag{1}$$

де Z_t – симетричний α-стійкий процес в $\mathbb{R}^d$. За певних обмежень на коефіцієнти, доведено існування та єдиність слабкого розв'зку рівніння (1). При цьому, за допомогою методу параметрикса побудовано зображення імовірнісної щільності процесу X_t, та знайдено оцінку зверху на цю щільність.

Доповідь базується та сумісній роботі з О. М. Куликом.

Побудова дифузійного процесу з розривними локальними характеристиками руху за допомогою розв'язання однієї параболічної задачі спряження

Копитко Богдан Іванович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Цаповська Жаннета Ярославівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

tzhannet@yahoo.com

Нехай в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задана область D вигляду

$$D = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x') < x_n < F_2(x')\}$$

з гладкою межею $\partial D = S_1 \cup S_2$, де

$$S_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = F_m(x')\}, \quad m = 1, 2.$$

Припустимо, що елементарна поверхня

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = F_0(x')\}$$

розділяє область D на дві області D_1 та D_2 з межами $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$ та $\partial D_2 = S_0 \cup S_2$ відповідно, до того ж

$$F_1(x') < F_0(x') < F_2(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Будемо припускати, що елементарні поверхні S_0, S_m, $m = 1, 2$, належать до класу Гельдера $H^{2+\lambda}$, $\lambda \in (0, 1)$.

Нехай в області D_m, $m = 1, 2$, заданий дифузійний процес, який описується диференціальним оператором другого порядку такого вигляду:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(m)}(x) D_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)}(x) D_i, \quad m = 1, 2.$$

Тут $b_{ij}^{(m)}(x)$, $a_i^{(m)}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $m = 1, 2$, - обмежені та неперервні за Гельдером функції в $\bar{D}_m$, $m = 1, 2$, і матриця $\left(b_{ij}^{(m)}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ - додатно визначена та рівномірно невироджена.

В точках гіперповерхонь S_m, $m = 1, 2$, та S_0 вважаються заданими також диференціальні оператори, що визначають крайові умови та умови спряження, яким відповідають продовження процесів після потрапляння дифундуючої частинки на ці поверхні. Зокрема, припускаємо, що одна з двох умов спряження, які задаються на S_0, описується за допомогою загального граничного оператора типу Венцеля [1], а крайові умови, які задаються на S_m, $m = 1, 2$, означають, що в точках цих поверхонь розглядувані процеси мають властивість відбиття.

Ставиться задача побудувати напівгрупу операторів T_t, $t \geq 0$, яка описує неперервний однорідний процес Феллера на $\bar{D}$ такий, що у внутрішніх точках областей D_1 і D_2 він збігається із заданими там дифузійними процесами, керованими операторами L_1 і L_2 відповідно, а його поведінка в точках S_0 та S_m, $m = 1, 2$, визначається заданими там умовами спряження та крайовими умовами.

Для дослідження сформульованої проблеми ми використовуємо аналітичні методи. Шукану напівгрупу знайдено методом граничних інтегральних рівнянь як розв'язок відповідної параболічної задачі спряження, до якої редукується вихідна задача. Досліджено деякі властивості побудованого процесу. Зокрема, показано, що у внутрішніх точках області D отриманий процес можна трактувати як звичайний дифузійний процес з розривними локальними характеристиками руху.

[1] *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее применения. 1959. – 4, №2. – С. 172–185.

Каплінгові метрики для мір Леві та їх застосування

Косенкова Тетяна Ігорівна

Київський Національний Університет імені Т. Шевченка

tanya.kosenkova@gmail.com

В доповіді вводиться поняття каплінгових метрик між мірами Леві. В термінах цих метрик наведена оцінка відстані Васерштейна-Канторовича-Рубінштейна між розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві. Цей результат дозволяє отримувати оцінки швидкості збіжності в граничних теоремах та тести узгодженості ("goodness-of-fit"tests) в моделях з шумами Леві.

Використано результат роботи [1].

[1] *Kosenkova T.* Coupling distances between Lévy measures and applications to noise sensitivity of SDE / Jan Gairing, Michael Högele, Tetiana Kosenkova, Alexei Kulik // Stochastics and Dynamics (submitted)

Простори Банаха з моментними нормами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Козаченко Юрій Васильович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ykoz@ukr.net

Млавець Юрій Юрійович

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

yura-mlavec@ukr.net

Означення 1 [1] Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Доведено [2], що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою $\left\|\xi\right\|_\psi = \sup\limits_{u\geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}$.

Теорема 2 *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\left\|\xi\right\|_\psi^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Означення 3 [1] Додатно неспадна числова послідовність $(\varkappa(n), n \geq 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ із цього простору виконується нерівність $\left\|\max\limits_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max\limits_{1\leq i\leq n} \left\|\xi_i\right\|_\psi$.

Теорема 4 *Послідовність $\varkappa(n) = \sup\limits_{u\geq 1} \inf\limits_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$ є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.*

Простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ можуть бути використані для знаходження оцінок наближення при підрахунку інтегралів методом Монте-Карло.

[1] *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 92-107.

[2] *С.В. Ермаков, Е.И. Островский* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – № 3752-В.86.0. – С. 42.

Марковські процеси прийняття рішень з переоцінкою у випадковому середовищі

Єлейко Я. І.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Лебедєв О. А.

Львівський національний університет імені Івана Франка
alex-lebedev@hotmail.com

У роботі розглянуто марковські процеси прийняття рішень задані у випадковому середовищі. Пораховано середній прибуток, ризик та міру ризику у випадку задання марковського процесу у випадковому середовищі з дискретним та неперервним часом та відомим початковим станом. Дані процеси прийняття рішень докладно розглядаються у роботі [2]. Новизна роботи полягає саме у розгляді їх у випадковому середовищі. Отже розглянемо марковський процес прийняття рішень з переоцінкою. У кожному фіксованому стані середовища задано керування, набір стратегій та політик, коефіцієнт переоцінки та вектор-стовпець сумарних середніх прибутків [2]:

$$V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i}), \tag{1}$$

де $A_1, A_2, ..., A_m$ – це зовнішні випадкові фактори, $P(A_i) = p_i$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Тоді у випадковому середовищі з дискретним часом середній прибуток буде мати наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}). \tag{2}$$

Ризик визначаємо, як середньоквадратичне відхилення:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i (V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}))^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i})\right)^2. \tag{3}$$

Тоді величина ризику матиме наступний вигляд:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i (V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}))^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i})\right)^2}. \tag{4}$$

Мірою ризику вважаємо:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i (V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}))^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i})\right)^2}}{V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}}. \tag{5}$$

У випадковому середовищі з дискретним часом середній прибуток буде мати наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(t) V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i}). \tag{6}$$

Аналогічно можна розрахувати величину ризику та його міру.

Висновки: У даній роботі досліджувався N-вимірний вектор сумарних середніх прибутків, який у кожному стані середовища має свою відповідну матрицю перехідних ймовірностей, вектор прибутків, коефіцієнт переоцінки та стратегію. Було розглянуто марковські процеси прийняття рішень у випадковому середовищі з дискретним та неперервним часом, коли початковий стан системи був відомим. Для цих випадків знайдено середній прибуток, ризик та міру ризику.

[1] *Гихман И.И.*Теория случайных процессов, т.II./И.И.Гихман, А.В.Скороход // Изд-во "Наука"Главная редакция физико-математической литературы, 1973г. – 641с.

[2] *Майн Х* Марковские процессы принятия решений /Х.Майн, С.Осаки //Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука".–1977.–176с.

Оцінки розподілу супремуму гауссівського автомодельного поля зі стаціонарними прямокутними приростами

Макогін Віталій Іванович

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

makoginv@ukr.net

В доповіді розглядаються автомодельні поля, що є узагальненням автомодельних випадкових процесів. Причому дані поля є анізотропними у тому сенсі, що індекси автомодельності за кожною координатою можуть бути різними.

Означення 1 *Дійснозначне випадкове поле* $\{X(\mathbf{t}), \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n\}$ *є автомодельним з індексом* $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_n) \in (0, +\infty)^n$, *якщо*

$$\left\{X(a_1 t_1, \ldots, a_n t_n), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n\right\} \stackrel{d}{=} \left\{a_1^{H_1} \cdots a_n^{H_n} X(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n\right\},$$

для всіх $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.

В доповіді розглядається розподіл супремуму нормованого гауссівського автомодельного поля зі стаціонарними прямокутними приростами:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \frac{|X(\mathbf{t})|}{\varphi(\mathbf{t})} > \varepsilon\right\}, \varepsilon > 0.$$

Для таких нерівностей знайдені оцінки зверху. Причому розглядаються випадки, в залежності чи є множина $\mathbf{T}$ компактом. Використано результат робіт [1] та [2].

Дослідження автомодельних випадкових полів, тобто багатопараметричних процесів, вмотивоване наявністю властивості автомодельності у явищах, що є предметом кліматології, наук про довкілля та інших областей знань.

Оцінки розподілу супремуму таких полів, можна застосувати до оцінки асимптотичного зростання правої дробової похідної дробового броунівського руху. В свою чергу, ці оцінки потрібні при вивченні асимптотичного зростання узагальненого інтегралу від дробового броунівського руху, які використовуються при аналізі властивостей статистичних оцінок максимальної вірогідності невідомого параметра зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні, що керується дробовим броунівським рухом ([3]).

Доповідь базується на результатах спільної роботи доповідача та Козаченка Ю.В.

[1] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ-субгауссові випадкові процеси: монографія. — 231 с. — К.: ВПЦ «Київський університет», — 2008

[2] Kozachenko Yu., Vasylyk O., and Yamnenko R., *On the probability of exceeding some curve by φ-sub-Gaussian random process*, Theory Stoch. Process. 9(25) (2003), no. 3-4, 70-80.

[3] Kozachenko, Y., Melnikov A., and Mishura Y. On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion. arXiv preprint

Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу рівнянь типу дифузії з інерцією та зростаючими коефіцієнтами

Буртняк Іван Володимирович

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

bvanya@meta.ua

Малицька Ганна Петрівна

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

Нехай $x \in R^n, x = (x', x'', x''')$, $x' \in R^{n_1}$, $x'' \in R^{n_2}$, $x''' \in R^{n_3}$, $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_j \in N \cup \{0\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, але $n \in N$, $\xi = (\xi', \xi'', \xi''')$, $y^* = (y', y'')$, $y^* \in R^{n_1+n_2}$,$\eta^* = (\eta', \eta''), \eta^* \in R^{n_1+n_2}$,$X = (x, y), S = (\xi, \eta), X \in R^{2(n_1+n_2)+n_3}, S \in R^{2(n_1+n_2)+n_3}$, $\Delta_x = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j^2}$, $x^{**} = (x'', x'''), |x^{**} - \xi^{**}|^2 = \sum\limits_{j=n_1+1}^{n} (x_j - \xi_j)^2$.

Розглянемо задачу Коші для рівняння вигляду:

$$\partial_t u(t, X) - \sum_{j=1}^{n_1+n_2} x_j \partial_{y_j} u(t, X) = \Delta_x u(t, X) + \sum_{j=1}^{n_1} x_j \partial_{x_j} u(t, X), t > 0, \qquad (1)$$

$$u(t, X)|_{t=0} = u_0(X), X \in R^{2n-n_3}, \qquad (2)$$

де $u_0(X)$ достатньо гладка і фінітна функція.

Використовуючи перетворення Фур'є за змінними (x, y), метод характеристик, знайдено $Z(t, X; 0, S)$- фундаментальний розв'язок задачі Коші (1), (2) $t > 0, X \in R^{2n-n_3}, S \in R^{2n-n_3}$.

$Z(t,X;0,S) = 3^{n_2/2}(2\sqrt{\pi})^{-n}t^{-(2n_2+n_3/2)}(e^{2t}-1)^{-n_1/2}(2t-4(e^t-1)\times$
$(e^t+1)^{-1})^{-n_1/2}\exp\{-|x'e^t-\gamma'|^2(2e^{2t}-2)^{-1}-|y'-\eta'+(x'+\gamma')\times$
$(e^t-1)(e^t+1)^{-1}|^2(4t-8(e^t-1)(e^t+1)^{-1})^{-1}-|x^{**}-\xi^{**}|^2(4t)^{-1}-3|y''-$
$\eta''+(x''+\gamma'')2^{-1}t|^2t^{-3}+t\}.$

Єдиність $Z(t,X;0,S)$ встановлено на основі принципу максимуму Фіккери [1].

[1] *Малицька Г.П.*Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, №2. – С.195–201.

О поведении возмущений марковских процессов

Пилипенко А. Ю.

Институт математики НАН Украины

pilipenko.ay@yandex.ua

Приходько Ю. Е.

НТУУ "КПИ"

npuxodbko@gmail.com

Получена теорема о характеризации предельного поведения последовательности марковских процессов $\{X_n\}$ таких, что их распределение вне произвольной окрестности выделенной “сингулярной” точки притягивается к некоторому известному закону, в окрестности же этой точки регулярность поведения $\{X_n\}$ может нарушаться.

В качестве примера общих результатов рассмотрен предел последовательности $\{X_n(t) = \frac{S([nt])}{\sqrt{n}},\ n \geq 1\}$, где $\{S(n),\ n \geq 0\}$ – цепь Маркова на $\mathbb{Z}$ с переходными вероятностями:

$$p_{i,i\pm 1} = 1/2,\ |i| > m$$

и конечным математическим ожиданием скачка при $|i| \leq m$:

$$\sum_j p_{ij}|j| < \infty,\ |i| \leq m.$$

Пределом является косое броуновское движение. В отличие от работ [1–4] мы не предполагаем ограниченности скачка при $|i| \leq m$.

[1] *Harrison J.M., Shepp L.A.* On skew Brownian motion// Ann. Probab. 9(2) (1981), 309–313.

[2] *Минлос Р. А., Жижина Е. А.* Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке// УМН, 52:2(314) (1997), 87—100.

[3] *Яроцкий Д.А.* Принцип инвариантности для неоднородного случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^1$// Матем. заметки, 66: 3 (1999), 459–472

[4] *Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є.* Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами// Теорія ймовірностей і математична статистика, 2011, т. 85. 84–94.

Регулярне зростання аналітичних в крузі характеристичних функцій

Плацидем М. І.

Львівський національний університет імені Івана Франка

marta0691@rambler.ru

Кінаш О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Нехай φ - аналітична в $\mathrm{D}_R = \{z : |z| < R\}, R > 0$, характеристична функція ймовірносного закону F, а $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geq 0$. Встановлено зв'язок між зростанням $M(r, \varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ у термінах узагальнених порядків.

Виникло питання, за яких умов на $W_F(x)$ для цілих характеристичних функцій $\ln M(r, \varphi) = (1 + o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, де $T > 0$ і $\rho > 1$, а для аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичних функцій правильна асимптотична рівність $M(r, \varphi) = \frac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$ і $\rho > 0$.

Через $\Omega(0, R)$, позначимо клас додатних необмежених на $[r_0, R)$ для деякого $r_0 \in (0\ , R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $[r_0, R)$, і нехай ϕ - функція, обернена до Φ', а $\Psi(r) = r - \frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Будемо досліджувати умови на функції W_F і Φ, за яких

$$\ln M(r, \varphi) = (1 + o(1))\Phi(r), \quad r \uparrow R. \tag{1}$$

Для цього приймемо $\mu(r,\varphi) = sup\,\{W_F(x)e^{rx} : x \geq 0\}$ і знайдемо спочатку умови на Φ, за яких співвідношення (1) є рівносильне співвідношенню

$$\ln \mu(r,\varphi) = (1+o(1))\Phi(r), \quad r \uparrow R. \tag{2}$$

Твердження 1 *Нехай $0 < R \leq +\infty$, а функція $\Phi \in \Omega(0,R)$ така, що $\Phi'(r) \geq \frac{1+\gamma}{R-r}$ з $\gamma > 0$ для всіх $r \in [r_0,R)$, $\ln \Phi'(r) = o(\Phi(r))$ і $\Phi(r + \frac{1}{\Phi'(r)}) = (1+o(1))\Phi(r)$ при $r \uparrow R$. Тоді для кожної аналітичної в $\mathbb{D}_R$ характеристичної функції φ співвідношення (1) і (2) є рівносильними.*

Твердження 2 *Нехай $0 < R \leq +\infty$ і $\Phi \in (r_0,R)$. Для того, щоб асимптотична рівність (2) була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln W_F(x) \leq -x\Psi(\phi(\frac{x}{1+\varepsilon}))$ для всіх $x \geq x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $\ln W_F(x_k) \geq -x_k\Psi(\phi(\frac{x_k}{1-\varepsilon}))$ для всіх $k \geq 1$ і виконувалась рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{G_1(x_k,x_{k+1},\Phi_*)}{G_2(x_k,x_{k+1},\Phi_*)} = 1$ з $\Phi_* = \Phi$, де

$$G_1(x_k,x_{k+1},\Phi_*) = \frac{x_k x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\Phi_*(\phi_*(t))}{t^2}dt,$$

$$G_1(x_k,x_{k+1},\Phi_*) = \Phi_*(\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_*(t)dt).$$

Об'єднуючи ці два твердження, отримуємо таку теорему.

