



**Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Івано-Франківське математичне товариство**

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ**

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

**Ворохта
22 – 25 лютого 2017**

Івано-Франківськ, 2017

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Івано-Франківське математичне товариство

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Ворохта
22 – 25 лютого 2017 року

Івано-Франківськ, 2017

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22 — 25 лютого 2017 р. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2017. — 138 с.

Відповідальний за випуск Осипчук М. М.

Організаційний комітет:

- Загороднюк А. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Копач М. І. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Качановський М. О. Інститут математики НАН України, Київ
- Кулик О. М. Інститут математики НАН України, Київ
- Маслюченко В. К. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
- Осипчук М. М. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Пилипенко А. Ю. Інститут математики НАН України, Київ
- Портенко М. І. Інститут математики НАН України, Київ
- Скасків О. Б. Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
- Слободян С. Я. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Шарин С. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
- Шевчук Р. В. Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторському варіанті.

Пленарні лекції

Analytic structures on metric spaces multisets

HOLUBCHAK O.M.

Ivano-Frankivsk College of Lviv National Agrarian University, 11 Yunosti Str., Ivano-Frankivsk 76492, Ukraine
oleggol@ukr.net

ZAGORODNYUK A.V.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine
andriyzag@yahoo.com

Let us recall a function f on complex ℓ_1 to $\mathbb{C}$ is said to be *symmetric* if for every permutation σ on positive integers $\mathbb{N}$, $f(\sigma(x)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots) = f(x)$, $x \in \ell_1$.

The algebra of all continuous symmetric polynomials on ℓ_1 will be denoted by $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Symmetric polynomials and analytic functions were investigated by many authors (see e. g. [1, 1, 4] and the survey [2]). In particular, it is known that $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ admits algebraic bases.

The *power* basis consists of polynomials

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_1.$$

The *elementary symmetric polynomials* $G_n(x) = \sum x_{i_1} \dots x_{i_n}$ form an another basis in $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ and the Newton equality holds

$$nG_n = G_{n-1}F_1 - G_{n-2}F_2 + \dots + (-1)^n F_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Let M_0 be the set of all finite multisets of nonzero complex numbers. That is, each element $u \in M_0$ can be represented by $u = \{a^m, b^n, c^k, \dots\}$, where $a, b, c, \dots$ are complex number all of them are not equal to zero, $m, n, k, \dots$ are the numbers of entrances of $a, b, c, \dots$ to u respectively.

Let c_{00} be the linear space of all finite sequences $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. We say, that $x \sim y$, $x, y \in c_{00}$ if there is a permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that

$$\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots) = y.$$

Let $c_{00}/\sim$ be the quotient set with respect to the equivalence. Clearly that the identical map $I: \{a, b, c, \dots\} \mapsto (a, b, c, \dots, 0, \dots, 0, \dots)$ is a bijection between M_0 and $c_{00}/\sim$. If d is a metric on c_{00} such that $d(x, y) = d(\sigma(x), \sigma(y))$ for every permutation σ . Then $\rho(u, v) = d(I(u), I(v))$ is a metric on M_0 and I can be extended to an isometric isomorphism from the completion of $(c_{00}/\sim, d)$ to the completion of (M_0, ρ) .

Note that M_0 is a commutative semi-group with respect to the union: $uv = u \cup v$, $u, v \in M_0$. We say that a polynomial of a complex variable $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ is normalized, if $a_n = 1$ and $a_0 \neq 0$. The set of all normalized polynomials $\mathcal{P}_N(\mathbb{C})$ forms a commutative semigroup with respect to multiplication.

Proposition 1. *Let $\mathbb{P} = \{P_n\}$, $\deg P_n = n$ be an algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $c_{00}, \mathcal{P}_s(c_{00})$. Then the map $\tau_{\mathbb{P}}: c_{00}/\sim \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$*

$$\tau_{\mathbb{P}}: x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \mapsto t^n - P_1(x)t^{n-1} + \dots + (-1)^n P_n(x)$$

is a bijection and if $P_n = G_n$, then $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ is an isomorphism of semigroups M_0 onto $\mathcal{P}_N(\mathbb{C})$.

In the talk will be discussed analytic structures arising on an appropriate completion of M_0 for the cases of different algebras and spaces of symmetric analytic functions.

References

- [1] R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p* , Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55–64.
- [2] I. Chernega, *Symmetric Polynomials and Holomorphic Functions on infinite dimensional spaces*, Journal of Vasyly Stefanyk Precarpathian National University, **4** (2) (2015), 23–49. doi:10.15330/jpnu.2.4.23-49
- [3] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **55** (2012), 125–142.
- [4] M. Gonzalez, R. Gonzalo and J. Jaramillo, *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*, Jour. London Math. Soc., **59** (1999), 681–697.

Задача про тінь в точці

ЗЕЛІНСЬКИЙ Ю. Б.

Інститут математики НАН України
yuzelinski@gmail.com

Клищук Б. А.

Інститут математики НАН України
kban1988@gmail.com

Далі під m -вимірними площинами розуміємо m -вимірні афінні підпростори евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Означення. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m -опукла відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m -вимірна площина L , така що $x \in L$ і $L \cap E = \emptyset$.

В роботі [1] досліджено деякі властивості m -опуклих множин.

Твердження 1. Якщо E_1 та E_2 відповідно k -опукла і m -опукла множини, $k \leq m$, то $E = E_1 \cap E_2$ буде k -опуклою множиною.

Твердження 2. Якщо E_1 та E_2 відповідно k -опукла і m -опукла множини, $k + m \geq n$, то $E = E_1 \cup E_2$ буде $(k + m - n)$ -опуклою множиною.

В роботі [1] досліджено різні варіанти наступної задачі, яку популярно можна назвати задачею про тінь в точці.

Задача. Яка мінімальна кількість опуклих множин, які попарно не перетинаються і з деякими заданими умовами, достатня для того, щоби будь яка пряма, що проходить через наперед задану точку, перетинала хоча б одну з цих множин?

Для набору куль різних радіусів в [1] отримана оцінка.

Теорема 1. Для того щоб вибрана точка в n -вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-оболонці сім'ї відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо n куль.

Виявляється, що у випадку куль однакового радіуса результат відрізняється від випадку, коли кулі різних радіусів.

Теорема 2. Для довільної точки простору $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_i$, де B_1 , B_2 , B_3 — набір з трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через цю точку, існує $(n - 2)$ -вимірна площина, що містить цю точку і не перетинає жодну з куль.

Література

- [1] Ю. Б. Зелинский, *Выпуклость. Избранные главы*, Праці Інституту математики НАНУ, **92** (2012), 280 с.
- [2] Ю. Б. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств*, Збірник праць Інституту математики НАНУ, **12** (4) (2015), 197–204.

Analysis of blowup time for diffusion equations with control by new dynamic programming approach

NOWAKOWSKI A.

University of Lodz, Faculty of Math & Computer Sciences
annowako@math.uni.lodz.pl

We analyse the blowup time for semilinear parabolic differential equations with control function by constructing new dynamic programming methodology. This new approach allows us to formulate verification theorem and sufficient optimality conditions of first order for controlled blowup time. We define ε -optimal value function and we construct sufficient ε -optimal conditions for that function again in terms of new dynamic programming inequality.

Аналіз методів статистичного моделювання дробового броунівського руху

ПАШКО А. О.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
aap2011@ukr.net

В роботі досліджуються методи статистичного моделювання дробового броунівського руху. Розглядаються дві моделі.

1. Спектральна модель. Модель будується на основі спектрального зображення дробового броунівського руху у вигляді рядів [1].