Теорема 3 *Нехай $0 < R \leq +\infty$, функція $\Phi \in (0,R)$ задовольняє умови твердження 1, а φ - аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірносного закону F. Для того, щоб асимптотична рівність (1) була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ виконувались умови 1) і 2) твердження 2.*

Estimations for distribution of supremum for random fields from spaces $Sub_\varphi(\Omega)$

Anna Slyvka-Tylyshchak

Taras Shevchenko National University of Kyiv

aslyvka@ukr.net

In paper presents estimates of the distribution supremum at infinity for fields from space $Sub_\varphi(\Omega)$.

Теорема 1 *Let $\{\xi(x,t),\ (x,t)\in V\}$, $V=[-A;A]\times[0,+\infty)$ be a separable random field belonging to $Sub_\varphi(\Omega)$. Assume also that the following conditions satisfied.*

1. $[b_k,b_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots$ *is a family of such segments, that* $-\infty<b_k<b_{k+1}<+\infty$, $k=0,1,\ldots$ $V_k=[-A;A]\times[b_k,b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k=V$.

2. *Let there exist increasing functions* $\sigma_k(h)$, $0<h<b_{k+1}-b_k$, *such that* $\sigma_k(h)\longrightarrow 0$ *as* $h\longrightarrow 0$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h,\\ |t-t_1|\le h\\ (x,t),(x_1,t_1)\in V_k}} \tau_\varphi\left(\xi\left(x,t\right)-\xi\left(x_1,t_1\right)\right)\leqslant\sigma_k\left(h\right),$$

$$\int\limits_{0+}\Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}\right)d\varepsilon<\infty,$$

where $\Psi\left(u\right)=\frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *are inverse function to* $\sigma_k(\varepsilon)$.

3. $c=\{c(t),\ t\in R\}$ *is some continuous function, such that* $c(t)>0,\ t\in R$, $c_k=\min\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]}c(t)$.

4. $\sup\limits_k\frac{\varepsilon_k}{c_k}<\infty$, $\sup\limits_k\frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k}<\infty$.

5. *The series* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}$ *converges for some* s, *such that,* $\sup\limits_k\frac{4\varepsilon_k}{c_k(1-\theta)}<s<\frac{u}{2}$, *where* $\varepsilon_k=\sup\limits_{(x,t)\in V_k}\tau_\varphi\left(\xi(x,t)\right)$, $k=0,1,\ldots$.

Then

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>u\right\}\leqslant$$

$$2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{s}\right)\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}=2A(u),$$

for $u>\sup\limits_k\frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k}\cdot\frac{4}{\theta(1-\theta)}$, *where* $0<\theta<1$

$$\tilde{\mathrm{I}}_\varphi(\delta)=\int\limits_0^\delta\Psi\left[\left(\ln\left(\frac{A}{\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\right)+\left(\ln\left(\frac{b_{k+1}-b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\right)\right]d\varepsilon,$$

$$k=0,1,\ldots$$

[1] *V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode (2000).

[2] *Yu. Kozachenko, O. Vasylyk and R. Yamnenko* Upper estimate of overrunning by $Sub_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function//Random Operators and Stochastic Equations, – 2005. Vol.13, No.2, 111–128.

Про нормальний граничний розподіл числа сторонніх розв'язків нелінійної системи випадкових рівнянь у полі GF(2)

Слободян Світлана Ярославівна

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

slobodian_s@ukr.net

В доповіді розглядається система рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_q(n)}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}x_{j_1}\ldots\ x_{j_k}=b_q,\ \ q=1,\ldots,N, \tag{1}$$

у полі $GF(2)$, що складається з двох елементів, за умови: коефіцієнти $a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}$ $(1\le j_1<...<j_k\le n, k=1,...,g_q(n), q=1,...,N)$ – незалежні випадкові величини з розподілом $P\left\{a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}=1\right\}=1-\ P\left\{a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}=0\right\}=p_{qk}$;

елементи b_q $(q = 1, ..., N)$ – результат підстановки в ліву частину системи (1) фіксованого n-вимірного (0, 1)-вектора $\bar{x}^0$, який має $\rho(n)$ ненульових компонент, $\rho(n) = |\bar{x}^0|$; функція $g_q(n)$ $(q = 1, ..., N)$ – невипадкова, $g_q(n) \in \{1, 2, ..., n\}$ $(q = 1, ..., N)$.

Позначимо через $M(\bar{x}^0, f(n))$ сукупність усіх n-вимірних (0, 1)-векторів $\overline{x}$, які не співпадають з $\overline{x}^0$ та мають кількість $|\overline{x}|$ ненульових компонент, яка задовольняє нерівності $|\overline{x}| \geq f(n)$, $f(n) \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Число усіх розв'язків системи (1), які належать множині $M(\bar{x}^0, f(n))$, позначимо через ν_n і будемо називати їх сторонніми. Знайдено умови, за яких відповідним чином нормована випадкова величина ν_n має граничний $(n \to \infty)$ нормальний розподіл і при цьому $n - \rho(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, $f(n) \geq 2$. Тут було використано підхід, запропонований в [1].

[1] *Масол В.И.*О нормальном предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2005. – т. 12, в. 2

Принцип великих відхилень для сім'ї одновимірних СДР з розривними коефіцієнтами

Соболєва Дарина Дмитрівна

Київський Національний Університет ім. Тараса Шевченка

dsobolieva@yandex.ua

В доповіді розглядається принцип великих відхилень для одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Буде показано, що у випадку розривних коефіцієнтів функціонал дії в асимптотиці великих відхилень відрізняється від функціоналу дії у відомому результаті Вентцеля та Фрейдліна.

Використано результати робіт [1] та [2].

[1] *Sobolieva D.* Large deviations for one-dimensional SDE with discontinuous diffusion coefficient / Alexei M. Kulik, Daryna D. Soboleva // Theory of Stochastic Processes **18(34)** (2012), no. 1, 101–110.

[2] *Sobolieva D.* Large deviation principle for one-dimensional SDEs with discontinuous coefficients / Daryna D. Sobolieva // Theory of Stochastic Processes **18(34)** (2012), no. 2, 102–108.

Про існування та єдиність сильного розв'язку рівняння що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою

Танцюра М. В.

Інститут математики НАН України

mtan@meta.ua

Нехай, $\{w_i(t), i \in \mathbb{Z}\}$ – незалежні вінерівські процеси, $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{u_k}$ – пуасонівська точкова міра. Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_i(t) = a(X_i(t), \mu(t))dt + dw_i(t), \ i \in \mathbb{Z}, \ t \in [0, T] \\ \mu(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)} \\ X_i(0) = u_i, \ i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Систему рівнянь (1) можна розглядати як рівняння, що задає рух у випадковому середовищі нескінченної системи частинок зі взаємодією. При цьому $\mu = \sum_k \delta_{u_k}$ можна трактувати як початковий розподіл мас, випадкову величину $X_i(t)$ – як положення в момент часу t частинки що стартувала з u_i, міру $\mu(t)$ – як розподіл мас частинок в момент часу t. Функція a відповідає за взаємодію між частинками.

Для системи (1) доведено існування та єдиність сильного розв'язку за умови, що інтенсивність пуасонівської точкової міри m в задовольняє співвідношення

$$\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad m([-n, n]) \leq nC,$$

а функція a є вимірною, обмеженою та задовольняє умову скінченності радіусу взаємодії:

$$a(x, \mu) = a(x, \mu I_{[x-d, x+d]})$$

для деякого $d > 0$.

Побудова моделі гауссового випадкового процесу із заданою точністю та надійністю в просторі $C(T)$

Козаченко Юрій Васильович

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

ykoz@ukr.net

Трошкі Наталія Василівна

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

FedoryanichNatali@ukr.net

В доповіді розглядається модель деякого центрованого гауссового випадкового процесу $\xi(t)$ з наступною коваріаційною функцією

$$R(t,s) = \int_0^\infty g(t,\lambda)g(s,\lambda)dF(\lambda),$$

що наближає його з заданою точністю та надійністю в просторі $C(T)$.

Для стаціонарних процесів та деяких інших побудова моделей з заданою надійністю та точністю в різних метриках розглядається в [1], [2], [3]. Необхідну інформацію з теорії субгауссових випадкових величин можна знайти в книзі [4] та роботі [5].

Згідно з теоремою Карунена випадковий процес $\xi(t)$ може бути зображений наступним чином

$$\xi(t) = \int_0^\infty g(t,\lambda)d\eta(\lambda),$$

де $\eta(\lambda)$ - гауссовий процес з незалежними приростами, $\mathbf{E}(\eta(b) - \eta(c))^2 = F(b) - F(c), b > c$. $\mathbf{E}\eta(\lambda) = 0$, а для функції $g(t,\lambda)$ виконується

$$\mid g(t,\lambda) - g(t,u) \mid \leq S(\mid u - \lambda \mid) \cdot Z(t),$$

де $Z(t)$ - деяка неперервна функція, $S(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ - монотонна функція, така $S(\lambda) \to 0$ коли $\lambda \to 0$.

Розглядається розбиття $L = \{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ множини$[0,\infty]$ таке, що $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty$, де $\Lambda > 0$ деяке число.

Тоді модель матиме наступний вигляд

$$\xi_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k g(\zeta_k, t),$$

де η_k, ζ_k незалежні випадкові величини, η_k - гауссові випадкові величини такі, що $\mathbf{E}\eta_k = 0$, $\mathbf{E}\eta_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k - випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ і якщо $b_k^2 > 0$, тоді

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, тоді $\zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Для такого випадкового процесу $\xi(t)$ та моделі $\xi_\Lambda(t)$ має місце наступна теорема.

Теорема 1 *Нехай у моделі $\xi_\Lambda(t)$ розбиття L таке, що при $\delta > 0, \theta \in (0,1)$ наступне співвідношення виконується*

$$2\exp\left\{-\frac{(\delta(1-\theta))^2}{2\varepsilon_0^2}\right\} r^{(-1)}\left(\frac{\widehat{I}_r(\theta\varepsilon_0)}{\theta\varepsilon_0}\right) \le \beta,$$

де $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t\in T} \tau(\eta_\Lambda(t)), \eta_\Lambda(t) = \xi(t) - \xi_\Lambda(t)$, $r(x), x \ge 1$ - додатньовизначена, монотонно зростаюча і така, що функція $r(\exp\{x\})$ випукла

$$\widehat{I}_r(\theta\varepsilon_0) \le \int\limits_0^{\theta\varepsilon_0} r(\tfrac{T}{2}(C^{(-1)}(\varepsilon(S^2\left(\tfrac{\Lambda}{N}\right) F(\Lambda) +$$
$$+ \int\limits_\Lambda^\infty \int\limits_\Lambda^\infty S^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u))^{-\frac{1}{2}}))^{-1}) d\varepsilon,$$

$$\widehat{I}_r(\theta\varepsilon_0) \le \infty.$$

де $C^{(-1)}(h), h > 0$ функція обернена до $C(h) = \sup\limits_{|t-s|\le h} (Z(t) - Z(s))$.

Тоді модель $\xi_\Lambda(t)$ наближає $\xi(t)$ з заданою надійністю $1-\beta, 0<\beta<1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0,T])$.

[1] *Kozachenko Yu., Rozora I.* Simulation of stochastic processes // Random Operators and Stochastic Equations, Vol. 11 №3 2003, pp. 275-296.

[2] *Kozachenko Yu., Rozora I.* Aplication of the theory of Squere-Gaussian Processes to simulation of Stochastic Processes // Theory of Stochastic Processes. Vol.12 №28 (3-4), 2006, pp. 43-54.

[3] *Kozachenko Yu.V., Rozora I.V. and Turchyn Ye.V.* On an expansion of random processes in series// Random Operators and Stochastic Equations. Vol. 15, 2007, pp. 15-33.

[4] *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes// Amer. Math. Soc., Providence, RI., 2000

[5] *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Sub-Gaussian random variables // Ukrainian Matheematical Journal. Vol. 32 №6, 1980, pp. 483-489.

Схема ідеального шумопоглинання для сигналів із φ-субгаусовими перешкодами "хвости"розподілів яких "легші"за гаусові

Трошкі Віктор Бейлович

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

btroshki@ukr.net

В доповіді розглядається схема ідеального шумопоглинання для сигналів із φ-субгаусовими перешкодами "хвости"розподілів яких "легші"за гаусові.

Мета: розширити результати отримані в роботах [3] та [5] для більш широкого класу векторів.

Нехай $\mathcal{L}$ - це сім'я ортонормованих базисів в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n$ - це набір різних векторів з $\mathcal{L}$. M_n-це потужність $\mathcal{M}_n$. $\mathcal{B}$ - це ортонормований базис в $\mathbb{R}^n$.

Покладемо $\delta_n(\lambda) = 4\lambda(1 + 2\log M_n))$ і $\Lambda_n = \Lambda_n(\lambda) = \tau^2\delta_n(\lambda), \lambda > 2$.

Нехай дані представлені таким чином

$$y = s + z \tag{1}$$

де s це визначений сигнал, а z- це вектор шуму координати якого є незалежними φ-субгаусовими випадковими величинами. Нехай $\tilde{s}$ - це оцінка сигнала s.

Визначимо складений функціонал

$$K(\tilde{s}, s) = \| \tilde{s} - s \|_2^2 + \Lambda_n \min_{\mathcal{B}\in\mathcal{L}} \sum_{\{i, \tilde{s}_i[\mathcal{B}]\neq 0\}} 1 = \| \tilde{s} - s \|_2^2 + \Lambda_n N_{\mathcal{L}}(\tilde{s})$$

де

$$N_{\mathcal{L}}(\widetilde{s}) = \min_{\mathcal{B}} \#\{e_i \in \mathcal{B} : \widetilde{s}_i[\mathcal{B}] \neq 0\}.$$

Через s^0 позначимо найменший теоретичний сигнал, тобто

$$K(s^0, s) = \min_{\hat{s}} K(\hat{s}, s)$$

.

Нехай $j_0 \equiv \max(N_{\mathcal{L}}(s^0), 1)$.

Теорема 1 *Нехай $\varphi(x) = \frac{x^p}{p}, 1 < p \leq 2$ і $\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q}$, де q таке число, що має місце рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Якщо дані представлені у вигляді (2), тоді при $t = 1$*

$$P\left\{\| \tilde{s} - s \|_2^2 \geqslant \frac{2\lambda\delta_n(\lambda)}{\lambda - 2}\mathcal{R}^*(s, \mathcal{L})\right\} \leq \frac{\exp\{C - j_0\}}{M_n^{j_0}},$$

де $\mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) = \min_{\mathcal{B}} \sum_i \min\left(s_i^2\left[\mathcal{B}\right], \tau^2\right)$, $C = 1 + 2^{\frac{q+2}{q}} C_q \exp\left\{C_{\frac{1}{2},q}\right\}$, $C_{\frac{1}{2},q} = 4^{\frac{2}{q-2}} \frac{q-2}{q}$, $C_q = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{v^{q/2}}{q}\right\} dv$.

[1] *Ю. В. Козаченко, Е. И. Островский*, Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. статист. 32, 1985,-42-53.

[2] *R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, and T. Nikitina* Spaces of φsubgaussian random variables // Memorie di Matematica e Applicazioni XXVII, 2003, №1, 95-124.

[3] *Sebastian E. Ferrando, Randall Pyke* Ideal denoising for signals in sub-gaussian noise //Applied and Computational Harmonic Analisis - Volume 24, Issue1, January 2008, P. 1-13.

[4] *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes // Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[5] *D.L. Donoho, I.M. Johnstone* Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases // C.R. Acad. Sci. Paris A. 319, 1994, 1317-1322.

Деякі оцінки на число процесів потоку Аратья

Чернега Павло Петрович

Інститут Математики Національної Академії Наук України

pasha_ch@i.ua

Зазначимо, що Харріс в роботі [1, c. 198] отримав результат, згідно якому число різних частинок $N_{s,[a;b]}$ в момент часу s серед частинок потоку

Аратья, які стартували з точок інтервалу $[a; b]$ в нульовий момент часу, є скінченним для довільного обмеженого інтервалу $[a; b]$.

Ми запропонуємо оцінку для другого моменту випадкової величини $N_{s,[a;b]}$.

Лема. Для довільного обмеженого інтервалу $[a; b]$ і моменту часу $s > 0$ виконується нерівність

$$EN^2_{s,[a;b]} \le \frac{(b-a)e^{\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}}}{\sqrt{\pi s}}(1 + \frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}).$$

Доведення. Введемо позначення

$$R_m := \sum_{u_k^m \in [a;b]} 1_{\{x(u_k^m, s) > x(u_{k-1}^m, s)\}}.$$

Зауважимо, що $R_m = n - 1$ тоді і тільки тоді, коли в точності n частинок, які стартували з точок $u_k^m \in [a; b]$, не склеїлись до моменту часу s. Оскільки розбиття $\Delta_m := \{u_k^m = \frac{k}{2^m},\ k \in \mathbb{Z}\},\ m \ge 1$ є вкладеними, $\Delta_m \subset \Delta_{m+1}$, справедлива нерівність $R_m \le R_{m+1}$. Має місце наступне співвідношення

$$P\{R_m = n-1\} = \int\limits_{\{z_1 < z_2 < \ldots < z_n\}} dz_1 \ldots dz_n \rho_{l_m,\, n}(z_1, ..., z_n;\ s),$$

$$l_m = \sharp\{k : u_k^m \in [a; b]\}$$

де $\rho_{l_m,\, n}(z_1, ..., z_n;\ s)$ - густина, яка визначається з рівності

$$P\{\text{серед частинок } \{x(u_k^m, s),\ u_k^m \in [a; b]\} \text{ є рівно } n \text{ різних, розташованих}$$
$$\text{в інтервалах } [z_1, z_1 + dy_1], \ldots, [z_n, z_n + dz_n]\}$$
$$= \rho_{l_m,\, n}(z_1, \ldots, z_n; s) dz_1 \ldots dz_n.$$

Оцінимо другий момент випадкової величини R_m. Оскільки траєкторії процесів потоку Аратья впорядковані і не перетинаються з траєкторіями процесів дуального потоку $\overline{x}$ [2, с. 95] на проміжку часу $[0; s]$, для довільних чисел $a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$ виконується наступне співвідношення між випадковими подіями (з точністю до множин нульової міри)

$$\{\text{серез частинок } \{x(u_k^m, s),\ u_k^m \in [a; b]\} \text{ є рівно } n \text{ різних, розташованих}$$
$$\text{в інтервалах } [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \subseteq$$
$$\{\text{серед частинок } \overline{x}(b_1, T-s), \overline{x}(b_2, T-s) b_2, \ldots, \overline{x}(b_{n-1}, T-s) \text{ є рівно } n-1$$

різних в момент часу нуль, розташованих в интервалі $[a;b]\}$.

Тому

$$\int\limits_{\{a_1\le z_1\le b_1,\ldots,a_n\le z_n\le b_n\}} dz_1\ldots dz_n\rho_{l_m,\,n}(z_1,...,z_n;\ s)\le$$

$$\le\int\limits_{\{a\le z_1<z_2<\ldots<z_{n-1}\le b\}} dz_1\ldots dz_{n-1}\widetilde{\rho}_{n-1,n-1}(z_1,...,z_{n-1};\ s),$$

де густина $\widetilde{\rho}_{n-1,n-1}(z_1,...,z_{n-1};\ s)$ відповідає точкам старту $b_1, b_2,\ldots,b_{n-1}$ процесів потоку Аратья.

Для довільних $y_i\in\mathbb{R},\ y_1<\ldots<y_n,\ t>0$ має місце нерівність [**?**, c. 718]

$$\widetilde{\rho}_{n,n}(y_1,\ldots,y_n;t)\le(\pi t)^{-\frac{n}{2}},\ n\in\mathbb{N}$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{s^{\frac{n}{2}}n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{s^{\frac{n}{2}}(n-1)!}=\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{s}}}}{\sqrt{s}}(1+\frac{1}{\sqrt{s}}),\ s>0,$$

справедлива оцінка

$$\sup_{m\ge1}E(R_m)^2\le\frac{(b-a)e^{\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}}}{\sqrt{\pi s}}(1+\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}).$$

Далі, використовуючи співвідношення

$$N_{s,[a;b]}=\lim_{m\to\infty}R_m$$

отримуємо твердження леми.

[1] *T. E. Harris.* Coaslescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 - Stochastic Processes and their Applications, **17** 1984, 187–210.

[2] *R. Arratia.* Coalescing Brownian motions on the line - Ph.D. thesis, University of Wisconsis, Madison, 1979.

[3] *R. Munasinghe, R. Rajesh, R. Tribe, O. Zaboronskiy.* Multi-Scaling of the n-Point Density Function for Coalescing Brownian Motions - Commun. Math. Phys. 2006, no. 268, 717–725.

Дифузійні процеси і нелокальні задачі для параболічних рівнянь

Шевчук Роман Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка

r.v.shevchuk@gmail.com

Доповідь присвячена проблемі побудови двопараметричних напівгруп операторів, які описують загальні класи одновимірних неоднорідних в часі дифузійних процесів в обмежених та напівобмежених областях при заданих в точках межі цих областей загальних крайових умовах чи умовах спряження типу Феллера-Вентцеля ([1]). Досліджено три задачі. Перша з них полягає в тому, щоб побудувати двопараметричну напівгрупу лінійних операторів, яка описує неоднорідний процес Феллера на півпрямій $[0, \infty)$ такий, що в її внутрішніх точках він збігається із дифузійним процесом, керованим заданим диференціальним оператором другого порядку, а в нулі поведінка цього процесу визначається загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля. Друга задача — це так звана задача про склеювання двох неоднорідних дифузійних процесів на прямій. Вона полягає в тому, щоб описати загальний клас неоднорідних феллерівських процесів на $\mathbb{R}$ таких, що в областях $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ вони збігаються із заданими там дифузійними процесами, а в точці нуль їх поведінка визначається загальною умовою спряження типу Феллера-Вентцеля. Третя задача є узагальненням двох попередніх задач: побудувати неоднорідний феллерівський процес на відрізку, частини якого у внутрішніх точках відповідних проміжків даного відрізка, розділених між собою деякою фіксованою точкою, збігаються із заданими там неоднорідними дифузійними процесами, а поведінка шуканого процесу в цій фіксованій точці, а також на кінцях відрізка визначається відповідно умовою спряження і крайовими умовами Феллера-Вентцеля.

Для розв'язання сформульованих задач застосовано аналітичний метод. За такого підходу питання про існування двопараметричних напівгруп операторів, які описують шукані процеси практично зводиться до дослідження відповідних крайових задач і задач спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, класичну розв'язність яких встановлено методом граничних інтегральних рівнянь з використанням параболічних потенціалів простого шару.

[1] *Вентцель А. Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР **111** (1956), no. 2, 269–272.

2 СЕКЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Some problems in theory of entire functions of unbounded index in direction

Bandura Andriy Ivanovych

Department of Higher Mathematics
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas
andriykopanytsia@gmail.com

Kulinich Halyna Mykhaylivna

Department of Higher Mathematics
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas

Main definitions and denotations see in [1]- [2]. Bandura A. I. and Skaskiv O. B. were proved a such assertion in [1].

Теорема 1 *An entire function $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$ be a function of bounded L-index in direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ if and only if there exists number $M > 0$ such that for all $z^0 \in \mathbb{C}^n$ a function $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ be a function of bounded l_{z^0}-index $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M < +\infty$, as a function of variable $t \in \mathbb{C}$ $(l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b}))$. Thus $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.*

In view of this theorem it was arised a natural *question* Is there an entire function $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$ and $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ such that $N(g_{z^0}, l_{z^0}) < +\infty$ for all $z^0 \in \mathbb{C}^n$, but $N_{\mathbf{b}}(F, L) = +\infty$?

Later we gave a positive answer [2]: a function $\cos\sqrt{z_1 z_2}$ has described properties for $\mathbf{b} = (1, 1)$ and $L(z) = 1$.

But it is traditionally that a solution of some problem leads to new problems. In our case there are interesting questions:

1. what are conditions on zero set and growth of entire functions such that it provides an index boundedness of $F(z_1^0 + t, z_2^0 + t)$ for every $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$ and an index unboundedness of $F(z_1, z_2)$ in direction $(1, 1)$?

2. how does it construct an entire function F of n variables such that $F(z^0 + t\mathbf{b})$ be of bounded index for any $z^0 \in \mathbb{C}^n$, but $F(z)$ be of unbounded index in direction $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$ $(n \ge 3, L(z) \equiv 1)$?

For example, a function $F = \cos\sqrt{z_1 z_2 z_3}$ is not a solution because a function $\cos\sqrt{(z_1^0 + t)(z_2^0 + t)(z_3^0 + t)}$ is of bounded l-index with $l(t) = \sqrt{t} \not\equiv 1$. We shall discus the possible ways of solution for these problems.

[1] *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Entire functions of bounded L-index in direction // Matem. Studii. – 2007. – Vol. 27, No 1. – P. 30–52. (in Ukrainian)

[2] *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Entire functions of bounded and unbounded index in direction// Matem. Studii. – 2007. – Vol. 27, No 2. – P.211-215. (in Ukrainian)

Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Баран Оксана Євгеніївна

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ

boe13ukr.net

Боднар Дмитро Ількович

Тернопільський національний економічний університет

dmytro_bodnar@hotmail.com

Для побудови дробово–раціональних наближень функцій багатьох змінних використовують різні конструкції гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД). Найпростішими за структурою, яка аналогічна структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{b_{i(k)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)} z_{i_1}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)} z_{i_2}}{b_{i(2)} + \ddots}}, \tag{1}$$

де N — фіксоване натуральне число, $i(k)$ — мультиіндекс, $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $p = \overline{1,k}$, $k = 1, 2, \dots$; $i_0 = N$; b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Для ГЛД з нерівнозначними змінними встановлено багатовимірні аналоги ознак збіжності неперервних дробів Ворпіцького, Слешинського-Прінгсгейма, узагальнено параболічну теорему Трона (частинні чисельники належать параболічним областям, частинні знаменники — півплощинам). У порівнянні із ГЛД загального вигляду з N гілками розгалуження дроби вигляду (1) збігаються у ширших областях або швидше.

Також для ГЛД з нерівнозначними змінними встановлено області збіжності, які є багатовимірними узагальненнями деяких відомих теорем (У. Лейтона і Г. Уолла, В. Трона, Л. Ланге, Н. Вишінскі та Дж. Мак Лафліна) про спарені області збіжності неперервних дробів. Отримані результати при певному підборі параметрів у випадку неперервних дробів дають ширші області збіжності, ніж у перерахованих теоремах.

Про рівномірну збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду в параболічних областях

Бубняк М. М.

Тернопільський національний економічний університет
mariabubnyak@gmail.com

Возняк О. Г.

Тернопільський національний економічний університет
olvoz@ukr.net

Михальчук Р. І.

Луцький національний технічний університет

Об'єктом досліджень є 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

де $c_j\neq 0$ – комплексні числа ($j=\overline{1,N}$; $i_0=N$ – фіксоване натуральне число). Позначимо $F_n=\left(1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}$ – n-й підхідний дріб та $R_n^{(q)}=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}$ – n-й залишок q-го порядку дробу (1), де $F_0=1$; $j_0=q$; $R_0^{(j)}=1$; $R_n^{(0)}=1$; $n\geq 0$; $q=\overline{1,N}$.

Нехай задано вектор вагових коефіцієнтів $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_N)$ таких, що $v_j>0$ і $\sum_{j=1}^{N}v_j<1$. Позначимо $\vartheta_j=1-\sum_{s=1}^{j}v_s$. Тоді справджуються

Лема 1 *Нехай елементи c_j ($j=\overline{1,N}$) дробу (1) належать параболічним областям $P_j(\gamma)$ і $\gamma\in(-\pi/2;\pi/2)$, де*

$$P_j(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|-\Re(ze^{-2i\gamma})\leq 2p_j\cos^2\gamma\right\},\quad p_j=v_j\vartheta_j. \qquad (2)$$

Тоді залишки $R_n^{(j)}$ ($j=\overline{1,N}$; $n\geq 0$) 1-періодичного ГЛД належать відповідно півплощинам $\mathbb{H}(\vartheta_j,\gamma)$, де $\mathbb{H}(\vartheta_j,\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:\Re(ze^{-i\gamma})\leq\vartheta_j\cos\gamma\right\}$.

Теорема 2 *Нехай елементи c_j дробу (1) належать параболічним областям (2). Тоді цей дріб рівномірно збігається на будь-якому компакті множини $\mathcal{P} = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_N$ і областю його значень є круг $K(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\exp(-i\gamma)}{2\vartheta_N \cos\gamma} \right| \le \frac{1}{2\vartheta_N \cos\gamma} \right\}$.*

Геометричне продовження поліномів на банахових просторах

Веркалець Надія Богданівна

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

nadyaverkalets@ukr.net

Нехай X – комплексний банахів простір, $\mathcal{P}(X)$ – алгебра всіх неперервних комплекснозначних поліномів на X і $\mathcal{P}(^n X) \subset \mathcal{P}(X)$ – підпростір n-однорідних поліномів.

У доповіді розглядаються питання пов'язані з продовженням поліномів, використовуючи природнє продовження їхні нулів. Будемо використовувати факт, що ядро кожного однорідного полінома на комплекснозначному нескінченно вимірному банаховому просторі X містить в собі нескінченно вимірний лінійний підпростір ([1]). Також у доповіді розглядається продовження Арона-Бернера поліномів з $\mathcal{P}(X)$ на другий спряжений до простору X та факт, що оператор продовженнчя $P \rightsquigarrow \widetilde{P}$ є топологічним гомоморфізмом алгебр $\mathcal{P}(X)$ та $\mathcal{P}(X'')$ (див. [2], [3]).

Основним питанням, яке розглядається у доповіді є: *Чи справедлива рівність $Ker\ \widetilde{P} = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$, де $Ker\ \widetilde{P}$ є продовженням Арона-Бернера полінома P,*

$$V_\alpha^{\perp\perp} = \left\{ \varphi \in X'' : \varphi(f) = 0, \forall f \in V_\alpha^{\perp} \right\},$$

$$V_\alpha^{\perp} = \{ f \in X' : \ f(x) = 0, \forall x \in V_\alpha \},$$

V_α – максимальні лінійні підпростори у $Ker\ P$?

При дослідженні даного питання доведено наступні твердження:

Твердження 1 *$Ker\ \widetilde{P} \supset \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

Corollary 2 *Якщо X є дуальним простором до банахового простору, то $Ker\ P = \cup_\alpha V_\alpha^{\perp\perp}$.*

[1] *Plichko A., Zagorodnyuk A.* On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomials functionals// J. Math. Anal. Appl. 1998, **220**, 477–494.

[2] *Aron R.M., Berner P.D.* A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France 1978, **106**, 3–24.

[3] *Carne T.K., Cole B., Gamelin T.W.* A uniform algebra of analytic functions on a Banach spaces,// Trans. Amer. Math. Soc. 1989, **314**, 639–659.

Про берівську категорію простору нарізно неперервних функцій

Волошин Галина Аркадіївна

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

galja.vlshin@gmail.com

Маслюченко Володимир Кирилович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vmaslyuchenko@ukr.net

Маслюченко Олександр Володимирович

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ovmasl@gmail.com

В роботі [1] було запропоновано природну топологізацію простору $S = CC[0,1]^2$ нарізно неперервних функцій на квадраті, названу там *топологією пошарової рівномірної збіжності*. Ця топологія породжується двома сім'ямириловичи переднорм

$$\|f\|^x = \max_{0\le t\le 1} |f(x,t)|, \quad \|f\|_y = \max_{0\le t\le 1} |f(t,y)|, \quad x,y \in [0,1].$$

Для довільних топологічних просторів X та Y на множині $CC(X \times Y)$, яка складається з усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, розглянемо топологію, яку називатимемо *топологією пошарової рівномірної збіжності*, базисними околами точки f_0 в якій є множини

$$W_{A,B,\varepsilon}(f_0) = \Big\{ f : \forall (x,y) \in (A \times Y) \cup (X \times B) \,\Big|\, |f(x,y) - f_0(x,y)| < \varepsilon \Big\},$$

де $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ – скінченні множини і $\varepsilon > 0$. Цей топологічний простір позначатимемо $S(X \times Y)$. Зрозуміло, що $S = S([0,1] \times [0,1])$. Крім того, якщо X та Y псевдокомпактні, то $S(X \times Y)$ є топологічним векторним простором.

В [1] було доведено, що простір S є гаусдорфовим повним сепарабельним локально опуклим топологічним векторним простором, і ставилось питання про вивчення його подальших властивостей як от: бочковість, борнологічність, тощо. Як відомо, бочковість топологічного векторного простору випливає з його беровості. Тому природно дослідити питання беровості простору S. Проте виявилося, що цей простір S є першої категорії, і тому питання про його бочковість залишається відкритим. Для доведення того, що S першої категорії, було знайдено аж три способи. Перший базується на наявності певних скінченних ε-сіток, другий – на розривності функції обчислення, а третій отримується за допомогою топологічної гри Шоке. Найзагальніший результат вдається отримати за допомогою третього підходу, до опису якого ми зараз приступимо.

Ключову роль у цьому підході відіграє наступна теорема, яка випливає з результатів статті [2].