Дробовий броунівський рух $W_\alpha(t)$ на $t \in [0, 1]$ з індексом Хюрста $\alpha \in (0, 1)$ можна представити у вигляді [1]

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (1 - \cos(y_n t)) \eta_n,$$

де

$$c_n = \frac{\sqrt{2C}}{x_n^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_n)}, \quad d_n = \frac{\sqrt{2C}}{y_n^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_n)}, \quad C = \frac{\Gamma(2\alpha + 1) \sin(\pi\alpha)}{\pi},$$

$\{x_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$, $\{y_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$, $\{\xi_n, \eta_n\}$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Модель будемо у вигляді

$$S_\alpha(t, N) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^N d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n,$$

де $\{X_n, Y_n\}$ — послідовність незалежних строго субгауссових випадкових величин з $EX_n = EY_n = 0$ та $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$.

Оцінки точності і надійності моделі $S_\alpha(t, N)$ досліджувались в роботі [2].

2. Модель на основі приростів. Дробовий броунівський рух із довільним індексом Хюрста є випадковим процесом із стаціонарними приростами, тобто, випадковий процес $w(t) = W_\alpha(t + \Delta) - W_\alpha(t)$ є гауссовим стаціонарним випадковим процесом із спектральною щільністю $f(\lambda) = \frac{A^2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\lambda \Delta)}{|\lambda|^{2\alpha+1}} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, $A = \left(-\frac{2}{\pi} \Gamma(-2\alpha) \cos(\alpha\pi) \right)^{-\frac{1}{2}}$. Моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів розглядалось в роботі [3].

Модель $w_N(t, \Lambda)$ процесу $w(t)$ будемо у вигляді

$$w_N(t, \Lambda) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sin(\lambda_n t) X_n + \cos(\lambda_n t) Y_n \right),$$

де $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N = \Lambda$ — деяке розбиття відрізка $[0, \Lambda]$, послідовність $\{X_n, Y_n\}$ — незалежні строго субгауссові випадкові величини з $EX_n = EY_n = 0$ та $EX_n^2 = EY_n^2 = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(\lambda) d\lambda$.

Лема 1. *Модель $w_N(t, \Lambda)$ наближає процес $w(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ та точністю δ у нормі простору $L_2([0, 1])$, якщо для чисел Λ та N виконуються нерівності $B(N, \Lambda) \leq \delta^2$ та*

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\delta}{\sqrt{B(N, \Lambda)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2B(N, \Lambda)}\right) \leq \varepsilon$$

де

$$B(N, \Lambda) = 2T \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left(1 - \frac{\sin(\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} \right) f(\lambda) d\lambda + \int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

В роботі оцінюються параметри моделей для заданих точності δ та надійності $1 - \varepsilon$, досліджуються переваги і недоліки кожного з методів. Отримані реалізації дробового броунівського руху використовуються для оцінки індекса Хюрста.

Література

- [1] K. Dzhaparidze, J. Zanten, *A series expansion of fractional Brownian motion*, CWI. Probability, Networks and Algorithms, **R0216**.
- [2] А. Пашко, *Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу*, Наук. вісник Київ. у-ту., Фіз.–мат. науки, **2** (2014), 180–183.
- [3] Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко, *Моделювання випадкових процесів*, Київ: ВЦ "Київський університет (1999), 223 с.

Сліди згорток функцій із симетричних просторів з ядрами типу ядра потенціалу Ріса

ПЕЛЕШЕНКО Б.

Дніпропетровський аграрно-економічний університет
dsaupesh@ukr.net

В доповіді застосовується теорема Крейна, Семёнова інтерполяції операторів для вивчення слідів згортки функцій із симетричних просторів з ядрами виду ядра потенціалу Ріса.

Функціональні граничні теореми для випадкових блукань з модифікаціями

ПИЛИПЕНКО А.Ю.

Інститут математики НАН України
pilipenko.ay@yandex.ua

Означення 1. *Випадкова послідовність $\{X_n, n \geq 0\}$ зі значеннями в $\mathbb{Z}$ називається випадковим блуканням з модифікацією в θ , якщо*

$$\forall k \geq 1 \forall i_0, i_1, \dots, i_k, |i_{j+1} - i_j| = 1$$

$$P(X_{k+1} = i_k + 1 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = \left(\frac{1}{2} + \nu_k \Delta\right) \wedge 1,$$

$$P(X_{k+1} = i_k - 1 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = \left(\frac{1}{2} - \nu_k \Delta\right) \vee 0,$$

де $\nu_k = |\{j \in \overline{0, n} : X_j = 0\}|$ – кількість відвідувань θ .

Число $\Delta > 0$ назовемо розміром модифікації.

Нехай $\{X_k^{(n)}\}_{k \geq 0}$ – блукання з модифікацією рівною $\Delta_n = \frac{c}{n^\alpha}$, де $c > 0, \alpha > 0$. Припустимо, що $X_0^{(n)} = 0$ для всіх n . Розповсюдимо $\{X_k^{(n)}\}_{k \geq 0}$ на всі $t \geq 0$ за лінійністю

$$X_t^{(n)} := X_{[t]}^{(n)} + (X_{[t+1]}^{(n)} - X_{[t]}^{(n)})(t - [t]).$$

Через $\Rightarrow$ позначатимемо слабку збіжність в $C([0, \infty))$.

Теорема 2. [1]

- Якщо $\alpha > 1$, то

$$\frac{X_{nt}^{(n)}}{\sqrt{n}} \Rightarrow W(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

- Якщо $0 < \alpha < 1$, то

$$\frac{X_{nt}^{(n)}}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow 2\sqrt{c}\eta t, \quad n \rightarrow \infty,$$

де η – невід’ємна випадкова величина з функцією розподілу

$$P(\eta \leq x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0.$$

- Якщо $\alpha = 1$, то

$$\frac{X_{nt}^{(n)}}{\sqrt{n}} \Rightarrow X_\infty(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

де X_∞ задовольняє стохастичне рівняння

$$X_\infty(t) = \sqrt{c} \int_0^t l_{X_\infty}^0(s) ds + W(t), \quad t \geq 0.$$

Тут $l_{X_\infty}^0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{|X_\infty(s)| \leq \varepsilon} ds$ – локальний час X_∞ в 0.

Література

- [1] A.Pilipenko, V.Khomenko *On a limit behavior of a random walk with modifications at zero*, arXiv:1611.02048

Власні комплексні випадкові процеси

КОЗАЧЕНКО Ю. В.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Донецький національний університет імені Василя Стуса
yvk@univ.kiev.ua*

ПЕТРАНОВА М. Ю.

*Донецький національний університет імені Василя Стуса
m.petranova@donnu.edu.ua*

У роботі описано умови існування власних випадкових комплексних процесів, дається визначення цих процесів, визначення стаціонарних власних випадкових комплексних процесів, стаціонарних власних випадкових комплексних процесів зі стійкою кореляційною функцією. Розглянуто означення і деякі властивості квадратичних гауссовських випадкових величин і процесів. Крім того, отримано оцінки розподілу функціоналів модуля стаціонарних гауссовських власних випадкових комплексних процесів, описується поведінка модуля стаціонарного дійсного випадкового комплексного процесу на нескінченності.

Означення 1. *Випадковий процес $X(t) = X_c(t) + iX_s(t)$ називається комплексним випадковим процесом, де $X_c(t)$ та $X_s(t)$ дійсні випадкові процеси [1, 4] (індекси c та s введені в книзі [1] та роботі [4], де c - косинус, s - синус).*

Означення 2. *Функція*

$$r(\tau, t) = EX(t + \tau)\overline{X}(t) = EX_c(t + \tau)X_c(t) + EX_s(t + \tau)X_s(t) + i(EX_c(t + \tau)X_s(t) - EX_s(t + \tau)X_c(t))$$

називається кореляційною функцією процесу $X(t)$.

Функція

$$\hat{r}(\tau, t) = EX(t + \tau)X(t) = EX_c(t + \tau)X_c(t) - EX_s(t + \tau)X_s(t) + i(EX_c(t + \tau)X_s(t) + EX_s(t + \tau)X_c(t))$$

називається псевдокореляційною функцією процесу $X(t)$.

Означення 3. Випадковий комплексний процес $X(t)$ називається власним випадковим комплексним процесом (PCR-процесом), якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю $EX(t+\tau)X(t) = 0$, тобто коли виконуються умови

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t), \quad (1)$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = -EX_s(t+\tau)X_c(t). \quad (2)$$

В роботі [4] та книзі [1] знайдено умови існування PCR-процесів.