Теорема 1 *Нехай X – нескінченний компакт. Тоді існує диз'юнктна послідовність скінченних множин $A_n \subseteq X$, така, що для деякої точки $a \in X$ і довільного її околу U існує такий номер n_0, що $A_n \cap U \neq \varnothing$ при $n \geq n_0$.*

Як відомо [3], якщо у грі Шоке гравець β має деяку виграшну стратегію σ, то перший хід $\sigma(\varnothing)$ гравця β за цією стратегією є множиною першої категорії. Далі, використовуючи попередню теорему, ми будуємо таку виграшну стратегію σ для гравця β у грі Шоке на просторі $S(X \times Y)$, у якої множина $\sigma(\varnothing)$ збігається з усім простором, і тим самим одержуємо такий результат.

Теорема 2 *Нехай X – нескінченний компакт, Y – цілком регулярний топологічний простір без ізольованих точок, який є α-сприятливим для гри Шоке (скажімо, Y – компакт без ізольованих точок). Тоді простір $S(X \times Y)$ є першої категорії в собі.*

[1] Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Топологізація простору нарізно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, №2. – С. 199-207.

[2] Banakh T., Mykhaylyuk V., Zdomskyy L. *On meager function spaces, network character and meager convercent in topological spaces* // Coment. Math. Univ. Carolin. – 2011. – **52**, №2. – P. 273-281.

[3] Saint-Raymond J. *Jeux topologiques et espaces de Namioka* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **87**, N4. – P.409–504.

Оцінювання різниць коренів многочлена, залежного від цілочислового параметра

Волянська Ірина Ігорівна

Національний університет „Львівська політехніка“
i.volyanska@mail.ru

Ільків Володимир Степанович

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@i.ua

У роботі проведена оцінка знизу різниць дійсних частин коренів многочлена, що залежить від цілочислового параметра.

При дослідженні розв'язків задач $\sum_{m=0}^{n} b_m(k)\dfrac{d^{n-m}u_k(t)}{dt^{n-m}} = 0$, $u_k(0) = \varphi_{1k}$, $u_k(t_1) = \varphi_{2k},\ \dots, u_k(T) = \varphi_{nk}$, де $b_m(k) = \sum_{s_1=0}^{m}(ik)^{s_1}a_{n-m,s_1}$ — многочлени степеня не вище m, $t_j = (j-1)t_0$, $t_0 > 0$, φ_{jk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_j, $j = 1,\dots,n$, постала проблема оцінки знизу, залежного від параметра $k \in \mathbb{Z}$, виразу $\Delta(k) = \prod_{p=1,p\neq r}^{n}\left(1 - e^{\tilde{k}t_0(\lambda_p(k)-\lambda_r(k))}\right)$, $\tilde{k} = \sqrt{1+k^2}$, яка зводиться до оцінки різниць дійсних частин многочлена P_k.

Побудовано многочлени P_k, коренями якого є різниці $\lambda_p(k)-\lambda_r(k)$ і P_{k1} з коренями $\bar{\lambda}_p(k)-\bar{\lambda}_r(k)$, $p = 1,\dots,n$, $r = 1,\dots,n$, $p \neq r$. Для їх побудови використовується матриця $\varphi(A,A) = A\otimes I - I\otimes A$ і теорема про зв'язок між власними значеннями матриці A та $\varphi(A,A)$ [1], де $\otimes$— прямий добуток матриць, I— одинична матриця розмірності n,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -\tilde{b}_n(k) & -\tilde{b}_{n-1}(k) & -\tilde{b}_{n-2}(k) & -\tilde{b}_{n-3}(k) & \dots & -\tilde{b}_1 k \end{pmatrix},$$

$\tilde{b}_m(k) = b_m(k)/\tilde{k}^m$, $m = 1,\dots,n$.

У роботі знайдено структуру результанта $R(k)$ многочленів P_k і P_{k1} для проведення оцінювання знизу різниць дійсних частин коренів многочлена P_k. Встановлено умову, за якої дані різниці для великих значень $\tilde{k}$ оцінюються незалежною від k величиною.

[1] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 280 с.

Побудова розв'язків рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій

Достойна В.В.

Національний університет "Львівська політехніка"

v.dostojna@gmail.com

У роботі [1] отримано методом контурних інтегралів [2–4] систему розв'язків бігармонійного рівняння та рівняння Гельмгольца у площині у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій.

У даній роботі методом контурних інтегралів знайдено розв'язки рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій.

Розглянемо диференціальне рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \chi^2 U = 0$, де $(z,r) \in R^2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\chi = const$. Розв'язки цього рівняння будемо шукати у вигляді ряду $U(z,r,\varphi) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} U^\nu(z,r)e^{i\nu\varphi}$. Отримаємо рівняння для знаходження функцій $U^\nu = U^\nu(z,r)$

$$\frac{\partial^2 U^\nu}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U^\nu}{\partial r^2} + \frac{\partial U^\nu}{\partial r} + \left(\chi^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) U^\nu = 0.$$

Заміною $x = \chi z$, $\rho = \chi r$ це рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{\partial^2 U^\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^\nu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U^\nu}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) U^\nu = 0, \quad \nu \in Z. \tag{1}$$

Розв'язки рівняння (1) будемо шукати у вигляді сум рядів за однорідними поліномами $u_n^\nu(x,\rho)$, зображеними в інтегральній формі

$$u_n^\nu(x,\rho) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (x + \xi\rho)^k \gamma_k(\xi) d\xi, \tag{2}$$

де Γ – замкнена крива, що охоплює хоча б одну особливу точку функції γ_k.

Підставляючи інтегральне зображення (2) у рівняння (1), прийдемо до такого функціонального рівняння

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{\Gamma}\left[(k-1)k\left(1+\xi^2\right)(x+\xi\rho)^{k-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{k\xi}{\rho}(x+\xi\rho)^{k-1}+\left(1-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)(x+\xi\rho)^{k}\right]\gamma_k(\xi)d\xi=0.$$

Інтегруючи частинами та згрупувавши відповідні доданки, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{n}\left\{\frac{d^2\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_n(\xi)\right]}{d\xi^2}-\frac{d\left[\xi\gamma_n(\xi)\right]}{d\xi}-\nu^2\gamma_n(\xi)\right\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{n+1}\left\{\frac{d^2\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_{n+1}(\xi)\right]}{d\xi^2}-\frac{d\left[\xi\gamma_{n+1}(\xi)\right]}{d\xi}-\nu^2\gamma_{n+1}(\xi)\right\}d\xi+$$

$$+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{k}\left\{\frac{d^2\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_k(\xi)\right]}{d\xi^2}-\frac{d\left[\xi\gamma_k(\xi)\right]}{d\xi}-\right.$$

$$\left.-\nu^2\gamma_k(\xi)+\frac{1}{(k-1)k}\frac{d^2\gamma_{k-2}(\xi)}{d\xi^2}\right\}d\xi=0.$$

Звідси, враховуючи незалежність систем степенів змінних x та ρ, отримаємо звичайні диференціальні рівняння для визначення невідомих функцій $\gamma_j(\xi)$:

$$\begin{gathered}\left(1+\xi^2\right)\gamma_n''(\xi)+3\xi\gamma_n'(\xi)+\left(1-\nu^2\right)\gamma_n(\xi)=0,\\ \left(1+\xi^2\right)\gamma_{n+1}''(\xi)+3\xi\gamma_{n+1}'(\xi)+\left(1-\nu^2\right)\gamma_{n+1}(\xi)=0,\end{gathered}\tag{3}$$

$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_k''(\xi)+3\xi\gamma_k'(\xi)+\left(1-\nu^2\right)\gamma_k(\xi)=-\frac{1}{(k-1)k}\gamma_{k-2}''(\xi),\tag{4}$$

де $k=n+2,n+3,\ldots$.

Сингулярними розв'язками рівнянь (3) і рекурентного рівняння (4) є

$$\gamma_n(\xi)=\gamma_{n+1}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}k!(k+\nu)!}\frac{1}{\xi^{2k+\nu+1}},$$

$$\gamma_{n+2m}(\xi)=\frac{n!}{m!(n+2m)!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}(k+\nu)!(k-m)!}\frac{1}{\xi^{2k+\nu+1}},m=1,2,\ldots.$$

Підставляючи розв'язки $\gamma_{n+2m}(\xi)$ в (2), одержимо

$$u_n^{\nu}(x,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{n+2m}\gamma_{n+2m}(\xi)d\xi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{m!(n+2m)!}*$$

$$* \sum_{j=0}^{n+2m} C_{n+2m}^{j} x^{n+2m-j} \rho^{j} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)!}{2^{2k}(k+\nu)!(k-m)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi^{2k-j+\nu+1}}.$$

Використовуючи відомий інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$, знаходимо

$$u_n^{\nu}(x,\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!(n+2m)!} \sum_{k=m}^{\left[\frac{n-\nu}{2}+m\right]} \frac{(-1)^k (2k+\nu)! C_{n+2m}^{2k+\nu}}{2^{2k}(k+\nu)!(k-m)!} x^{n+2m-2k-\nu} \rho^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-\nu}{2}\right]} \frac{(-1)^r C_n^{2r+\nu} C_{2r+\nu}^{r} n!}{2^{2r}} x^{n-2r-\nu} (r+\nu)! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(m+r+\nu)!} \rho^{2(m+r)+\nu}. \tag{5}$$

Розглянемо систему $\left\{ b_l^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}(z) \right\}$ функцій комплексної змінної

$$b_l^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}(z) = \left(\left[\frac{l+1}{2}\right] + \left[\frac{\nu}{2}\right] \right)! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \left(m + \left[\frac{l+1}{2}\right] + \left[\frac{\nu}{2}\right] \right)!} z^{l+2m}.$$

Тоді система розв'язків (5) виразиться через функції $b_l^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}(z)$.

Зауважимо, що функції $b_l^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}(z)$ утворюють базис Шаудера у просторі однозначних аналітичних у крузі $|z| \leq r$ $(0 < r < \infty)$ функцій, тому їх можна використовувати при побудові розв'язків крайових задач рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат.

[1] Сухорольський М.А. Системи розв'язків рівняння Гельмгольца // Вісник Національного університету "'Львівська політехніка". Серія фізико-математичні науки. – 2011. – №.718. – С. 19-34.

[2] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГОНТИ – НКТП – ДНТВУ, 1939. – 720 с.

[3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. – 576 с.

[4] Сухорольський М. А., Костенко І. С., Достойна В. В. Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестник ХНТУ. – 2013. – №2(47). – С. 323-326.

Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane

Zaborovska Vasylyna Stepanivna

Ivan Franko National University of Lviv

vasylyna1992@rambler.ru

The theory of multiplicatively periodic meromorphic functions in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ was elaborated by O. Rausenberger [1] . G. Valiron [2] called these functions loxodromic because the points in which such a function in the case of non-real q acquires the same value lay on logarithmic spirals. The images of these last on the Riemann sphere intersect each meridian under the same angle, and are called loxodromic curves ($\lambda o\xi o\zeta$ - oblique, $\delta\rho o\mu o\zeta$ - way). In log-polar coordinates they are straight lines. The theory of loxodromic functions is tightly connected with the theory of elliptic functions [3]. We study multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane.

Let $\mathcal{H} = \{z : Im\ \ z > 0\}$ and let $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$. The set $\mathcal{H}^*$ is invariant with respect to multiplicative group $\mathbb{R}^+$.

Definition. *A meromorphic in $\mathcal{H}^*$ function f is said to be multiplicatively periodic of multiplicator q, $0 < q < 1$, if it satisfies the following condition*

$$\forall z \in \mathcal{H}^* \quad f(qz) = f(z).$$

The set of such functions is denoted by $\mathcal{M}_q$. It is clear that $\mathcal{M}_q$ forms a field.

Theorem. *Let $f \in \mathcal{M}_q$. Then*

1) *the number of $a-$points, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, of function $f \neq const$ in the horseshoe $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$ doesn't depend on t;*

2) *if the function f is holomorphic and $f(-x) = f(x)$, then $f = const$;*

3) *if $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, then the function $g(\zeta) = f(\sqrt{\zeta})$, $\sqrt{-1} = i$, is loxodromic in $\mathbb{C}^*$ of multiplicator q^2. The function $g(e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}s})$ is double periodic of the period lattice $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ with $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{i}{\pi}\log q$.*

[1] Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470p.

[2] Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 p.

[3] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002, 381 p.

Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів Тейлора

Гаєвський Микола Вікторович

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

mgaevskij@gmail.com

Задерей Петро Васильович

Київський національний університет технологій та дизайну

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D$ — розклад в ряд Тейлора-Маклорена аналітичної в крузі D функції, $S_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, z \in D$ — частинна сума її ряду Тейлора-Маклорена.

Розглянемо множину H_∞ аналітичних в D функцій з нормою $\|f\|_{H_\infty} = \|f\|_\infty = \max_{z\in D}|f(z)| \le \infty$. Нехай далі $\{\psi(k)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0$. Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞ для яких $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}a_k z^k, z \in D$ є рядом Тейлора функції $f^\psi \in H_\infty$, $\|f^\psi\|_{H_\infty} = 1$.

В даній роботі узагальнюються результати О.М. Швецової [1], послідовність $\{\psi(k)\}$ задовольняє умови Боаса-Теляковського [2].

Теорема. Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots$ — послідовність для якої виконуються умови Боаса-Теляковського. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедливе співвідношення

$$\sup_{f\in H_\infty^\psi}\|f(z) - S_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} +$$

$$+O\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\triangle\psi(k)| + \sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi(k-m+n+1) - \triangle\psi(k+m+n+1)}{m}\Big).$$

[1] *Швецова А. М.* Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге.// Вісник Харків. нац. ун–ту. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", **Т.475**, 2000. — С. 208–217.

[2] *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР, **109**, 1971 — С. 65-97

Гомоморфізми алгебри симетричних аналітичних функцій

Загороднюк Андрій Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
andriyzag@yahoo.com

Чернега Ірина Володимирівна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
icherneha@ukr.net

Існування розривного функціоналу на алгебрі Фреше (повна метризовна локально-опукла алгебра з мультиплікативно опуклими півнормами) складає відому проблему Майкла [1]. У [2, с. 240] Ж. Мухіка показав, що всі характери на довільній алгебрі Фреше є неперервними тоді і тільки тоді, коли існує нескінченновимірний банахів простір X з базою Шаудера такий, що всі характери на алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу на просторі X є неперервними.

В даній доповіді досліджується неперервність деяких гомоморфізмів простору симетричних поліномів на просторах ℓ_p та операторів композиції на алгебрах симетричних аналітичних функцій обмеженого типу.

[1] *Michael E.* Locally multiplicatively convex topological algebras // Providence: Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 11, 1952. – 79 p.

[2] *Mujica J.* Complex Analysis in Banach Spaces // Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1986. – 434 p.

Оцінки апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

fedunyk@ukr.net

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які є аналогами відомих класів Бєсова.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду

$$\Omega(t)=\Omega(t_1,...,t_d)=\begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d}\dfrac{t_j^r}{\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j>0,\ j=\overline{1,d};\\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j=0. \end{cases} \tag{1}$$

Тут розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1,\log\frac{1}{t_j}\right\}$. Вважаємо також, що $b_j<r, j=\overline{1,d}$, і $0<r<l$.

Це означає, що для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2] (позначаємо (S) і (S_l)).

Нехай $L_q(\pi_d)$ — простір 2π – періодичних по кожній змінній функцій $f(x)=f(x_1,\ldots,x_d)$ зі стандартною нормою.

Одержано точні за порядком оцінки величин, які визначаються наступним чином

$$d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)=\inf_{G\in L_M(B)_q}\ \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}\cap D(G)}\|f(\cdot)-Gf(\cdot)\|_q\,.$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B\geq 1$ таке, що для всіх векторів $k=(k_1,\ldots,k_d)$, $k_j\in\mathbb{Z}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2\leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M.

Сформулюємо один із одержаних результатів.

Теорема. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, *a* $\Omega(t)$ *задана формулою (1). Тоді при* $0 < r < l$ *має місце порядкова рівність*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\Omega}, L_1) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Цей результат для класів $B_{1,\theta}^r$ одержаний А.С. Романюком [3], а для класів H_1^{Ω} — М.М. Пустовойтовим [4].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (1) при деяких інших значеннях параметрів p та q.

[1] *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1997. – т. 219. – С. 356 – 377.

[2] *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о - ва. – 1956. – т. 5. – С. 483 – 522.

[3] *Романюк А.С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – т. 199. – С. 93 – 114.

[4] *Пустовойтов Н.Н.* Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. – 2008. – т. 34. – С. 187 – 224.