Означення 4. Функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ називається стійкою кореляційною функцією, якщо

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp \left\{ -c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|} \omega(\tau, \alpha) \right) \right\} \quad (3)$$

де $\sigma^2, c, \beta, \alpha$ - дійсні константи, такі що $\sigma^2 > 0, c > 0, |\beta| \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2$,

$$\omega(\tau, \alpha) = \begin{cases} tg \frac{\pi\alpha}{2}, & 0 \leq \alpha \leq 2 \\ \frac{2}{\pi} \log |\tau|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 5. Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ власний випадковий комплексний процес зі стійкою кореляційною функцією $|X(t)| = (X_c^2(t) + X_s^2(t))^{1/2}$. Тоді для

$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1 \right) p} \right) \sigma^2 (b-a)^{1/p} \frac{1}{\sqrt{2}}$ виконується наступна нерівність

$$P \left\{ \left\| X(t)^2 - \sigma^2 \right\|_{L_p([a,b])} > u \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{u\sqrt{2}}{(b-a)^{1/p} \sigma^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{u}{(b-a)^{1/p} \sigma^2} \right\}}. \quad (4)$$

Література

- [1] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, (1953).
- [2] E. Lukacs, *Characteristic Functions*, New York: Hafner Pub. Co., 1970.
- [3] Yu. Kozachenko, I. Rozora *Simulation of Gaussian stochastic processes*, Random Oper. And Stoch. Equations, **11** (3) (2003), 275–296.
- [4] F. D. Neeser, and J. L. Massey *Proper complex random processes with applications to information theory*, IEEE Transactions on Information Theory, **39** (4) (1993), 1293–1302.

On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents

KURYLIAK A.O.

Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
kurylyak88@gmail.com

SKASKIV O. B.

Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
olskask@gmail.com

STASIV N.YU.

Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
n-stas@ukr.net

Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space, $\Lambda = (\lambda_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ a sequence of positive random variables on it, and $F_k(x) := P\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$, $x \in \mathbb{R}$ be the distribution function of $\lambda_k(\omega)$, $k \geq 0$. Let $\mathcal{D}(\Lambda)$ be the class of formal random Dirichlet series of the form

$$f(z) = f(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega).$$

Let $\sigma(\omega) = \sigma_a(f, \omega)$ be the abscissa of absolute convergence of this series for fixed $\omega \in \Omega$. We assume, that condition $\ln k = o(\ln |f_k|)$ ($k \rightarrow +\infty$), holds.

Theorem 1. *Let $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ and $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ be a sequence of pairwise independent random variables. The following assertions hold:*

i) *If $\sigma(\omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$ a.s. then*

$$(\forall \varepsilon \in (0, \rho)): \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\ln |f_k| / (-\rho + \varepsilon))) < \infty.$$

ii) *If $0 \geq \sigma(\omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ a.s. then*

$$(\forall \varepsilon > 0): \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\ln |f_k| / (-\rho + \varepsilon)) < \infty.$$

Theorem 2. *Let $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ be a sequence of random variables and $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$. The following assertions hold:*

i) *If there exist $\rho \in (0, +\infty)$ and a sequence (ε_k) such that $\varepsilon_k \rightarrow +0$ ($k \rightarrow +\infty$) and $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |f_k|}{-\rho + \varepsilon_k})) < +\infty$, then $\sigma(\omega) \geq \rho$ a.s.*

ii) *If there exist $\rho \in (-\infty, 0]$ and a sequence (ε_k) such that $\varepsilon_k \rightarrow +0$ ($k \rightarrow +\infty$) and $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |f_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) < +\infty$, then $\sigma(\omega) \geq \rho$ a.s.*

Corollary 3. Let $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ and $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ be a sequence of pairwise independent random variables. If there exists a positive random variable $a(\omega)$ such that $(\forall x \geq 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+): F_k(x) \leq F_a(x) := P\{\omega: a(\omega) < x\}$, $F_a(+0) < 1$ and $f_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$), then $\sigma(\omega) = 0$ a.s.

Corollary 4. Let $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ and $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ be a sequence of random variables. If $f_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$) and there exist a positive random variable $b(\omega)$ and $\rho > 0$ such that $(\forall x \geq 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+): F_k(x) \geq F_b(x) := P\{\omega: b(\omega) < x\}$, $\int_0^{+\infty} n_\mu(t\rho) dF_b(t) < +\infty$, where $n_\mu(t) = \sum_{\mu_k \leq t} 1$ is the counting function of a sequence $\mu_k = -\ln |f_k|$, then $\sigma(f, \omega) \geq \rho$ a.s.

Corollary 5. Let $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ be a increasing (a.s.) sequence of pairwise independent random variables and $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$. If $F_0(+0) < 1$, where F_0 is distribution function of $\lambda_0(\omega)$, and $f_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$), then $\sigma(\omega) = 0$ a.s.

"Великі" квазікришталі Фур'є

ФАВОРОВ С.Ю.

Харківський національний університет ім. Каразіна

sfavorov@gmail.com

Розглядаються дискретні міри у скінченновимірному просторі, для яких перетворення Фур'є у сенсі розподіл також є мірою. Вивчаються різноманітні умови на міру та її перетворення Фур'є, за якими носій міри є скінченним об'єднанням зсувів ґратків у цьому просторі. Доведення базуються на теорії майже періодичних мір, що була розвинута у роботах Л.І.Ронкіна та автора, а також на знайденому автором локальному аналогу класичної теореми Вінера.

Секційні доповіді

1 Секція теорії ймовірностей

Про взаємну поведінку розв'язків стохастичного диференціального рівняння з нерегулярним переносом

АРЯСОВА О. В.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України

oaryasova@gmail.com

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x))dt + dw(t), \\ \varphi_0(x) = x. \end{cases} \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^2$, $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — обмежена вимірна функція, $(w(t))_{t \geq 0}$ — двовимірний вінерів процес.

Ми розглядаємо функцію a вигляду

$$a(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{x \in S_i},$$

де $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^2$ — деякі сталі,

$$S_i = \{(r, \varphi) : \varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тут $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$.

Доповідь присвячено дослідженню взаємної поведінки двох розв'язків $(\varphi_t(x))_{t \geq 0}, (\varphi_t(y))_{t \geq 0}$ рівняння (1), що стартують з різних точок.

Асимптотична нормальність оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань

АЮБОВА Н. С.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
naiubova@gmail.com

КУРЧЕНКО О. О.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
olkurchenko@ukr.net

Реальне вимірювання значення випадкового процесу в точці здійснюється приладом, що має певну інерційність. Тому замість значення випадкового процесу $\xi(t)$ у момент часу t , прилад видає $\int_A \xi(s)\varphi(s)ds$, де A - деякий окіл точки t , $\varphi(s)$ - функція, що характеризує прилад [1].

Нехай $\xi_H(t)$ - випадковий процес дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0, 1)$; $\delta \in (0, \frac{1}{18})$, $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, +\infty)$ - відома борелівська функція $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(s)ds = 1$; $\eta_{H,k} = \int_{k-\delta}^{k+\delta} \xi_H(s)\varphi(s-k)ds$, $k \geq 1$.

Функція $\kappa(H) = E(\eta_{H,2} - \eta_{H,1})^2$, $H \in (0, 1)$ неперервна, зростаюча і опукла вгору на інтервалі $(0, 1)$ незалежно від вибору функції φ . Для довільного $H \in (0, 1)$

$$S_{H,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\eta_{H,k+1} - \eta_{H,k})^2 \rightarrow \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$, що дає можливість побудувати консистентну оцінку параметра Хюрста за спостереженнями $\eta_{H,k}$, $k \geq 1$

Теорема 1. Для довільного $H \in (0, \frac{3}{4})$ послідовність випадкових величин

$$\frac{S_{H,n} - ES_{H,n}}{\sqrt{Var S_{H,n}}}, n \geq 1$$

асимптотично нормальна $N(0, 1)$.