Структура дискримінанта многочлена високого порядку, який є білінійною формою параметрів

Ільків Володимир Степанович

Національний університет „Львівська політехніка“

ilkivv@i.ua

Страп Наталія Ігорівна

Національний університет „Львівська політехніка“

n.strap@mail.ru

У математичному аналізі дискримінант многочлена має широке застосування, зокрема, використовується для оцінки різниць коренів полінома. Дискримінант Dis $f(\lambda)$ многочлена $f(\lambda)$ степеня не вище t визначається добутком $\prod\limits_{1\le r<q\le t}(\lambda_q-\lambda_r)^2$, де λ_j, $j=1,\ldots,t,$ — корені даного многочлена. З іншого боку, дискримінант Dis $f(\lambda)$ є визначником матриці Сильвестра $S(f)$ многочлена $f(\lambda)$. Матриця $S(f)$ є блочною матрицею $\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$, яка складається з двох матриць $S_1=\big(f_{j-i}\big)_{i,j}^{t-1,\ 2t-1}$ і $S_2=\big((t-j+i)f_{j-i}\big)_{i,j}^{t,\ 2t-1}$.

У роботі досліджено структуру дискримінанта многочлена $f(\lambda)$, який є лінійною однорідною функцією від параметрів a і b. На основі структури матриці $S(f)$ доведено наступну теорему.

Теорема. *Якщо* $f(\lambda)=ah(\lambda)+bg(\lambda)$, *де* $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ — *многочлени, а саме* $f(\lambda)=f_0\lambda^t+f_1\lambda^{t-1}+\ldots+f_t$, $h(\lambda)=h_0\lambda^t+h_1\lambda^{t-1}+\ldots+h_t$, $g(\lambda)=g_0\lambda^s+g_1\lambda^{s-1}+\ldots+g_s$, $s<t$, *а* $\mathrm{Dis}(f)$, $\mathrm{Dis}(h)$, $\mathrm{Dis}(g)$ — *дискримінанти даних многочленів, то дискримінант* $\mathrm{Dis}(f)$ *многочлена* $f(\lambda)$ *є формою від змінних* a *і* b *степеня* $2t-1$, *причому*

$$\mathrm{Dis}(f)=\sum_{i=0}^{2t-1}D_ia^ib^{2t-1-i}=\big((s-t)h_0g_0\big)^{t-s}\mathrm{Dis}(g)a^{t-s}b^{t+s-1}+\ldots+a^{2t-1}\mathrm{Dis}(h).$$

Аналогічні результати отримано при дослідженні структури результанта Res (f,F) многочленів $f(\lambda)$ та $F(\lambda)$, де $F(\lambda)=aH(\lambda)+bG(\lambda)$, $F(\lambda)$ і $H(\lambda)$ є многочленами степеня не вище t, а $G(\lambda)$ — многочлен степеня не вище $s<t$. Тоді результант Res (f,F) є формою від змінних a та b степеня $2t$.

Раніше відповідну теорему для випадку $t=2s$, $a=1$ доведено у роботі [1].

[1] *Магеровська Т. В.* Дослідження гладкості розв'язку задачі Коші для систем рівнянь із частинними похідними за допомогою метричного підходу // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – Т.1, №1-2 – С. 84-93.

Метрична оцінка дискримінанта многочлена з цілочисельними параметрами на гладкій кривій

Ільків В. С.

Національний університет "Львівська політехніка", ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

ilkivv@i.ua

Савка І. Я.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

s-i@ukr.net

Нитребич З. М.

Національний університет "Львівська політехніка"

znytrebych@gmail.com

При дослідженні задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними з нелокальними умовами виникає потреба оцінки знизу дискримінанта характеристичного многочлена диференціального рівняння.

Для вектора параметрів $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$ і $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо $D_k(x)$ дискримінант за змінною λ многочлена $L_k(\lambda, x)$, тобто

$$L_k(\lambda, x) \equiv \lambda^n + B_1(k)\lambda^{n-1} + \ldots + B_n(k) + x_1 k_1^{n_1} + \ldots + x_p k_p^{n_p}, \qquad (1)$$

де $B_j(k) = \sum\limits_{|s|\le j} B_j^s k^s$, $B_j^s \in \mathbb{C}$, $s = (s_1, \ldots, s_p)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $\max\{n_1, \ldots, n_p\} \le n$.

Многовид M називається δ-нормальним, де $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^p$, $\delta \in \mathbb{R}$, для набору многочленів $\{L_k(\cdot, x)\}_{k,x}$, якщо для майже всіх (стосовно індукованої з $\mathbb{R}^p$ на M міри Лебеґа) точок $x \in \mathrm{M}$ виконується нерівність

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(|k|^\delta \, |D_k(x)|\right) > 0, \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|. \qquad (2)$$

Теорема. *Нехай* $\mathrm{M} = \{x \in \mathbb{R}^p : x_1 = f_1(\tau), \ldots, x_p = f_p(\tau), \tau \in [0,1]\}$ *— гладка крива, для якої виконується умова типу невиродженості*

$$\min_{\tau\in[0,1]} \left|\det \left\|G_i[f_j](\tau)\right\|_{i,j=0,\ldots,p}\right| > 0 \qquad \bigl(G_0[g] = g,\ f_0(\tau) = 1\bigr),$$

де $G_1, \ldots, G_p$ *— деякі лінійні диференціальні вирази порядків* $\nu_1, \ldots, \nu_p$ *відповідно,* $\nu = \max\{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$, $f_j \in C^{\nu+1}([0,1];\mathbb{R})$. *Тоді крива* M *є* δ*-нормальною при* $\delta > \bigl(n-1\bigr)\bigl(\nu p - n_0\bigr)$, *де* $n_0 = \min\{n_1, \ldots, n_p\}$.

Дана теорема узагальнює результати робіт [1] та [2].

[1] *Симотюк М. М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісник НТШ. — 2006. — **3**. — С. 149–156.

[2] *Ільків В. С.* Уточнення оцінок дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2007. — № 5. — С. 28–35.

Наближення класів $c^{\psi}_{\beta,\infty}$ тригармонійними інтегралами Пуассона (скінченна гладкість)

Кальчук І. В.

Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк
kalchuk_i@ukr.net

Грабова У. З.

Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

О. І. Степанцем [1] введено класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій наступним чином. Нехай $f \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд

Фур'є функції f. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції $f(x)$ і позначають через $f_\beta^\psi(x)$. Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через L_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$, і крім того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то записують, що $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Далі покладемо $L_\beta^\psi \cap C = C_\beta^\psi$ і $L_\beta^\psi \mathfrak{N} \cap C = C_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

Через $C_{\beta,\infty}^\psi$ позначають множину функцій $f \in C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору L_∞, тобто $\mathfrak{N} = S_\infty^0 = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1\}$

При $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0$, класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ співпадають з класами $W_{\beta,\infty}^r$, які були введені Б. Надем і $f_\beta^\psi(x) = f_\beta^{(r)}(x)$ — (r,β)-похідна в розумінні Вейля-Надя. Якщо, крім цього, $\beta = r,\ r \in \mathbb{N}$, то f_β^ψ є похідною порядка r функції f і при цьому класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ є класами W_∞^r.

Послідовності $\psi(k),\ k \in \mathbb{N}$, які визначають класи $C_{\beta,\infty}^\psi$, будемо розглядати як звуження на множині натуральних чисел деяких неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \ge 1$ з множини

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t) : \psi(t) > 0,\ \ \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1+t_2)/2\right) + \psi(t_2) \ge 0$$

$$\forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Згідно з О.І. Степанцем, із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину

$$\mathfrak{M}_C = \big\{\psi(t) \in \mathfrak{M} :\ \ 0 < K_1 \le \mu(\psi;t) \le K_2\ \ \forall t \ge 1\big\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\ \eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до функції $\psi(\cdot)$, а константи K_1, K_2, взагалі кажучи, можуть залежати від функції ψ.

Нехай $f \in L$. Величину

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\delta) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \delta > 0,$$

де $\lambda_k(\delta) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big) e^{-\frac{k}{\delta}}$, називають тригармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\big)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \big\| f(x) - P_3(\delta; f; x) \big\|_C. \qquad (1)$$

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини (1), згідно з О.І. Степанцем, називатимемо задачею Колмогорова-Нікольського для тригармонійного інтеграла Пуассона на класі $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_C$, функція $u^3\psi(u)$ опукла донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$, і $\int\limits_1^{\infty} u^2\psi(u)du < \infty$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6} f_0^{(3)}(x) \right\|_C +$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^4} \int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du + \frac{1}{\delta^3} \int\limits_{\delta}^{\infty} u^2\psi(u)du \right),$$

де $f_0^{(1)}(x)$, $f_0^{(2)}(x)$, $f_0^{(3)}(x)$ відповідно $(1,0)$-, $(2,0)$- і $(3,0)$–похідна в розумінні Вейля–Надя функції $f(x)$.

Відмітимо, що умови теореми задовольняють, зокрема, такі функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які при $u \geq 1$ мають вигляд: $\psi(u) = \frac{1}{u^3 \ln^{\alpha}(u+K)}$, $\alpha > 1$, $K > 0$; $\psi(u) = \frac{1}{u^r} \ln^{\alpha}(u + K)$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r} \operatorname{arctg} u$, $r > 3$, $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Наслідок. *При $r > 3$ і $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(W^r_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\big)_C = \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in W^r_{\beta,\infty}} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6} f_0^{(3)}(x) \right\|_C + \qquad (2)$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^r} + \frac{1}{\delta^4} \right).$$

Оцінку (2) для точних верхніх меж наближень функцій з класів Вейля-Надя тригармонійними інтегралами Пуассона одержано авторами в роботі [2].

[1] *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.I. — 427 с.

[2] *Кальчук И.В., Грабова У.З.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах $W^r_{\beta,\infty}$ // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Теоретические и прикладные проблемы математики, экономики, образования. — 2011. — Спецвыпуск. — С. 33–36.

Про границі послідовностей функцій типу Дарбу

Карлова Олена Олексіївна

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
maslenizza.ua@gmail.com

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається

- *відображенням Дарбу*, якщо множина $f(C)$ зв'язна для довільної зв'язної множини $C \subseteq X$;
- *l-Дарбу відображенням*, якщо множина $f(C)$ зв'язна для довільної лінійно зв'язної множини $C \subseteq X$;
- *зв'язним*, якщо графік звуження $f|_C$ зв'язний для довільної зв'язної множини $C \subseteq X$;
- *(слабко) ґібсоновим*, якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для довільної відкритої (і зв'язної) множини $U \subseteq X$.

Зауважимо, що кожне зв'язне відображення має властивість Дарбу, а кожне відображення Дарбу є слабко ґібсоновим. Відомо [1, Theorem 3.4], що клас функцій Дарбу $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ першого класу Бера замкнений відносно рівномірних границь. Природно запитати, чи є вірним цей факт для функцій, які визначені на $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Слід зазначити, що згідно з [2, Corollary 9.16] рівномірна границя послідовності зв'язних функцій $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 1$, є зв'язною функцією.

Теорема 1 *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір, $(f_n)_{n=1}^\infty$ – рівномірно збіжна послідовність слабко ґібсонових функцій $f_n : X \to Y$ і нехай $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Тоді функцій f слабко ґібсонова.*

Теорема 2 *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір і $(f_n)_{n=1}^\infty$ – рівномірно збіжна послідовність F_σ-вимірних l-Дарбу функцій $f_n : X \to Y$. Тоді функція $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ є F_σ-вимірною з властивістю l-Дарбу.*

Теорема 3 *Нехай X – метричний простір без ізольованих точок і Y – сепарабельний простір. Тоді кожне відображення $f : X \to Y$ є поточковою границею послідовності ґібсонових функцій $f_n : X \to Y$.*

[1] *A. Bruckner* Differentiation of Real Functions [2nd ed.], Providence, RI: American Mathematical Society, 1994, 195 p.

[2] R. Gibson, T. Natkaniec, *Darboux-like functions*, Real Anal. Exchange **22**(2) (1996-97), 492–533.

On the simultaneous regular growth of the logarithm of modulus and argument of a holomorphic in the punctured plane function

Khrystiyanyn A.

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

khrystiyanyn@ukr.net

Vyshyns'kyi O.

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

vyshynskyi@ukr.net

Let f be a holomorphic function in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Assume that no zeroes of f lie on the unit circle, $F(z) = z^{-m}f(z)$, where $m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta$. The function $\log F(z)$ is defined in $\mathbb{C}^*$ with radial slits from zeroes a_j of the function f to ∞ if $|a_j| > 1$, and to the origin if $|a_j| < 1$.

The notion of the function of completely regular growth in $\mathbb{C}^*$ with respect to arbitrary growth function λ satisfying the condition $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, as $r \to +\infty$, was introduced and studied by the Fourier series method in [1].

Suppose that $\log r = o(\lambda(r))$, as $r \to +\infty$.

Theorem. *Under the above assumptions the following relations*

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \qquad (1)$$

and

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{|\log F\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \qquad (2)$$

as $r \to +\infty$ hold for some $H_1, H_2 \in L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$ if and only if either

1) $H_1(\theta) \equiv l_0^1 \geq 0, H_2(\theta) \equiv l_0^2 \geq 0$, $\lambda(r)$ *is convex with respect to* $\log r$, f *is of completely regular growth with respect to* $\lambda(r)$ *with the indicator* $l_0^1 + l_0^2$ *[1]*

or

2) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, $L(r)$ *is slowly varying function,* f *is of completely regular growth with respect to* $\lambda(r)$ *with the indicator* $Re\, H_1 + Re\, H_2$.

If relations (1), (2) hold for some $p \in [1, +\infty)$ then they are true for any $p \in [1, +\infty)$.

[1] *M. Goldak, A. Khrystiyanyn*, Holomorphic functions of completely regular growth in the punctured plane, Visnyk of the Lviv Univ., Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P.91-96. (in Ukrainian)

Аналоги двостороннього методу Курпеля розв'язання операторних рівнянь

Копач М. І.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

kopachm2009@gmai.com

Обшта А. Ф.

Національний університет "Львівська політехніка"

obshta2002@gmai.com

Шувар Б. А.

Національний університет "Львівська політехніка"

Запропонований в [1] двосторонній метод, що узагальнює метод Чаплигіна, відрізняється від інших аналогів і модифікацій методу Чаплигіна тим, що для рівняння $x = T(x, x)$ з монотонним і неопуклим оператором T, отримуються двосторонні наближення до розв'язку зі збереженням властивої для методу Чаплигіна квадратичної швидкості збіжності. При побудові аналогів методу Курпеля основними є такі припущення: 1) задані неперервні щодо $y, z \in [u, v]$, лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори

$G_1(y,z)w,\ G_2(y,z)w,\ \alpha_1(y,z)w,\ \alpha_2(y,z)w$, які не спадають щодо y, не зростають щодо z причому $\alpha_1(y,z)w,\ \alpha_2(y,z)w$ є додатніми як лінійні оператори щодо w; 2) при $x,\ y,\ z \in [u,v]$ справджуються співвідношення:

$$(G_1(y,z)+\alpha_1(y,z))(z-y) \leqslant T(z,x)-T(y,x),$$

$$T(x,y)-T(x,z) \leqslant -(G_2(y,z)+\alpha_2(y,z))(z-y).$$

Побудуємо послідовності $\{y_n\},\ \{z_n\}$ за допомогою формул $y_0 = u$, $z_0 = v$,

$$y_{n+1} = G_1(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) - G_2(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + T(y_n,z_n),$$

$$z_{n+1} = G_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + \alpha_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) - G_2(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n)$$
$$+\alpha_2(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) + T(z_n,y_n),$$

припускаючи, що $u \leqslant T(u,v),\ v \geqslant T(v,u)$. Встановлені умови, при яких матимемо $y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant x \leqslant z_{n+1} \leqslant z_n$, а також умови, що забезпечують квадратичну збіжність послідовностей $\{y_n\},\{z_n\}$ до розв'язку x заданого рівняння. З цього алгоритму отримується метод Курпеля, якщо α_1, α_2 є нульовими операторами, а G_1 і G_2 є похідними Фреше від оператора $T(y,z)$ щодо y та z відповідно (див. [2], [3]).

[1] *Курпель М.С.* Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1969. – №4 – С. 303–306.

[2] *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. // Киев: Наукова думка, – 1980. – 257 с.

[3] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. // Івано-Франківськ: В-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. В. Стефаника – 2007. – 515 с.

Стабільність багатих підпросторів

Красікова Ірина Володимирівна

Запорізький національний університет

yudp@mail.ru

Нехай E – F-простір Кете на просторі зі скінченною безатомною мірою (Ω, Σ, μ). Підпростір X простору E називається багатим, якщо фактор-відображення з E на $E \setminus X$ є вузьким оператором. Іншими словами, X – багатий підпростір, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ та довільної множини

$A \in \Sigma^+$ існують такі функції $x \in X$ та $y \in E$, що $|y| = \mathbf{1}_A$, $\displaystyle\int\limits_\Omega y\,d\mu = 0$ та $\|x - y\| < \varepsilon$.