За допомогою цієї теореми із застосуванням Δ -методу отримана асимптотична нормальність оцінки параметра Хюрста для $H \in (0, \frac{3}{4})$.

Література

- [1] Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я., *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.* – М.:ФМ, 1961, – 472 с.

Наївний баєсів класифікатор у задачах сентимент-аналізу

БАЄВ А. В.

Донецький національний університет ім. Василя Стуса
a.baev@donnu.edu.ua

Останнім часом на світовому ринку інформаційних технологій особливої популярності набуває напрямок, пов'язаний з розробками математичних моделей і побудовою оптимальних алгоритмів у сфері Machine Learning. Значне зростання обсягу даних і можливість його обробки та аналізу в автоматизований спосіб на сьогоднішній день дозволяє досить ефективно застосовувати методи статистики для виявлення нетривіальних закономірностей. Однією з важливих задач в цьому контексті є автоматичний аналіз емоційної тональності текстів, опублікованих користувачами соціальних мереж, блогерами, журналістами. В основі розв'язання цього завдання лежить байєсівський метод. У доповіді будуть наведені приклади розв'язання задач сентимент-аналізу із застосуванням наївного байєсовського класифікатора.

Система диференціальних рівнянь для розподілу ймовірностей гіллястого процесу з неперервним часом та міграцією.

БАЗИЛЕВИЧ І. Б.

Львівський національний університет імені Івана Франка
I_Bazylevych@yahoo.com

ЯКИМИШИН Х. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка
Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net

Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з одним типом частинок, з міграцією та неперервним часом [1]. Відомо, що $\mu(0) = 1$. Еволюція частинок в системі визначається процесом $\xi(t)$, міграція – $\zeta(t)$. $\xi(t)$ та $\zeta(t)$ – однорідні.

Кількість частинок в момент часу $t + \Delta t$ дорівнює

$$\mu(t + \Delta t) = \max\left\{\sum_{i=1}^{\mu(t)} \xi_i(\Delta t) + \zeta_t(\Delta t); 0\right\}, \quad (1)$$

де $\zeta_t(\Delta t)$ – кількість частинок, які емігрували з системи або іммігрували в систему на протязі часу $(t, t + \Delta t]$, $\xi_i(\Delta t)$ – кількість нащадків i -тої частинки системи ($i = 1, \dots, \mu(t)$) за час $(t, t + \Delta t]$.

Позначимо $F_\mu(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\} s^n, |s| \leq 1, s \in \mathbb{C}$. Твірні функції щільностей перехідних ймовірностей для процесів $\mu(t)$, $\xi(t) = f_\mu(s)$ та $h(s)$ відповідно, де $h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n s^n, |s| \leq 1, s \in \mathbb{C}$.

Замість класичної твірної функції для процесу $\zeta(t)$ будемо розглядати функцію $\widehat{F}_\zeta(t, s) = \sum_{n=-m}^{\infty} P\{\zeta(t) = n\} s^n, 0 < |s| \leq 1$, яку ми назвемо узагальненою твірною функцією. Також введемо узагальнену твірну функцію щільностей перехідних ймовірностей для $\zeta(t)$ $\widehat{f}_\zeta(s) = \sum_{l=-m}^{\infty} p_l s^l, 0 < |s| \leq 1$.

Нехай θ_1 - момент першого попадання в нуль процесу $\mu(t)$,

$$Q_i(t) = P\{\mu(t) = i | \theta_1 > t\} = \frac{\partial^i F_\mu(t, s)}{i! \partial s^i} \Big|_{s=0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Теорема 1. 1. Якщо $\exists n \forall t \sum_{u=n+1}^{\infty} Q_u(t) = o(\sum_{u=-m}^n Q_u(t))$, тоді для процесу $\mu(t)$ має місце система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_0(t)}{\partial t} = h(Q_0(t)) + \sum_{l=-m}^0 Q_{0-l}(t) p_l, \\ \frac{\partial Q_1(t)}{\partial t} = h'(Q_0(t)) Q_1(t) + \sum_{l=-m}^1 Q_{1-l}(t) p_l, \\ \frac{\partial Q_2(t)}{\partial t} = h''(Q_0(t)) Q_1^2(t) + h'(Q_0(t)) Q_2(t) + \sum_{l=-m}^2 Q_{2-l}(t) p_l, \\ \dots \\ \frac{\partial Q_n(t)}{\partial t} = \sum n! h^{(n)}(Q_0(t)) \prod_{i=1}^n \frac{1}{n_i!} (Q_i(t))^{n_i} + \sum_{l=-m}^n Q_{n-l}(t) p_l, \quad \sum_{i=1}^n i n_i = n, \end{cases} \quad (3)$$

з початковими умовами

$$Q_1(0) = 1, \quad Q_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2. Якщо права частина кожного рівняння системи (3) задовільняє умову Ліпшица, то існує розв'язок і він єдиний.

Література

- [1] І. Б. Базилевич, С. А. Алієв, Х. М. Якимішин *Диференціальне рівняння для гіллястих процесів з міграцією та неперервним часом.*, XXV International Conference "Problem of decision making under uncertainties Abstract, May 11-15, 2015, Kyiv, Ukraine. -К.: 2015. - Р. 62-63.
- [2] Б. А. Севастьянов *Ветвящиеся процессы* М.: Наука, 1971. - 436 с.

Асимптотика ймовірності банкрутства у випадку великих виплат. Приклади з "важкими хвостами".

Билинський А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка
andrii.bilynskyi@gmail.com

В умовах сучасної цивілізації життєдіяльність людей та суспільств стикається з наявністю великої кількості різноманітних ризиків – природничих, соціальних, політичних, економічних, фінансових, підприємницьких, професійних тощо. Одним з головних засобів зменшення втрат від реалізації ризикових несприятливих подій є страхування, система якого на базі певних кількісних моделей ризику сприймає за відповідну плату – страхову премію – зобов'язання грошового відшкодування втрат – виплати за страховими позовами клієнтів.

Роботу страхової компанії характеризують різні показники, одним з яких є її ймовірність банкрутства. Можна говорити про те, що фінансовий ризик і пов'язана з ним небезпека банкрутства – характерні особливості роботи кожної страхової компанії. Тому нашим основним завдання є обчислення цієї ймовірності та аналіз отриманих результатів, зокрема найбільшу увагу приділяємо обчисленню ймовірності банкрутства у випадку великих виплат.

Далі застосовуватимемо наступні терміни та позначення: якщо $F(x)$ – функція розподілу, то через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ позначаємо "хвіст" розподілу, а через F^{n*} – n -кратну згортку F .

Нехай функція розподілу $F(x)$, $x \in R_+ = [0; \infty)$ задовольняє умову $F(x) < 1 \forall x \in R_+$. Функцію розподілу $F(x)$ назовемо субекспоненційною [1, ст. 189], якщо $\forall n \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \overline{F^{n*}}(x)}{1 - F(x)} = n. \quad (1)$$

Надалі клас субекспоненційних функцій розподілу позначатимемо через S . Прокоментуємо ймовірнісну інтерпретацію формули (1): якщо

$X_1, \dots, X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини із функцією розподілу $F(x)$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, то

$$1 - F^{n*}(x) = P\{S_n \geq X\}$$

і

$$P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \geq X\right\} = \overline{F^n}(x) \sim n\overline{F}(x), \text{ коли } x \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$P\{S_n \geq X\} \sim P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \geq X\right\}.$$

Можемо зробити висновок, що асимптотичну поведінку суми виплат визначає одна дуже велика виплата. Це є однією з інтуїтивно бажаних властивостей розподілів з "важкими" хвостами, яка пояснює, чому S може застосовуватися до моделювання великих виплат.

Зауважимо, що субекспоненційні розподіли були запропоновані Чистяковим [2] у контексті теорії гіллястих процесів.

Зауважимо, що клас S є досить багатим. Зокрема до цього класу належать такі розподіли, як Лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу I та типу II.