Відомо [1, p. 72], [2, Proposition 5.7], що якщо E – симетричний банахів простір на $[0,1]$, відмінний від L_∞ з точністю до еквівалентної норми, K – компактний оператор на E та X – багатий підпростір простору E, то підпростір $(I+K)(X)$ – також багатий (добре відомо, що останній підпростір є замкненим завдяки компактності K [1, c. 474]). Доведення даного твердження у зазначених джерелах використовують той факт, що система Радемахера слабко прямує до нуля за даними припущеннями на простір E. Використовуючи техніку, розроблену в [2, Section 1.3], ми наводимо інше доведення, яке не використовує слабку збіжність до нуля системи Радемахера, що дає можливість узагальнити дане твердження з симетричних просторів на простори Кете. Наступна теорема є нашим основним результатом.

Теорема 1 *Нехай E – F-простір Кете з абсолютно неперервною нормою на просторі зі скінченною безатомною мірою (Ω, Σ, μ). Якщо K – компактний оператор на E та X – багатий підпростір простору E, то підпростір $(I+K)(X)$ – також багатий.*

[1] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

[2] *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces// Diss. Math. (Rozpr. mat.) – 1990. – 306. – P. 1–85.

[3] *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices. – Berlin–Boston: De Gruyter Studies in Mathematics 45, De Gruyter, 2013. – XIII, 319 p.

Hypercyclic operators on spaces of block-symmetric analytic functions

Kravtsiv Viktoriia Vasylivna

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

maksymivvika@gmail.com

Let
$$\mathcal{X}^2 = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^2$$
be an infinite ℓ_1-sum of copies of Banach space $\mathbb{C}^2$. So any element $\overline{x} \in \mathcal{X}^2$ can be represented as a sequence $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, where $x_n \in \mathbb{C}^2$, with the norm $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Let $(x, y), (z, t) \in \mathcal{X}^2$,
$$(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$$
and
$$(z, t) = \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$$
where $(x_i, y_i), (z_i, t_i) \in \mathbb{C}^2$. We put
$$(x, y) \bullet (z, t) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$$
and define
$$\mathcal{T}_{(z,t)}(f)(x, y) := f((x, y) \bullet (z, t)). \qquad (1)$$
We will say that $(x, y) \to (x, y) \bullet (z, t)$ is the symmetric translation and the operator $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is the symmetric translation operator.

In this report will be proof the hypercyclicity of "symmetric translation" on the algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type on an isomorphic copy of ℓ_1.

[1] *Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V.* On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Matematychni Studii 2012, **37**(1), 109-112.

Direct algebrization of a boundary value problem for the Klein-Gordon equation in a planar domain.

Kryven Myroslav

Ivan Franko National University of Lviv

kryvenm@gmail.com

We propose a semi-discrete method for a Robin problem for the Klein-Gordon equation in a multiply-connected domain, that does not require to approximately evaluate integrals when reducing the problem via Potential theory to a corresponding system of algebraic equations and obtaining the solution.

Let $D_i \subset \mathbb{R}^2$ – be bounded planar domains satisfying the following conditions:

1. $D_i \subset D_1, \qquad i = 2, \dots n;$
2. $D_1 \cap D_i = D_i;$
3. $D_i \cap D_j = \varnothing, \qquad i \neq j, \quad i, j = 2, \dots n;$
4. $\partial D_i = \Gamma_i \in C^1.$

We consider the following boundary value problem for the Klein-Gordon equation in a multiply-connected domain $D = D_1 \setminus \left(\bigcup_{i=2}^{n} \bar{D}_i\right), \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0 \quad \text{in} \quad D, \tag{1}$$

with boundary conditions:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_i} + \lambda_i u = f_i \quad \text{on} \quad \Gamma_i. \tag{2}$$

where $f_i, \lambda_i \in C(\Gamma_i)$ – known positive functions, $\kappa > 0$ – known constant and ν_i – the outward unit normal to the Γ_i.

Using Potential theory the problem (1)–(2) is reduced to a system of integral equations of a second kind, which then is discretized to become a system of linear algebraic equations. To discretize the system one have to approximately evaluate the related integrals as well as those on curves to obtain the solution.

We propose a semi-discrete method, that does not require to evaluate integrals when reducing the problem (1)–(2) to a corresponding system of algebraic equations and obtaining the solution.

The approximate solution of the problem (1)–(2)

$$u = Q\Phi(x), \tag{3}$$

where $Q = [Q_1 Q_2 \dots Q_n]$, $Q_i = [q_{i1} q_{i2} \dots q_{in_1}]$ – real matrixes, $\Phi(x) = [\Phi_1(x)\Phi_2(x)\dots\Phi_n(x)]^T$, $\Phi_i(x) = [f_{i1}(x) f_{i2}(x) \dots f_{in_i}(x)]$;
$f_{ij}(x) = K_0(|x - y_{ij}|)$ – a fundamental solution of the equation (1) (Macdonald function) with singularity in $x = y_{ij}$ $(y_{1j} \notin D_1, \quad j = 1 \dots n_1)$, $y_{ij} \in D_i (i = 2 \dots n, \quad j = 1 \dots n_i)$.

Matrix $Q(N \times 1)$, $N = n_1 + n_2 + \dots + n_{n1}$ is a solution to the $N \times N$ linear system

$$AQ = G, \tag{4}$$

where $G = [G_1 G_2 \dots G_n]^T$, $G_i = [g_{i1} g_{i2} \dots g_{in_1}]$, $g_{ij} = g_i(x_{ij})$ $(x_{ij} \in \Gamma_i, \quad j = 1 \dots n_i)$;
$A = (A_{ij})$ – $n \times n$ block matrix, A_{ij} $(n_i \times n_j)$ – real matrixes, with the following elements:

$$a_{pq}^{ij} = \lambda_i(x_{ip}) K_0(|x_{ip} - y_{iq}|) - K_1(|x_{ip} - y_{iq}|) \left(\frac{y_{iq} - x_{ip}}{|y_{iq} - x_{ip}|}, \nu_{ip} \right),$$

where ν_{ip} – the outward unit normal to the boundary of D in $x_{ip} \in \Gamma_i$, $K_1(x)$ – Macdonald function $(K_1(x) = K_0^{'}(x))$.

For a practical realisation points $x_{ip} \in \Gamma_i$ can be chosen as equidistant on Γ_i, while y_{iq} can be taken on relatively the same distance to Γ_i and with relatively equal distance $|y_{iq} - y_{iq+1}|$.

Benefiting from the possibility to arbitrary position the points $x_{ip} \in \Gamma_i$ and y_{iq} it is possible to improve the error of the approximate solution without increasing the order of the system (4).

Спектральний аналіз зіркового графа з нескінченними променями

Лебідь Вікторія Олександрівна

Інститут математики Національної академії наук України

lebiduk@gmail.com

Нехай $S(n, \infty)$ – зірковий граф, у якого всі n променів є нескінченними ланцюгами, з'єднаними в одній вершині – центрі зіркового графа. Матриця суміжності такого графа породжує обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V – множина вершин графа $S(n, \infty)$. Оператор $\mathbb{A}$ діє на вектор $x = (x_0, x_i^j) \in l_2(V)$ так

$$(\mathbb{A}x)_0 = \sum_{j=1}^{n} x_1^j, (\mathbb{A}x)_i^j = x_{i-1}^j + x_{i+1}^j, x_0^j \equiv x_0, \text{ для кожного } j = \overline{1, n} \text{ та } i \in \mathbb{N}$$

Тут компоненти векторів x та $\mathbb{A}x$ із простору $l_2(V)$, що відповідають центру зіркового графа, позначаємо нижнім індексом 0, а компоненти, що відповідають i-й вершині на j-му промені – нижнім індексом i та верхнім індексом j.

Теорема 1. Існує унітарний оператор $\mathfrak{U}$ такий, що

$$\mathfrak{U}\mathbb{A}\mathfrak{U}^{-1} = J^{\sqrt{n}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{n-1},$$

де $J^{\sqrt{n}}$, J_0 – матриці Якобі, визначені на просторі l_2 і мають вигляд

$$J^{\sqrt{n}}= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{n} & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ та } J_0= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Таким чином, спектральний аналіз зіркового графа $S(n, \infty)$ зводиться до дослідження спектральних властивостей матриць Якобі $J^{\sqrt{n}}$, J_0. Спектральний аналіз матриці J_0 добре відомий. Повний спектральний аналіз матриці $J^{\sqrt{n}}$ можна одержати за алгоритмом, наведеним у роботах

[1] *Лебідь В. О., Нижник Л. П.,* Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем//Наукові записки НаУКМА. – 2013. – Том 139, с. 18-22.

[2] *Лебідь В. О., Нижник Л. П.,* Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем//Доповіді НАН України. – 2014. – №3, с. 9-17.

Диференціювання в алгебрах поліноміальних ω-ультрарозподілів

Лозинська Віра Ярославівна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

vlozynska@yahoo.com

Шарин Сергій Володимирович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

sharynsir@yahoo.com

Алгебри розподілів та ультрарозподілів з тензорною операцією множення використовуються, наприклад, у квантовій теорії поля. Дослідження у цьому напрямку, а саме, вивчення алгебр поліноміальних розподілів та поліноміальних ультрарозподілів були проведені в роботах [2], [3], [4].

В доповіді розглянемо мультиплікативну алгебру $P(\mathcal{D}'_*)$ неперервних скалярних поліномів на просторі $\mathcal{D}'_*$ ω-ультрарозподілів [1], а також її сильно спряжену $P'(\mathcal{D}'_*)$. Алгебра $P(\mathcal{D}'_*)$ щільно вкладена в $P'(\mathcal{D}'_*)$. Операцію множення на $P(\mathcal{D}'_*)$ можна розширити до множення на $P'(\mathcal{D}'_*)$ так, що $P'(\mathcal{D}'_*)$ є також алгеброю.

Описано властивості диференціювання на алгебрах $P(\mathcal{D}'_*)$, $P'(\mathcal{D}'_*)$ за допомогою їх тензорного представлення.

[1] *Braun R.W., Meise R., Taylor B.A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. Results in Math., **17** (1990), P. 206–237.

[2] *Grasela K.* Generalized derivations and Fourier transform of polynomial ultradistributions. // Мат. студії. **20**, № 2 (2003), С. 167–178.

[3] *Lopushansky O.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation. Banach Center Publ. IM PAN. **88** (2010), P. 195–209.

[4] *Lopushansky O., Sharyn S.* Polynomial ultradistributions on $\mathbb{R}^d_+$. Topology, **48** (2009), P. 80–90.

Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій

Куриляк А. О.

Львівський національний університет ім. І.Франка

kurylyak88@gmail.ru

Скасків О. Б.

Львівський національний університет ім. І.Франка

matstud@franko.lviv.ua

Шаповаловська Л. О.

Львівський національний університет ім. І.Франка

shap.ludmila@gmail.com

Розглядаємо аналітичні функції $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$, вигляду

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum\nolimits_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m, \quad z = (z_1, z_2),$$

де $\mathbb{D} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon |\tau| < 1\}$. Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$. Для $r = (r_1, r_2) \in [0, 1)^2$ позначимо $\Delta_r = \{t = (t_1, t_2) \in [0, 1)^2\colon t_1 \geq r_1, t_2 \geq r_2\}$ та $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$.

Будемо казати, що множина $E \subset [0, 1)^2$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0, 1)^2$, якщо існує $r_0 \in [0, 1)^2$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int_{E \cap \triangle_{r_0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)} < +\infty,$$

у протилежному випадку кажемо, що множина має нескінченну логарифмічну міру на $[0, 1)^2$.

Теорема 1 *Для кожної функції $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ і будь-якого $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \subset [0, 1)^2$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0, 1)^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \Big(\frac{1}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \Big)^{1+\delta}.$$

Показник $1+\delta$ в останній нерівності не можна замінити числом меншим за 1. На це вказує таке твердження.

Теорема 2 *Існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$, стала $C > 0$, множина $E \subset [0,1)^2$ нескінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \geq C\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Відзначимо, що якісно подібні твердження отримано в [1] у випадку, коли функція f – аналітична в області $T = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

[1] *Kuryliak A.O. , Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B.* Wiman's type inequality for some double power series // Mat. Stud. – 2013. – V.39, №2. – P.134–141.

KC-функції зі значеннями у площині Сідра

Маслюченко Володимир

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Мироник Оксана

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Площина Сідра $\mathbb{M}$ – це топологічний простір, точками якого є точки з добутку $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$, а околи вводяться так: множина W буде околом точки $p = (x,y)$ при $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $0 < \varepsilon < y$, що $\{x\} \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq W$, і точки $p = (x,0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times [0,\epsilon)) \setminus (\{x\} \times (0,\varepsilon)) \subseteq W$. Відомо [1,2], що $\mathbb{M}$ – це вичерпний і неметризовний простір. В останні роки інтенсивно досліджувалися на сукупну неперервність нарізно неперервні відображення та їх аналоги, що набувають значень у просторах, близьких до метризовних (див. [3] і вказану там літературу). Зокрема, така задача постала і для відображень зі значеннями в $\mathbb{M}$. Для нарізно неперервних відображень вона була розв'язана у праці [4] для випадку, коли співмножники є зв'язними просторами. Тут ми подаємо результати, що виникли при продовженні досліджень з [4].

Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною*, якщо для довільної точки x з X і довільних околів U і V точок x і $f(x)$ у просторах X і Y відповідно існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *KC-функцією*, якщо для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to Z$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \to Z$ квазінеперервна.

Кажуть, що топологічний простір X має *властивість зліченності ланцюжків*, якщо довільна диз'юнктна система відкритих непорожніх множин з X є не більш, ніж зліченною.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір з властивістю зліченності ланцюжків і $f : X \to \mathbb{M}$ – квазінеперервна функція. Тоді її множина точок неперервності $C(f)$ залишкова в X.*

Для відображень зі значеннями в метризовних просторах – це добре відомий результат, доведення теореми 1 здійснюється зведенням до цього випадку.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір з властивістю зліченності ланцюжків, який має не більш ніж зліченну псевдобазу, Y – зв'язний берівський простір, що задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – KC-функція. Тоді множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ буде залишковою в X.*

[1] *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P.105-126.

[2] *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Добуток Сідра та вичерпні простори // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, №1-2. – С.107-112.

[3] *Маслюченко В., Мироник О.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(20 - 26 лютого 2012 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т. – 2012. – С.5-6.

[4] *Мироник О.Д.* Про нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Сідра // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, №3-4. – С.100-105.

Оператори композиції на алгебрі симетричних функцій

Можировська Зоряна Гориславівна

Львівська комерційна академія

nzoriana@yandex.ua

Класична теорема Біркгофа [1] стверджує, що оператор зсуву T_a на довільний ненульовий вектор a, $T_a \colon f(x) \mapsto f(x+a)$ є гіперциклічним у просторі $H(\mathbb{C})$. Годфруа і Шапіро [2] узагальнили цю теорему для випадку $H(\mathbb{C}^n)$ та описали всі гіперциклічні оператори композиції, що комутують з оператором зсуву. В доповіді розглянуто алгебру цілих симетричних функцій $H^n_s(\ell_p)$, $1 \le p < \infty$, та побудовано клас операторів композиції, які є гіперциклічними на цій алгебрі.

[1] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières,* C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[2] Godefroy G. and Shapiro J.H., *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*// J.Funct. Anal. V. 98, 1991, 229-269.

Подільні міри та ортогонально адитивні оператори

Михайлюк Володимир Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vmykhaylyuk@ukr.net

Плієв Марат Амурханович

Південний Математичний інститут (Владикавказ, Росія)

plimarat@yandex.ru

Попов Михайло Михайлович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

mismam.popov@gmail.com

Собчук Олександр Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ss220367@ukr.net

Серед нелінійних операторів особливе місце займають ортогонально адитивні оператори, оскільки деякі методи дослідження лінійних операторів можуть бути застосованими до таких операторів. До таких належать методи дослідження вузьких операторів, як було показано в [1]. Тут ми пропонуємо новий підхід до дослідження ортогонально адитивних операторів, пов'язаний з мірами на булевих алгебрах.

Нехай E – векторна ґратка та X – лінійний простір. Відображення $T : E \to X$ називається *ортогонально адитивним оператором*, якщо $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для всіх $x, y \in E$ таких, що $x \perp y$. Якщо, крім того, X є векторною ґраткою, то порядково обмежений ортогонально адитивний оператор називається *абстрактним оператором Урисона*. Нехай E – безатомна векторна ґратки та X – лінійний простір. Відображення $T : E \to X$ називається *строго вузьким*, якщо для довільного $e \in E$ існує розбиття $e = f \sqcup g$ елемента e таке, що $T(f) = T(g)$; *вузьким*, якщо X – нормований простір і для довільних $e \in E$ та $\varepsilon > 0$ існує розбиття $e = f \sqcup g$ елемента e таке, що $\|T(f) - T(g)\| < \varepsilon$; *порядково вузьким*, якщо X – векторна ґратка і для кожного $e \in E$ існує сітка розбиттів $e = f_\alpha \sqcup g_\alpha$ така, що $(T(f_\alpha) - T(g_\alpha)) \xrightarrow{\text{o}} 0$ (тобто, сітка $(T(f_\alpha) - T(g_\alpha))_\alpha$ порядково збігається до нуля). Відображення T з векторної ґратки E у банахів простір X називається: *латерально-нормовано σ-неперервним*, якщо T переводить латерально збіжні послідовності з E у збіжні за нормою послідовності в X; *латерально-нормовано неперервним*, якщо T переводить латерально збіжні сітки з E у збіжні сітки у X.