Зауважимо, що у випадку коли виплати розподілені за законом Парето $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$, $\alpha > 1$, $x > k$ та лог-нормальним законом. Результат отримано в [1, ст. 198-199]. Справедливі наступні твердження.

Твердження 1. Коли виплати мають розподіл Парето, який задається функцією розподілу:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha, \alpha > 1, k > 0, x > 0,$$

асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda k^\alpha}{c(\alpha - 1) - \lambda k} (k + u)^{-\alpha+1}, u \rightarrow \infty.$$

Твердження 2. Нехай виплати розподілені за розподілом Вейбулла з параметром $0 < \gamma < 1$, з функцією розподілу

$$F(x) = 1 - \exp(-c_1 x^\gamma), c_1 > 0, x > 0$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)} \left[1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^\gamma\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)}{\gamma \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \right],$$

при $u \rightarrow \infty$.

Твердження 3. Нехай виплати мають розподіл Бенкандера типу I:

$$1 - F(x) = \left(1 + \frac{2\beta \ln x}{\alpha}\right) x^{-(\alpha+1+\beta \ln x)}, \alpha, \beta > 0, x > 1,$$

асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається наступним співвідношенням:

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda(\alpha + 1 - u^{\alpha-\beta \ln u})}{c\alpha - \lambda(\alpha + 1)}, u \rightarrow \infty.$$

Твердження 4. Коли виплати мають розподіл Бенкандера типу II:

$$1 - F(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) x^{-(1-\beta)} \exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \alpha, \beta > 0, x > 1,$$

асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається наступним співвідношенням:

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u) \sim \frac{\lambda}{(\alpha c - \lambda(1 + \alpha))} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\alpha u^\beta}{\beta}\right), u \rightarrow \infty.$$

Зауважимо, що детальний розгляд твердження 3 подано в [3].

Література

- [1] Зінченко Н. М., *Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник* / Н. М. Зінченко. - К.: ВПЦ "Київський університет 2008. - 224 с.
- [2] Chistyakov V. P. A theorem on sums of irv and its applications to branching processes // *Theor. Probability Appl.* – 1969. – N 9 – P. 640-648.
- [3] Bilynskiy A., Kinash O. One case of asymptotic behavior of the probability of bankruptcy of insurance company in SWorld Journal, Issue №11, Мпдю14 Physics and MAtematics (Scientific world, Ivanovo, 2016) – URL: <http://www.sworldjournal.com/e-journal/j1114.pdf> – P. 8-11.

Про ймовірність небанкрутства страхової компанії з відрахуванням грошей на рекламу та банківським відсотком на прикладі страхових компаній України

БОЛДИРЕВА В. О.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
valery.boldyreva@gmail.com

ЖМИХОВА Т. В.

zhmykhovatanya@mail.ru

При моделюванні діяльності страхової компанії велике значення мають розв'язування питань, пов'язаних з характеристиками її (не)банкрутства, а саме з ймовірністю (не)банкрутства, тому була поставлена та розв'язана задача знаходження ймовірності небанкрутства страхової компанії, що обрала для себе стратегію залучення додаткових клієнтів за рахунок проведення рекламної кампанії, а також такої, що розміщує свій власний капітал на банківському депозиті.

Нехай процес ризику описується рівнянням

$$d\xi_x(t) = (1 - \delta) \left[\xi(t) r dt + c(1 + j_1(\delta)) dt - \int_0^{+\infty} \alpha \nu_{\lambda(1+j(\delta))}(d\alpha, dt) \right], \quad (1)$$

де $\xi_x(t)$ - капітал компанії на момент часу t , x - початковий капітал, δ , ($0 < \delta < \delta_0 < 1$)- частка, що характеризує ту частину капіталу, яку страхова компанія відводить на рекламну діяльність, r - процентна ставка банку, причому $r(t) \equiv r > 0$, $c(1 + j_1(\delta))$ та $\lambda(1 + j(\delta))$ - інтенсивність премій та позовів відповідно, що знаходять до компанії після проведення рекламної кампанії.

Теорема 1. Нехай $\varphi(x)$ - ймовірність небанкрутства протягом часу $(0, +\infty)$, тобто

$$\varphi(x) = P \{ \xi_x(t) > 0, \forall t \in R_+ \},$$

тоді ймовірність небанкрутства страхової компанії, динаміка капіталу якої описується (1), є розв'язком інтегро - диференціального рівняння:

$$\frac{(1 - \delta)(xr + c(1 + j_1(\delta)))}{\lambda(1 + j(\delta))} \varphi'(x) = \varphi(x) - \int_0^x \varphi(x - y) dF(y) \quad (2)$$

з граничною умовою

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.$$

Припустимо, що розміри позовів до страхової компанії розподілені за експоненціальним законом з параметром a ($a > 0$), тобто $F(y) = 1 - e^{-ay}$, ($y \geq 0$). Тоді рівняння (2) набуде вигляду

$$\frac{(1 - \delta)(xr + c(1 + j_1(\delta)))}{\lambda(1 + j(\delta))} \varphi'(x) = \varphi(x) - \int_0^x \varphi(x - y) a e^{-ay} dy. \quad (3)$$

Розв'язком (3) є

$$\varphi(x) = A \int e^{-av} \left(v + \frac{c(1 + j_1(\delta))}{r} \right)^{\frac{\lambda(1 + j(\delta))}{(1 - \delta)r} - 1} dv + B, \quad (4)$$

де

$$A = \frac{\lambda_1(\delta)}{\lambda_1(\delta) e^{\frac{ac_1(\delta)}{r}} a^{-\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}} \Gamma\left(\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}; \frac{ac_1(\delta)}{r}\right) + (1 - \delta) r \left(\frac{c_1(\delta)}{r}\right)^{\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}},}$$

$$B = \frac{(1 - \delta) r \left(\frac{c_1(\delta)}{r}\right)^{\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}}}{\lambda_1(\delta) e^{\frac{ac_1(\delta)}{r}} a^{-\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}} \Gamma\left(\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}; \frac{ac_1(\delta)}{r}\right) + (1 - \delta) r \left(\frac{c_1(\delta)}{r}\right)^{\frac{\lambda_1(\delta)}{(1 - \delta)r}},}$$

тут $\lambda_1(\delta) = \lambda(1 + j(\delta))$, $c_1(\delta) = c(1 + j_1(\delta))$.

На основі отриманого розв'язку (4) було проаналізовано ринок страхування автотранспорту (КАСКО) 10-топ провідних страхових компаній України за період з 01/01/2015 до 30/06/2015. Зазначимо, що автори займались даною проблемою для різних стратегій страхових компаній [2, 3, 4]. Результати, подані в цій роботі, є продовженням статті [1], де була розглянута та проаналізована діяльність страхових компаній, але без урахування банківського відсотку.

Література

- [1] V. Boldyreva, T. Zhmykhova, *The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. I*, Journal of Applied Mathematics and Statistics. - Columbia International Publishing, (2017), in publishing.
- [2] Б. В. Бондарев, В. О. Болдырева, *О вероятности неразорения для модели страховой компании с расходами на рекламу*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, **2** (2012), 47–65 .

- [3] Т.В. Жмихова, *Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (B, S) – ринок та витратами на рекламу*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, **3** (2011), 149-152.
- [4] Т.В. Жмихова, *Керування накопичувально-споживчим фондом з функціями страхової компанії з можливістю інвестицій в фінансовий (B, S) – ринок та витратами на рекламу та випадковими преміями*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, **1-2** (2011), 21-22.

Poisson processes with time change

BUCHAK K. V.

Taras Shevchenko National University of Kyiv
kristina.kobilich@gmail.com

SAKHNO L. M.

Taras Shevchenko National University of Kyiv
lms@univ.kiev.ua

We study Poisson processes with time change, where the role of time is played by compound Poisson-Gamma processes and their inverse processes.