Нехай $\mathcal{A}$ – булева алгебра, X – лінійний простір, Y – нормований простір та Z – векторна ґратка. Міра (скінченно адитивна) $\mu : \mathcal{A} \to X$ називається *подільною*, якщо для довільного $x \in \mathcal{A}$ існує розклад $x = y \sqcup z$ такий, що $\mu(y) = \mu(z)$. Міра $\mu : \mathcal{A} \to Y$ називається *майже подільною*, якщо для довільних $x \in \mathcal{A}$ та $\varepsilon > 0$ існує розклад $x = y \sqcup z$ такий, що $\|\mu(y) - \mu(z)\| < \varepsilon$. Міра $\mu : \mathcal{A} \to Z$ називається *порядково подільною*, якщо для довільного $x \in \mathcal{A}$ існує сітка розкладів $x = y_\alpha \sqcup z_\alpha$ така, що $\big(\mu(y_\alpha) - \mu(z_\alpha)\big) \xrightarrow{\text{o}} 0$.

Використовуючи певну техніку, яка пов'язує поняття подільності міри та вузьких операторів, а також теорему Ляпунова про векторні міри та її узагальнення, нами отримано такі результати.

Теорема 1 *Нехай E – безатомна векторна ґратка з принциповою проективною властивістю, X – скінченновимірний нормований простір (відповідно, векторна ґратка). Тоді кожний σ-латерально-нормовано неперервний (відповідно, σ-латерально неперервний) ортогонально адитивний оператор $T : E \to X$ є строго вузьким.*

Теорема 2 *Нехай E, F – векторні ґратки з принциповою проективною властивістю, причому E – безатомна, а F – чисто атомна. Тоді кожний латерально неперервний абстрактний оператор Урисона $T : E \to F$ порядково вузький.*

Якщо E – векторна ґратка і $e \in E$, то через $\mathfrak{F}_e$ ми позначаємо булеву алгебру всіх фрагментів елемента e; якщо A – множина, то через $|A|$ ми позначаємо її потужність; якщо X – лінійний простір, то через $\text{H-dim}\, X$ ми позначаємо потужність його базису Гамеля.

Теорема 3 *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною безатомною мірою, E – безатомна порядково повна векторна підґратка $L_0(\mu)$, X – дійсний F-простір такий, що $|\mathfrak{F}_e| > \textit{H-dim}\, X$ для всіх $e \in E$ таких, що $e > 0$. Тоді кожний латерально неперервний ортогонально адитивний оператор $T : E \to X$ строго вузький.*

Теорема 3 дає, зокрема, відповідь на проблему 2.17 з [2].

[1] *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity (to appear).

[2] *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices. – Berlin–Boston: De Gruyter Studies in Mathematics 45, De Gruyter, 2013. – XIII, 319 p.

Рівняння з частинними похідними першого порядку у класі нарізно диференційовних функцій

Мироник Вадим Ілліч

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vadmyron@gmail.com

Михайлюк Володимир Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vmykhaylyuk@ukr.net

Розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог, тобто розв'язування того чи іншого диференціального рівняння в класі функцій, які задовольняють строго необхідні умови для існування виразів, що входять у дане рівняння, беруть свій початок з класичної праці Р.Бера [1]. В ній було показано, що кожний неперервний за сукупністю змінних нарізно диференційовний, тобто диференційовний відносно кожної змінної зокрема, розв'язок $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

має вигляд $f(x, y) = \varphi(x - y)$. У зв'язку з цим Р.Бер поставив питання про те, чи зберігається вигляд розв'язків рівняння (1) у класі нарізно диференційовниасильовичх функцій. Результат Р.Бера, як і його питання, були пізніше продубльовані в [4].

Подальші вивчення розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог були пророблені в роботах [2,3,5–7]. Зокрема, в [7] було розвинуто метод Р.Бера і встановлено, що його питання має позитивну відповідь, а в [2] було показано, що всі розв'язки рівняння коливання струни у класі нарізно двічі диференційовних функцій також мають класичний вигляд.

У зв'язку з цим природно виникає питання про розв'язки у класі нарізно диференційовних функцій лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Теорема 1 *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція, яка задовольняє наступні умови:*
1) $\alpha^{-1}(0)$ – замкнена, не більш ніж зліченна множина;
2) якщо $\alpha(x) \neq 0$ на інтервалі $I \subseteq \mathbb{R}$, то α зберігає знак на I;
3) α має первісну функцію $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ нарізно диференційовна функція, така, що

$$f'_x(x, y) + \alpha(x) f'_y(x, y) = 0 \tag{1}$$

для будь-яких $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді існує диференційовна функція φ, така, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$.

Теорема 2 *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – первісна для функції α і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ нарізно диференційовний розв'язок рівняння* (1). *Тоді існує диференційовна функція φ, така, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$.*

Питання. *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція, яка має первісну $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Чи обов'язково нарізно диференційовний розв'язок $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рівняння* (1) *має вигляд $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$?*

[1] Baire R. *Sur les fonctions de variables reelles*, Annali di mat. pura ed appl., ser.3 (1899), 1-123.

[2] Banakh T., Mykhaylyuk V. *Separately twice differentiable functions and the equation of string oscillation*, Real Anal. Exch., **37**, №2 (2011/2012), 1-23.

[3] Bruckner A.M., Petruska G., Preiss O., Thomson B.S. *The equation $u_x u_y = 0$ factors*, Acta Math. Hung., **57**,№3-4 (1991), 275-278.

[4] Chernoff P.R., Royden H.F. *The Equation $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$*, The American Mathematical Monthly, **82, №5** (1975), 530-531.

[5] Каланча А.К., Маслюченко В.К. *Узагальнення теореми Брукнера-Петруски-Прейса-Томсона* // Мат. студії. – 1999. – Т.1,№1. – С.48-52.

[6] Маслюченко В.К. *Одно свойство частных производных* // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39,№4. – С. 529-531.

[7] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Solving of partial differential equations under minimal conditions*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, **4**, № 2 (2008), 252-266.

Характеризації деяких ослаблень неперервності

Нестеренко Василь Володимирович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Добре відомою є характеризація неперевності відображення в термінах його замикання: відображення f між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини A простору X. К.Келлум у [1] увів поняття функції Ґібсона, а саме, відображення $f : X \to Y$ називається *функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для всіх відкритих множин U в X. В [2] О.Карлова та В.Михайлюк встановили, що поняття майже неперервності та поняття функції Ґібсона означають одне і теж. П.С.Келлер в [3] увів властивість щільності відображення ("dense mapping property", коротко DMP). Відображення $f : X \to Y$ має властивість DMP, якщо $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$ для довільної підмножини D простору X, такої, що $\overline{D}$ є зв'язною множиною. Р.Мімна в [4] встановив, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість DMP. В [5] Я.Борсіком було показано, що якщо відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y має властивість DMP, то f є B-квазінеперервним, а також наведено приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка є B-квазінеперервною, але не має властивості DMP. Також в [4] Р.Мімна показав, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$ для довільної ніде не щільної множини N.

Крім майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності існує велика кількість інших ослаблень неперервності. Виникає природний інтерес дослідити чи допускають інші ослаблення неперервності подібну характеризацію з допомогою включення $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, що виконується для множини A з певної системи $\mathcal{A}$. В цьому повідомлені подано такі характеризіції для майже неперервності, B-квазінеперервності, α-неперервності, ледь неперервності та майже ледь неперервності.

Нехай X і Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – деяка система підмножин простору X і $f : X \to Y$ – відображення. Ми кажемо, що відображення f є *$\mathcal{A}$-неперервним*, якщо $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

Підмножина A простору X називається *напіввідкритою* (*передвідкритою* чи *α-відкритою*), якщо $A \subseteq \overline{intA}$ ($A \subseteq int\overline{A}$ чи $A \subseteq int(\overline{intA})$).

Відображення $f : X \to Y$ називається:

- *майже неперервним*, якщо для довільного $x \in X$ і кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$;
- *B-квазінеперервним*, якщо для довільного $x \in X$, довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y і довільної області O в X, такої, що $x \in \overline{O}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(U) \subseteq V$;
- *α-неперервним*, якщо для довільного $x \in X$ і для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує α-відкрита множина A в X, така, що $x \in A$ і $f(A) \subseteq V$;
- *ледь неперервним*, якщо для довільного $x \in X$ і для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G, така, що $f(G) \subseteq V$;
- *майже ледь неперервним*, якщо для довільного $x \in X$ і для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$.

Теорема. *Нехай X та Y – топологічні простори і $f : X \to Y$. Тоді:*

(1) f – майже неперервне $\Leftrightarrow$ f – $\mathcal{G}_s$-неперервне, де $\mathcal{G}_s$ – система напіввідкритих множин в X;

(2) f – B-квазінеперервне $\Leftrightarrow$ f – $\mathcal{O}_p$-неперервне, де $\mathcal{O}_p = \{A \in 2^X : A$ – передвідкрита множина і $int\overline{A}$ – область$\}$;

(3) f – α-неперервне $\Leftrightarrow$ f – $\mathcal{G}_p$-неперервне, де $\mathcal{G}_p$ – система всіх передвідкритих множин в X;

(4) f – ледь неперервне $\Leftrightarrow$ f – $\mathcal{D}$-неперервне, де $\mathcal{D} = \{A \in 2^X : \overline{A} = X\}$;

(5) f – майже ледь неперервне $\Leftrightarrow$ f – $\mathcal{D}_n$-неперервне, де $\mathcal{D}_n = \{X \setminus N : N$ – ніде не щільна множина в $X\}$.

[1] *Kellum K.R.* Functions that separate $X \times \mathbb{R}$ // Real Anal. Exch. Summer Symposium 2009. – P. 21-23.

[2] *Karlova O.O. Mykhaylyuk V.V.* On Gibson functions with connected graphs // Math. Slovaca. – 2013. – **63**, N3. – C. 479-492.

[3] *Keller P.S.* Chaotic behavior of Newton's method // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, N. 2. – P. 490–507.

[4] *Mimna R.A.* Omega-limit sets and non-continuous functions // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, N. 1. – P. 267-273.

[5] *Borsik J.* Bilateral quasicontinuity in topological spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2004. – **28**. – P. 159-168.

[6] *Borsik J.* On the points of bilateral quasicontinuity of functions // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 529-536.

Простори граничних значень та самоспряжені розширення деяких ермітових операторів

Оліяр Юрій Ігорович

Львівський національний університет ім. І. Франка

aruy@ukr.net

Сторож Олег Георгійович

Львівський національний університет ім. І.Франка

storog@ukr.net

Опис самоспряжених розширень (нещільно визначеного) ермітового оператора наведено в [1], у термінах дефектних просторів. Нижче встановлено критерій самоспряженості згаданих розширень (щоправда, при деяких обмеженнях) у термінах просторів граничних значень, тобто у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов.

$D(T), \ker T$ - відповідно область визначення та многовид нулів лінійного оператора T;

T^* - оператор, спряжений з оператором T;

$(\cdot \mid \cdot), \oplus, \perp$ - символи скалярного добутку, ортогональної суми та ортогонального доповнення, відповідно; якщо X, Y - гільбертові простори, то під $\mathcal{C}(X), \mathcal{B}(X, Y)$ розуміємо класи лінійних замкнених щільно визначених операторів у просторі X та лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, відповідно.

Нехай H - комплексний гільбертів простір, а $H^2 \overset{def}{=} H \oplus H$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у просторі H називають довільний (замкнений) лінійний многовид $T \subset H^2$, а область визначення та спряжене відношення визначають таким чином:

$$D(T) = \{y \in H : (\exists z \in H)(y, z) \in T\},$$

$$T^* = \{(y_2, z_2) \in H^2 : \forall (y_1, z_1) \in T \ (z_1 \mid y_2) - (y_1 \mid z_2) = 0\}$$

Відношення T називають самоспряженим, якщо $T = T^*$.

Далі, нехай $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ - симетричний оператор (так що $L_0 \subset L_0^* \overset{def}{=} L$), $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ - антисиметричний простір граничних значень оператора L_0 (див. [2]), H_0 - скінченновимірний підпростір простору H, а P_0 - ортопроектор $H \to H_0$. Визначимо оператор S_0 за допомогою співвідношень $D(S_0) = D(L_0) \cap H_0^{\perp}, S_0 \subset L_0$.

Теорема 1 *Лінійне відношення $S \supset S_0$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли існують оператори $A^{\pm} \in \mathcal{B}(G^{\pm}, G^-)$ такі, що*

$$A^+(A^+)^* = A^-(A^-)^*, \ \ker A^{\pm} = \{0\},$$

а S складаєтьса з тих елементів $\{(y, Ly+\phi) \subset S_0^*\}$ які задовольняють умову

$$A^+ \left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + iP_0 y)\right) + A^- \left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iP_0 y)\right) = 0.$$

[1] *Красносельський М. А.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. - 1949. - N 1. - С. 21 - 38.

[2] *Сторож О. Г.*расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат. заметки. - 1984. - 36, N 5. - С. 791-796.

Перетворення Лапласа в просторі лапласових гіперфункцій типу ω

Патра Марія Ігорівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

patra-m@mail.ru

Простір лапласових гіперфункцій типу $\omega \in \mathbb{R}$ на додатній півосі $\mathbb{R}_+ := [0;\infty)$ вводять як фактор-простір $\mathcal{B}_{(\omega)}(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{L}_{(\omega)}(W \setminus \mathbb{R}_+)/\mathfrak{L}_{(\omega)}(W)$ у роботі [1], де

$$\mathfrak{L}_{(\omega)}(W) = \{F \in \mathcal{O}(W) : \sup_{z\in\tilde{W}} |e^{\delta z}F(z)| < \infty \, \forall \delta \in \mathbb{R},\, \delta < \omega$$
$$\text{і кожної замкненої (в } \mathbb{C}) \text{ циліндричної підмножини} \tilde{W} \subset W\},$$

$\mathcal{O}(W)$ — простір голоморфних функцій.

Функція $F \in \mathfrak{L}_{(\omega)}(W \setminus \mathbb{R}_+)$ визначає лапласову гіперфункцію $f = F + \mathfrak{L}_{(\omega)}(W)$. Вживають позначення $f = [F]$.

Перетворення Лапласа розглядалося у просторах дещо інших гіперфункцій (див. [2, 3]). Використовуючи схожу методику, введемо перетворення Лапласа для гіперфункції $f(t) = [F(z)] \in \mathcal{B}_{(\omega)}(\mathbb{R}_+)$ наступним чином:

$$\hat{f}(s) = -\int_{\Gamma} e^{-sz}F(z)dz,$$

де Γ — контур, який починається в $\infty + i0$, проходить над $\mathbb{R}_+$, через точку $-a < 0$, під $\mathbb{R}_+$ і до $\infty - i0$.

Теорема 1 *Функція* $\hat{f}(s)$ *є голоморфною в півплощині* $\mathrm{Re}s > \inf(-\delta)$.

[1] *Graf U.* Introduction to Hyperfunctions and Their Integral Transforms: An Applied and Computational Approach. – Springer, 2010.

[2] *Stanković B.* Laplace Transform of Laplace Hyperfunctions and its Aplications // Novi Sad J. Math. – 2001. – **31**, № 1. – P. 9-17.

[3] *Szmydt Z., Ziemian B.* Laplace Distributions and Hyperfunctions on $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. – 1998. – **5**. – P. 41-74.

Продовження Арона-Бернера для функціонального числення в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу

Петрів Галина Миколаївна

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

galja_petriv@mail.ru

Нехай A – комутативна банахова алгебра, X – банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Крім того вимагаємо щоб A була регулярною за Аренсом. Розглянемо тензорний добуток $A \otimes X$, кожен елемент якого $\overline{a} \in A \otimes X$ можна подати у вигляді формальної суми $\sum_k a_k \otimes x_k$, де $a_k \in A$, $x_k \in X$. Проективною нормою на тензорному добутку називають норму $||\overline{a}||_\pi = \inf \sum_k ||a_k|| ||x_k||$, де inf беруть по всіх зображеннях $\overline{a} = \sum_k a_k \otimes x_k$. Позначимо $A \otimes_\pi X$ – поповнення $A \otimes X$ за нормою $|| \cdot ||_\pi$.