Let $N_1(t)$ be the Poisson process with intensity λ_1 . We consider the time-changed process $N_1(G_N(t))$, where $G_N(t) = G(N(t))$ is a compound Poisson-Gamma process (with parameters λ, α, β) independent of $N_1(t)$. We obtain expressions for probabilities $p_k(t) = P(N_1(G_N(t)))$ and the difference-differential equations for $p_k(t)$.

In particular, in the case when $\alpha = 1$, that is, when the process $G_N(t) = E_N(t)$, the compound Poisson process with exponentially distributed jumps, probabilities $p_k^E(t) = P(E_N(t) = k)$, $k \geq 0$, can be represented via the three-parameter generalized Mittag-Leffler function $\mathcal{E}_{a,b}^\gamma(z)$ as shown in the next theorem.

Theorem 1. *Let $X(t) = N_1(E_N(t))$. Then*

$$p_k^E(t) = P(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda_1^k \lambda \beta t}{(\lambda_1 + \beta)^{k+1}} \mathcal{E}_{1,2}^{k+1} \left(\frac{\lambda \beta t}{\lambda_1 + \beta} \right)$$

and satisfy the following equation:

$$\frac{d}{dt} p_k^E(t) = -\lambda \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \beta} p_k^E(t) + \frac{\lambda \beta}{\lambda_1 + \beta} \sum_{m=1}^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \beta} \right)^m p_{k-m}^E(t).$$

We also consider the inverse process (or first passage time) for $E_N(t)$:

$$Y(t) = \inf\{u \geq 0; E_N(u) > t\}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

For the time-changed process $Z(t) = N_1(Y(t))$, where $Y(t)$ is the inverse process given by (1), independent of $N_1(t)$, we obtain the following result.

Theorem 2. *Probability mass function of the process $Z(t) = N_1(Y(t))$ is given by*

$$p_k^Y(t) = P(Z(t) = k) = e^{-\beta t} \frac{\lambda \lambda_1^k (k+1)}{(\lambda_1 + \lambda)^{k+1}} \mathcal{E}_{1,1}^{k+1} \left(\frac{\lambda t \beta}{\lambda_1 + \lambda} \right),$$

the mean and variance are:

$$\mathbb{E}Z(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda} (\beta t + 1), \quad \text{Var}Z(t) = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} (2\beta t + 1) + \frac{\lambda_1}{\lambda} (\beta t + 1).$$

Laplace transform is given by

$$\mathbb{E}e^{-\theta Z(t)} = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1(1 - e^{-\theta})} e^{-\beta t \lambda_1(1 - e^{-\theta})(\lambda + \lambda_1(1 - e^{-\theta}))^{-1}}.$$

We state the relations between $p_k^E(t)$ and $p_k^Y(t)$ in the form of differential equations.

We also study the time-changed process $Z(t) = N_1(Y^{(n)}(t))$, where $Y^{(n)}(t)$ is the first passage time for the Poisson-Gamma process with parameter $\alpha = n$.

References

- [1] K. Kobylch and L. Sakhno, *Point processes subordinated to compound Poisson processes*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **94** (2016), 85–92 (in Ukrainian).
- [2] K. Buchak and L. Sakhno, *Compositions of Poisson and Gamma processes*, Submitted to "Modern Stochastics: Theory and Applications" (2017).

Strictly sub-Gaussian quasi shot noise processes

VASYLYK O. I.

*Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics,
Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National
University of Kyiv, Ukraine
ovasylyk@univ.kiev.ua*

Some results received for φ -sub-Gaussian random processes are applied to a special class of shot noise processes. Shot noise processes serve as mathematical model of various physical phenomena. They are used in electronics, telecommunications, mesoscopic physics.

In [1, 2] there was considered a real-valued homogeneous zero-mean process $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ with independent increments, defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, and a real-valued function $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ satisfying the condition $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du < \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Then the process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, was called a *shot noise process generated by the process ξ and the response function g* . In the papers [3, 4] and monographs [1, 2] properties of pre-Gaussian shot noise processes were studied and estimates for distribution of suprema for such processes were received.

I consider the case, when $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ is a strictly φ -sub-Gaussian random process with *uncorrelated* increments defined on a standard probability space such that $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$.

Let's recall some facts about the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ of generalized sub-Gaussian random variables [1, 5, 7].

Definition 1. A continuous even convex function $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ is an Orlicz N -function if it is increasing for $x > 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow 0$ and $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$. The Young-Fenchel transformation φ^* of an Orlicz N -function $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ is defined as $\varphi^*(x) := \sup_{y>0} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a standard probability space.

Condition Q. We say that condition Q is satisfied, if φ is an Orlicz N -function such that $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. The constant C may be equal to $+\infty$.

Definition 2. A zero mean random variable ξ belongs to the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (the space of φ -sub-Gaussian random variables) if there exists a positive constant a such that the inequality $\mathcal{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda))$ holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

Theorem 3. [1, 7] The space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with the norm $\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathcal{E} \exp(\lambda \xi))}{|\lambda|}$.

Definition 4. A stochastic process $X = (X(t), t \in T)$ is a φ -sub-Gaussian process (belongs to the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$) if the random variable $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ for all $t \in T$. If $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, then such processes are called sub-Gaussian.

Example 5. A centered Gaussian stochastic process is sub-Gaussian process.

Definition 6. A family Δ of random variables from the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ is called strictly φ -sub-Gaussian family ($\Delta \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), if there exists a constant $C_\Delta > 0$ such that for any countable set I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ and for any $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ the following inequality holds:

$$\tau_\varphi \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right) \leq C_\Delta \left(\mathcal{E} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

The constant C_Δ is called identifying constant of the family Δ .

Let $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ be a real-valued zero-mean random process with uncorrelated increments defined on a standard probability space such that

$$E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s, \quad t > s \in \mathbb{R},$$

and $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ be a real-valued function satisfying the following condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Definition 7. We shall call the process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, a quasi shot noise process generated by the process ξ and the response function g , where the integral above is defined in the mean-square sense.

The covariance function of the process X has the following form: $\mathcal{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g(s, u)du$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Definition 8. The process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ is called strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process, if ξ is strictly φ -sub-Gaussian random process.

Suppose that there exist such functions $r = (r(h), h \geq 0)$ and $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$ that

$$|g(t, u) - g(s, u)| \leq r(t - s)k(u), \quad t, s, u \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

the function r is nonnegative continuous monotonically increasing function, such that $r(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, and the function k is nonnegative continuous function that satisfies the condition $\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du < \infty$.

Now we can apply results received for φ -sub-Gaussian processes (see [6, 7]) to a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process. In the following theorems estimates for distribution of suprema of such a process are obtained and conditions for its sample functions continuity with probability one are formulated. Here $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$.

Theorem 9. *Let X be a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process on the interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, with the response function g satisfying condition (3). If*

$$\int_0^\beta \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du < \infty, \quad (4)$$

then for all $x > \bar{D}(p, \gamma, \beta)$ and any $p \in (0, 1)$, we have the following estimates:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [a, b]} X(t) > x \right\} \leq \bar{W}(p, x), \quad \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| > x \right\} \leq 2\bar{W}(p, x),$$

where

$$\begin{aligned} \bar{W}(p, x) &= \exp \left\{ -Z_{p, \gamma, \beta}^*(x - \bar{D}(p, \gamma, \beta)) \right\}, \\ \bar{D}(p, \gamma, \beta) &= 2 \left(\gamma \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cp\beta)} + 1 \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(1-p)p} \int_0^{\beta p^2} \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du \right), \end{aligned}$$

$Z_{p, \gamma, \beta}^*$ is the Young-Fenchel transformation of the function

$$Z_{p, \gamma, \beta}(\lambda) = \varphi \left(\frac{\lambda \gamma}{1-p} \right) (1-p) + \varphi \left(\frac{\lambda \beta}{1-p} \right) p, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\gamma = \sup_{t \in [a, b]} c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du \right)^{1/2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{c} r \left(\frac{b-a}{2} \right) \right],$$

$$c = \left(c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2} \right)^{-1}.$$