Нагадаємо, що X є лівим A-модулем (X є лівим модулем над A), якщо існує білінійне відображення $A \times X \to X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ таке, що $(a_1 \cdot a_2) \cdot x = a_1 \cdot (a_2 \cdot x)$, де $a_1, a_2 \in A, x \in X$. Аналогічно, $A \otimes_\pi X$ є лівим A-модулем, якщо існує білінійне відображення $A \times (A \otimes_\pi X) \to (A \otimes_\pi X)$, $(a, u) \mapsto a \cdot u$ таке, що $(a_1 \cdot a_2) \cdot u = a_1 \cdot (a_2 \cdot u)$, де $a_1, a_2 \in A, u \in (A \otimes_\pi X)$.

На основі Теореми 2 ([1], ст.297) доведено наступну теорему.

Теорема 1 *Нехай $(A \otimes_\pi X)$ є лівим A-модулем. Тоді $(A \otimes_\pi X)''$ є лівим A''-модулем.*

Позначимо $H_b(X)$ алгебру цілих функцій обмеженого типу. Для кожного $\overline{a} \in A \otimes_\pi X$, $f \in H_b(X)$ визначимо $\overline{f}(\overline{a})$ в сенсі функціонального числення для аналітичних функцій на банаховому просторі([2]). Тоді $\widetilde{\overline{f}}$– продовження Арона-Бернера для $\overline{f}$. Наступне твердження є узагальненням результатів отриманих у роботі [3].

Твердження 2 *Нехай A — регулярна за Аренсом банахова алгебра. Для кожної функції $f \in H_b(X)$ існує така функція $\widetilde{\overline{f}} \in H_b((A \otimes_\pi X)'', A'')$, що $\widetilde{\overline{f}}(e \otimes x) = ef(x), x \in X$ і відображення $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b((A \otimes_\pi X)'', A'')$.*

[1] *Cabello Sanchez F., Garcia R., and Villanueva I.* Extension of multilinear operators on Banach spaces // Extracta mathematicae — 2000 —Vol. 15, no 2 — p. 291-334.

[2] *Dineen S., Hart R. E., and Taylor C.* Spectra of tensor product elements III : holomorphic properties // Proceedings of the Royal Irish Academy — 2003 —103A (1)— p. 61-92.

[3] *Загороднюк А. В. , Петрів Г. М.* Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013 — Вип. 11 — С. 7–11.

Про одну властивість додатно визначеного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Дмитришин Роман Іванович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

dmytryshynr@hotmail.com

В доповіді розглядається додатно визначений гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду

$$\Phi_0 + \frac{1}{b_{01} + z_{01} - \Phi_1} - \frac{a_{02}^2}{b_{02} + z_{02} - \Phi_2} - \frac{a_{03}^2}{b_{03} + z_{03} - \Phi_3} - \cdots, \tag{1}$$

де a_{rs}, $r, s \geq 0$, $r \neq 1$, $r + s \geq 2$, b_{rs}, $r, s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні сталі, z_{rs}, $r, s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні змінні,

$$\Phi_k = \frac{1}{b_{1k} + z_{1k}} - \frac{a_{2k}^2}{b_{2k} + z_{2k}} - \frac{a_{3k}^2}{b_{3k} + z_{3k}} - \cdots, \quad k \geq 0.$$

Теорема 1 *Якщо для дробу (1) виконуються умови*

$$\beta_{01}g_{01} + y_{01} > 0,\ \beta_{1s}g_{1s} + y_{1s} > 0,\ \beta_{rs} \geq 0,\ y_{rs} \geq 0, \quad r, s \geq 0,\ r + s \geq 1,$$

$$\operatorname{Im} a_{rs}^2 \leq \beta_{rs}\beta_{r+\delta_{r0}-1, s-\delta_{r0}}(1 - g_{r+\delta_{r0}-1, s-\delta_{r0}})g_{rs},\ r, s \geq 0,\ r \neq 1,\ r + s \geq 2,$$

де $\beta_{rs} = \operatorname{Im} b_{rs}$, $y_{rs} = \operatorname{Im} z_{rs}$, $0 \leq g_{rs} \leq 1$, δ_{pq} *— символ Кронеккера, то його* n*-і підхідні дроби* $f_n(\mathbf{z})$ *задовольняють співвідношення*

$$\operatorname{Im} f_n(\mathbf{z}) \leq 0, \quad |f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{\beta_{10}g_{10} + y_{10} + \beta_{01}g_{01} + y_{01}}{(\beta_{10}g_{10} + y_{10})(\beta_{01}g_{01} + y_{01})}, \quad n \geq 1.$$

Метричні оцінки функції Бесселя

Симотюк Михайло Михайлович

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,
quaternion@ukr.net

Тимків Іван Романович

Івано–Франківський національний технічний університет нафти і газу
tymkiv_if@ukr.net

Нехай $\Gamma(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ – гамма-функція Ейлера, $J_\alpha(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ – функція Бесселя першого роду порядку α:

$$J_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

При дослідженні крайових задач для рівнянь із частинними похідними в кругових областях [1] виникає потреба знайти такі послідовності додатних чисел $\{g_j(k) : k \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, 2, 3$, для яких нерівності для функцій Бесселя півцілого індекса

$$\left|J_{k+1/2}(kt)\right| \geq g_1(k), \tag{1}$$

$$\left|J_{n+1/2}(kt)\right| \geq g_2(k), \tag{2}$$

$$\left|J_{k+1/2}(t)\right| \geq g_3(k) \tag{3}$$

виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега на прямій) чисел $t \in [T_0, T_1]$ $(T_0 > 0)$ для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k.

Доповідь присвячена викладу такого результату.

Теорема. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t \in [T_0, T]$ *нерівності* (1)–(3) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) значень* $k \in \mathbb{N}$*, якщо*

$$g_1(k) = \left(\frac{e}{T_0}\right)^k k^{-3k-1-\varepsilon_1},\ g_2(k) = k^{-n-3/2-\varepsilon_2},\ g_3(k) = \left(\frac{e}{T_0}\right)^k k^{-3k+1/2-\varepsilon_3},$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$.

Для доведення теореми використано відому властивість функції Бесселя півцілого індекса [2]

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^q \left(t^{q+1/2}J_{q+1/2}(\lambda t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda^{q-1/2}\sin(\lambda t), \quad t>0, \quad q\in\mathbb{N},$$

асимптотичну формулу Стірлінга [3]

$$k! = \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \qquad k\to\infty,$$

а також таке допоміжне твердження, яке узагальнює лему 2.2 у [4].

Лема. *Нехай $f(t)\in C^q(a,b)$ є такою, що для всіх $t\in(a,b)$*

$$\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^q f(t)\right| \geq \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon>0$

$$\operatorname{mes}\{t\in(a,b) : |f(t)|<\varepsilon\} \leq \frac{2q}{a}\left(\frac{q!\,\varepsilon}{\delta}\right)^{1/q},$$

де символ mes *позначає міру Лебега на прямій.*

[1] *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений.– К.: Наук. думка, 2002.– 316 с.

[2] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I.: Изд. иностр. литер.–1949.– 787 с.

[3] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциальноого и интегрального исчесления. Т. 2. М.: Наука. –1964. – 800 с.

[4] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Про оцінки малих знаменників багатоточкової задачі для навантаженого гіперболічного рівняння

Симотюк Михайло Михайлович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Хомяк Дмитро Володимирович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

khomiak.dmytro@gmail.com

Нехай $P_{n,p}$ (відповідно, $P^{hom}_{n,p}$) — множина усіх (відповідно, усіх однорідних) многочленів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами; $A_j \in P^{hom}_{j,p}$, $j = 1,\ldots,n$, $B_j \in P_{m,p}$, $m < n$, $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1|+\ldots+|k_p|$, $L(\lambda, k) \equiv \lambda^n + A_1(k)\lambda^{n-1} + \ldots + A_n(k)$. Припускаємо, що многочлени A_j, $j = 1,\ldots,n$, є такими, що λ-корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, многочлена $L(\lambda, k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ є попарно різними, суто уявними числами. Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ розглянемо такі функції:

$$\Delta(k, t_1,\ldots,t_n) = \det \|\exp(\lambda_q(k)t_j)\|^n_{j,q=1}, \quad t_1,\ldots,t_n \in [0,T], \tag{1}$$

$$\Gamma(k, \tau_1,\ldots,\tau_m) = 1 - \sum_{j=1}^{m} B_j(ik)I_k(\tau_q), \quad \tau_1,\ldots,\tau_m \in [0,T], \tag{2}$$

де $I_k(t) \equiv \int_0^T G_k(t,\tau)d\tau$, а $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$, — функція Ґріна такої багатоточкової задачі для диференціального рівняння:

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) f(t) = 0, \quad f(t_j) = 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Відомо [1], що функція $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$, коректно визначена тоді і тільки тоді, коли параметри $t_1,\ldots,t_n$ є такими, що

$$\Delta(k, t_1,\ldots,t_n) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}. \tag{3}$$

Тому формула (2) має зміст, якщо справджується умова (3).

При дослідженні умов коректної розв'язності (у шкалі просторів Соболєва) задач з багатоточковими умовами для навантажених гіперболічних рівнянь виникає потреба з'ясувати, коли для функцій (1), (2) виконуються оцінки

$$|\Delta(k, t_1, \dots, t_n)| \geq (1 + |k|)^{-\omega_1}, \quad \omega_1 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$|\Gamma(k, \tau_1, \dots, \tau_m)| \geq (1 + |k|)^{-\omega_2}, \quad \omega_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

На підставі метричного підходу [2] нами встановлено такі результати.

Теорема 1 *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0, T]^n$ нерівність* (4) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega_1 > pn(n-1)/2$.*

Теорема 2 *Якщо для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ справджується нерівність $|A_n(ik)| \neq 0$ і умова* (3), *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in [0, T]^m$ нерівність* (5) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega_2 > pmn$.*

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.

Про оператори народження, знищення на просторах типу Фока та їх зв'язок із похідною Ґросса

Скіданюк О. С.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Шарин С. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
sharyn.sergii@gmail.com

Нехай $A \in \mathcal{L}(E)$ — довільний лінійний неперервний оператор на локально опуклому просторі E. Нехай $\otimes_{s,\mathfrak{p}}^n E$ — n-тий симетричний тензорний степінь простору E, поповнений в проективній тензорній топології $\mathfrak{p}$. За означенням приймемо $\otimes_{s,\mathfrak{p}}^0 E := \mathbb{C}$ та $\otimes_{s,\mathfrak{p}}^1 E := E$.

Визначимо оператор $A^{\{\otimes\}} \in \mathcal{L}\Big(\times_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,\mathfrak{p}}^n E\Big)$ наступним чином

$$A^{\{\otimes\}} := \times_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\{\otimes\}_n} : q = \times_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \quad \longmapsto \quad A^{\{\otimes\}} q := \times_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\{\otimes\}_n} q_n,$$

де $A^{\{\otimes\}_0} q_0 := 0$, і для кожного $n \in \mathbb{N}$ оператор $A^{\{\otimes\}_n} \in \mathcal{L}\big(\otimes_{s,\mathfrak{p}}^n E\big)$ визначений як лінійне і неперервне розширення відображення

$$x \otimes \ldots \otimes x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x \otimes Ax}_{i} \otimes x \otimes \ldots \otimes x, \qquad x \in E.$$

Нехай S_+ — простір Шварца швидко спадних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+^d$. У випадку $E = S_+$ ми покажемо зв'язок між операторами народження та знищення, похідною Ґросса (див. [2]) та оператором узагальненого диференціювання $D^{\{\otimes\}}$ на просторі поліноміальних узагальнених функцій (див. [1]), де D — (звичайний) оператор диференціювання на S_+.

[1] Lopushansky O.V., Sharyn S.V. Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}_+^d$ // Topology. – 2009. – V.48, No.2–4. – P. 80–90.

[2] Ji U.C., Obata N. Generalized white noise operator fields and quantum white noise derivatives // Séminaires & Congrès. –2007. – V.16. – P. 17–33.

The value distribution of multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane

Sokulska Natalia Bogdanivna

Ivan Franko National University of Lviv

natalya.sokulska@gmail.com

Let $\mathcal{H} = \{z : Im \ \ z > 0\}$ and let $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}} \backslash \{0\}$. The set $\mathcal{H}^*$ is invariant with respect to multiplicative group $\mathbb{R}^+$.

Definition A meromorphic in $\mathcal{H}^*$ function f is said to be multiplicatively periodic of multiplicator q, $0 < q < 1$, if it satisfies the following condition

$$\forall z \in \mathcal{H}^* \quad f(qz) = f(z).$$

The set of such functions is denoted by $\mathcal{M}_q$. It is clear that $\mathcal{M}_q$ forms a field.

The value distribution of functions from $\mathcal{M}_q$ describes the following theorem.

Theorem Let $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ and $f(z) \neq 0, \infty$ on $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Then

1) the sum of the $\arg f$ increments along the segments $[qt, t]$ and $[-t, -qt]$ doesn't depend on t and equals to $2\pi\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big)$, where $n_0(f)$, $n_\infty(f)$ are the numbers of zeros and poles of the function f in the horseshoe $\mathcal{A}_1 = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : q < |z| \leq 1\}$ respectively;

2) Let $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ be $a-$points of f, $a \in \mathbb{C}$, and $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ be the poles of f in $\mathcal{H}^*$. Then

$$\int_{qr}^{r} \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q}{r_n} - \frac{r_n}{t^2}\right) \sin\alpha_n dt = \int_{qr}^{r} \sum_{qt < \rho_n \leq t} \left(\frac{q}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{t^2}\right) \sin\beta_n dt$$

for any positive r.

Corollary Let f be a holomorphic and multiplicatively periodic function of multiplicator q, $0 < q < 1$, in $\mathcal{H}^*$, $f \neq const$ and $f(z) \neq 0, \infty$ on $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Let $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ be $a-$points of f, $a \in \mathbb{C}$. Then

$$\int_{qr}^{r} \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q}{r_n} - \frac{r_n}{t^2}\right) \sin\alpha_n dt = 0$$

for any positive r.

Іменний покажчик

Арясова О. В., 6
Баран О. Є., 43
Бігун Г. С., 8
Боднар Д. І., 43
Бубняк М. М., 44
Буртняк І. В., 27
Цаповська Ж. Я., 20
Чернега І. В., 54
Чернега П. П., 38
Дмитришин Р. І., 85
Достойна В.В., 49
Довгай Б. В., 11
Дьогтєва І. О., 9
Федуник-Яремчук О. В., 55
Гаєвський М. В., 53
Ганиченко Ю. В., 13
Грабова У. З., 59
Хомяк Д. В., 88
Єлейко Я. І., 24
Ільків В. С., 48, 57, 58
Іваненко Д. О., 18
Кальчук І. В., 59
Карлова О. О., 62
Кінаш О. М., 29
Кнопова В. П., 20
Коцюба І. Б., 19
Копач М. І., 64
Копитко Б. І., 20
Косенкова Т. І., 22
Козаченко Ю. В., 23, 35
Красікова І. В., 65
Куриляк А. О., 72
Лебедєв О. А., 24
Лебідь В. О., 69
Лозинська В. Я., 71
Макогін В. І., 26
Малицька Г. П., 27
Маслюченко О. В., 46
Маслюченко В. К., 5, 46, 73
Михайлюк В. В., 75, 77
Михальчук Р. І., 44
Мироник О., 73
Мироник В. І., 77
Млавець Ю. Ю., 23
Можировська З. Г., 75
Нестеренко В. В., 79
Нитребич З. М., 58
Обшта А. Ф., 64
Оліяр Ю. І., 81
Осипчук М. М., 5, 8
Патра М. І., 83
Петрів Г. М., 84
Пилипенко А. Ю., 28
Плацидем М. І., 29
Плієв М. А., 75
Попов М. М., 75
Портенко М. І., 5
Приходько Ю. Е., 28
Савка І. Я., 58
Симотюк М. М., 86, 88
Скасків О. Б., 4, 72
Скіданюк О. С., 89
Слободян С. Я., 32
Собчук О. В., 76
Соболєва Д. Д., 33
Сторож О. Г., 81
Страп Н. І., 57
Шаповаловська Л. О., 72
Шарин С. В., 71, 90
Шевчук Р. В., 41
Шувар Б. А., 64
Танцюра М. В., 34
Тимків І. Р., 86
Трошкі Н. В., 35
Трошкі В. Б., 37
Веркалець Н. Б., 45
Волошин Г. А., 46
Волянська І. І., 48
Вотякова Л. А., 9
Возняк О. Г., 44
Задерей П. В., 53
Загороднюк А. В., 54
Зелінський Ю. Б., 3
Жерновий К. Ю., 14
Жерновий Ю. В., 15
Жмурко О. І., 16
Жмурко Т. О., 16

Bandura A. I., 42
Khrystiyanyn A., 63
Kondratyuk A. A., 4
Kravtsiv V. V., 67
Kryven M., 68
Kulinich H. M., 42
Slyvka-Tylyshchak A., 31
Sokulska N. B., 90
Vyshyns'kyi O., 63
Zaborovska V. S., 52