Theorem 10. *If for a separable strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ condition (3) holds and for arbitrary $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du < \infty, \quad (5)$$

then the process X is a sample continuous process with probability one and for any $p \in (0, 1)$ and $x > \bar{B}(p, \varepsilon)$ we have the following estimate:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{|t-s| < \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{x - \bar{B}(p, \varepsilon)}{\bar{A}(p, \varepsilon)} \right) \right\}, \quad (6)$$

where $\sigma(\varepsilon) = c_\xi r(\varepsilon) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2}$, $\bar{A}(p, \varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$,

$$\bar{B}(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du.$$

Example 11. Consider a zero-mean random process $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R}) \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$ with uncorrelated increments, such that $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. That is, ξ is a strictly sub-Gaussian process and $\mathcal{E}\xi^2(t) = \tau^2(\xi(t))$ for all $t \in \mathbb{R}$, where $\tau(\cdot) = \tau_\varphi(\cdot)$ is a norm in the space of sub-Gaussian variables $\text{Sub}(\Omega)$. In this case we have $c_\xi = 1$, $\varphi^{(-1)}(v) = \sqrt{2v}$, $v \geq 0$, and $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)} = \frac{v}{\sqrt{2v}} = \sqrt{\frac{v}{2}}$.

Let a real-valued function $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ have the following form:

$$g(t, u) = \frac{\sin(tu)}{|u|^\delta + 1}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \delta > 1.$$

This function satisfies the condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(tu)}{(|u|^\delta + 1)^2} du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Now, we can consider a strictly sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the process ξ and the response function g . For the function g we get the following estimate:

$$|g(t, u) - g(s, u)| \leq |t - s|^\alpha \cdot \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = r(t - s)k(u),$$

where $r(t - s) = |t - s|^\alpha$, $k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1}$, $t, s, u \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$, $\alpha = \min(1, \delta - 1)$.

The function $r(h) = |h|^\alpha$, $h \in \mathbb{R}$, is a nonnegative continuous monotonically increasing function such that $r(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

The function $k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1}$, $u \in \mathbb{R}$, is a nonnegative continuous function and

$$\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du = \int_{\mathbb{R}} \frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2} du < \infty.$$

This means that condition (3) holds for the function g .

In this case condition (4) is of the form

$$\int_0^\beta \zeta_\varphi \left(\ln \left(\frac{b-a}{2r^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du = \int_0^\beta \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b-a}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{1/2} du < \infty,$$

where $\beta \in \left(0, \frac{1}{c} \left(\frac{b-a}{2} \right)^\alpha \right]$. Since the integral above converges, the strictly sub-Gaussian quasi shot noise process X generated by the process ξ and the response function g satisfies conditions of theorem 9, and corresponding estimate for distribution of its supremum can be easily derived.

References

- [1] V. V. Buldygin, and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [2] I.V. Dariychuk, Yu.V. Kozachenko, and M.M. Perestyuk *Stochastic processes from Orlicz spaces*, Chernivtsi: “Zoloti lytavry”, 212 p., 2011. (In Ukrainian)
- [3] I.V. Dariychuk, and Yu.V. Kozachenko, *Some properties of pre-Gaussian shot noise processes*, Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, (2009), 57–59.
- [4] I.V. Dariychuk, Yu.V. Kozachenko, *The distribution of the supremum of Θ -pre-Gaussian shot noise processes*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, No. 80 (2010), 85–100.
- [5] R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina, *Space of φ -sub-Gaussian random variables*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **27** (2003), 92–124.
- [6] Yu.V. Kozachenko, O.I. Vasilik, *Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$* , Theory of Probability and Mathematical Statistics, No. 63 (2001), 109–121.
- [7] Yu.V. Kozachenko, R.E.Yamnenko, O.I. Vasylyk, *φ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr, Kyivskiy Universytet (ISBN 978-966-439-051-1), 231 p., 2008. (In Ukrainian).

Мінімізація вартості страхових контрактів шляхом залучення декількох страхових компаній

ДРОЗДЕНКО В. О.

Білоцерківський національний аграрний університет
drozdenko@yandex.ru

Нехай X це випадкова величина, яка відображає розмір страхової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X , позначатимемо $\pi[X]$.

Премія середнього значення для ризику X , задана за допомогою функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$, такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння $v(\pi_{с.з.}[X]) = E[v(X)]$; аргументація для такої премій трохи прихована в нерівності Єнсена $v(E[X]) \leq E[v(X)]$, тобто, вартість буде не меншою за математичне сподівання розміру страхової компенсації.

Частовживаним частковим випадком принципу середнього значення, якщо обрати $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, є експоненційна премія

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta} \log(E[e^{\beta X}]), \quad \text{для } \beta > 0.$$

Експоненційна премія виникає також при використанні методик страхового оцінювання оснований на концепціях корисності страховика/клієнта.

В доповіді розглядатиметься питання оптимального поділу $X_1, \dots, X_n$ ризику X між n страховими компаніями, кожна з яких користується експоненційним принципом підрахунку вартості страхових контрактів з параметрами інтенсивності $\beta_1, \dots, \beta_n$ відповідно, такого, що $X_1 + \dots + X_n = X$, який би мінімізував страхову вартість ризику X , а також демонструватиметься, з використанням методик оснований на нерівностях Гельдера, що оптимальним, за зазначених умов, поділом є наступний

$$X_i = \frac{\tilde{\beta}}{\beta_i} X, \quad \text{де} \quad \tilde{\beta} := \left(\sum_{i=1}^n 1/\beta_i \right)^{-1},$$

при цьому, мінімально-оптимальна вартість ризику X складатиме

$$\pi_{\text{optimal}}[X] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \log(E[e^{\beta_i X_i}]) = 1 / \tilde{\beta} \cdot \log(E[\exp(\tilde{\beta} X)]),$$

тобто, вона еквівалентна вартості ризику X при задіянні лише однієї компанії, яка користується експоненційним принципом з параметром $\tilde{\beta}$.

Рекурентні співвідношення для двоканальної замкненої системи з ерлангівським часом обслуговування

ЖЕРНОВИЙ К. Ю.

Львівський навчально-науковий інститут ДВНЗ "Університет банківської справи"

k.zhernovyi@yahoo.com

Замкнені системи обслуговування використовуються як моделі для оцінки характеристик інформаційних систем, мереж передавання даних, процесів масового обслуговування у виробничих, транспортних, торгівельних, логістичних і сервісних системах. Замкнену систему називають також системою зі скінченною кількістю джерел. Припустимо, що в двоканальну систему обслуговування надходять замовлення від m однакових джерел. Кожне джерело може згенерувати лише одне замовлення і поки це замовлення не буде обслужене, джерело замовлень не відсилає. Час від моменту повернення замовлення до джерела до моменту наступного його надходження в систему назовемо часом генерування замовлення. Припустимо, що час генерування замовлення розподілений за показниковим законом з параметром λ , а час обслуговування — за узагальненим законом Ерланга n -го порядку, тобто є сумою n незалежних випадкових величин, розподілених за показниковими законами з параметрами μ_i ($1 \leq i \leq n$) відповідно. Застосовуючи метод фіктивних фаз, таке обслуговування умовно розбивають на n фаз.

Врахування фаз вимагає фіксації відповідних станів, тому безпосереднє розв'язання системи рівнянь для стаціонарних імовірностей станів ускладнюється великою розмірністю матриці коефіцієнтів системи. Найдоцільнішим є алгоритмічний підхід, який полягає в розв'язанні системи за допомогою рекурентних або матрично-рекурентних співвідношень і алгоритмів. На основі врахування структурних особливостей системи рівнянь для стаціонарних імовірностей ми побудували рекурентні співвідношення, які дають змогу у випадку $n = 2$ напряму обчислювати стаціонарний розподіл кількості замовлень у замкненій системі обслуговування, у випадку $n = 3$ система зводиться до одного лінійного рівняння відносно невідомого параметра p , а у випадку $n \geq 4$ вдається скоротити кількість рівнянь системи з $(n+1)(2+n(m-1))/2$ до $n(m-1)$. Отримані результати перевірено за допомогою імітаційних моделей, побудованих за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Наближення випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ цілими функціями експоненціального типу

ЗАТУЛА Д. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
dm.zatula@gmail.com

Розглянемо випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$, де $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір. Модулем неперервності процесу X є будь-яка функція f така, що з ймовірністю 1 справджується наступна нерівність:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1.$$

Для випадків компактного метричного простору $(\mathbb{T}, \rho)$ ([2]) та нескінченного проміжку $[0, \infty)$ з метрикою $\rho(t, s) = |t - s|$, $t, s \in [0, \infty)$ знайдено оцінки розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, тобто оцінки ймовірності

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}.$$

Отримані оцінки можна застосувати для знаходження наближення випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ цілими функціями експоненціального типу із заданою точністю та надійністю.

Цілими функціями експоненціального типу називаються цілі функції $F(t)$, для яких виконується нерівність типу $|F(t)| \leq Ae^{B|t|} \forall t \in \mathbb{R}$, де числа A та B не залежать від t . Точна нижня границя константи B , для якої виконується наведена нерівність, називається типом функції $F(t)$ та знаходиться за формулою $\gamma = \overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(t)|}{|t|}$ ([1]).

Нехай функція $r(t)$, $t \in [0, \infty)$ з деякого лінійного нормованого простору E . Поставимо їй у відповідність множину всіх цілих функцій $F(x)$ експоненціального типу $\leq \gamma$ ($\gamma > 0$), для яких $r(x) - F(x) \in E$. Позначимо цю множину як N_r та покладемо $\delta_\gamma(r) = \inf_{F \in N_r} \|r - F\|$ якщо $N_r \neq \emptyset$.

Теорема 1. *Розглянемо сепарабельний та рівномірно неперервний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, \infty)\}$ з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що має властивість Z з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$. Нехай $[0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, де $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0, 1, \dots, \infty\}$ — деяка зростаюча послідовність, $a_0 = 0$. Позначимо $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$, $D_i = [a_i, a_{i+1} + \theta]$, $\theta \in (0, \min_{i \geq 0} \alpha_i)$.*

Припустимо, що існують монотонно зростаючі неперервні функції $\sigma_i = \{\sigma_i(h), h \geq 0\}$ такі, що $\sigma_i(0) = 0, i = 0, 1, \dots$ та $\forall i = 0, 1, \dots$ виконуються наступні нерівності:

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in \bar{D}_i}} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma_i(h), \quad 0 < h < \alpha_i + \theta.$$

Також нехай $\varepsilon_0 = \min_{i \geq 0} \{\sigma_i^{(-1)}(\alpha_i + \theta)\}$, де $\sigma_i^{(-1)}(h)$ — обернена функція до функції $\sigma_i(h)$, $i = 0, 1, \dots$ Припустимо, що функція $w_B(t, s), t, s \in [0, \infty)$ така, що має місце наступна нерівність:

$$\sup_{\substack{0 < |t-s| \leq \varepsilon \\ t, s \in [0, \infty)}} |X(t) - X(s)| \leq w_{B, \varepsilon} \cdot \sup_{\substack{0 < |t-s| \leq \varepsilon \\ t, s \in [0, \infty)}} \frac{|X(t) - X(s)|}{w_B(t, s)},$$

де $w_{B, \varepsilon} = \max_{0 < |t-s| \leq \varepsilon} w_B(t, s)$. Тоді для $x > 3x_0 \cdot w_{B, \frac{1}{\gamma}}$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\min\{\varepsilon_0, \theta\}}\right)$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$, справеджується наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \inf_{\substack{F \in N_X \\ t \in [0, \infty)}} \|X(t) - F(t)\|_\psi > x \right\} &\leq \\ &\leq \frac{4B(2B+1)}{\gamma(B^2-1)} \cdot \exp \left\{ -z \left(\frac{x}{3w_{B, \frac{1}{\gamma}}} \right) \right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Література

- [1] Н. И. Ахизер, *Лекции по теории аппроксимации*, М.: Наука, 1965.
- [2] Yu. V. Kozachenko, D. V. Zatula, *Lipschitz conditions for stochastic processes in the Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables*, Theory Probab. and Math. Statist., **91** (2015), 43–60.

Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій

КАПУСТЕЙ М. М.

Ужгородський національний університет

michaelkapustey@gmail.com

СЛЮСАРЧУК П. В.

Ужгородський національний університет

petro_slyusarchuk@ukr.net

Наводиться оцінка швидкості збіжності до нормального закону розподілу сум випадкових величин в термінах однієї форми псевдомоментів. Використовуються методи робіт [1] і [2], узагальнюється один із результатів роботи [1].

Розглянемо послідовність серій $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ незалежних в кожній серії випадкових величин з $M\xi_{ni} = 0, D\xi_{ni} = \sigma_{ni}^2, \sigma_{ni} > 0, \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 = 1$. Позначимо: $F_{ni}(x)$ — функція розподілу ξ_{ni} , $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ — функція розподілу S_n ; $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\sigma_n = \max\{\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nn}\}$, $\rho_n = \sup_n |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$. Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{ni} = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^3) |d(F_{ni}(x\sigma_{ni}) - \Phi(x))|,$$

$$\nu_n = \max\{\nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}\}.$$

Теорема 1. Нехай $\sigma_n^2 \leq \frac{3}{4}$. Існує стала C , що для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\rho_n \leq C\nu_n\sigma_n.$$

Література

- [1] Zolotarev V. M, *Exactness of an approximation in the central limit theorem*, Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory, (1973), 531–543.
- [2] Боярищева Т. В. , Слюсарчук П. В. , *Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різно розподілених величин*, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія матем., 4 (1996), 12–16.

Імовірність банкрутства за умов великих виплат та існування відсоткової ставки на резерв.

КІНАШ О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка
okinasch@yahoo.com

БІЛИНСЬКИЙ А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Процес ризику у випадку класичної моделі Крамера-Лундберга, коли поряд з лінійним надходженням страхових внесків, страхова компанія отримує відсотки на резервний капітал з відсотковою ставкою $\delta > 0$ визначається як

$$U_{\delta}(t) = ue^{\delta t} + c \int_0^t e^{\delta v} dv - \int_0^t e^{\delta(t-v)} dS(v), t \geq 0,$$

де $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$, інтенсивність страхових внесків $c > 0$, u – початковий капітал.[1]

Клюпельберг та Штадмюлер [2] вивчали таку модель у випадку, коли функція розподілу $F(x)$ має "хвости", що регулярно змінюються. Вони довели, що

$$\psi_{\delta}(u) \sim k_{\delta} \bar{F}(u), u \rightarrow \infty,$$

де $\psi_{\delta}(u)$ – ймовірність банкрутства, $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$ – "хвіст" розподілу F . Нами застосовано цей результат до виплат, що мають розподіл Парето та Бенкандера.

Література

- [1] Зінченко Н. М., *Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник* / Н. М. Зінченко. - К.: ВПЦ "Київський університет 2008. - 224 с.
- [2] Kluppelberg C., Stadtmuller U. Ruin probability in the presence of heavytails and interest rates // Scand. Actuarial J. – 1998. – N 1 – P. 49-58.

Про двопараметричні напівгрупи Феллера для одновимірних дифузійних процесів з рухомою мембраною

Копитко Б. І.

Львівський національний університет імені Івана Франка
bohdan.kopytko@gmail.com

ШЕВЧУК Р. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
r.v.shevchuk@gmail.com

Розглянемо на числовій прямій $\mathbb{R}$ дві області $D_{1s} = \{x \in \mathbb{R} : x < r(s)\}$ і $D_{2s} = \{x \in \mathbb{R} : x > r(s)\}$, де $r(s)$, $0 \leq s \leq T$ — задана функція, неперервна за Гельдером з показником $\frac{1+\alpha}{2}$, $0 < \alpha < 1$. Нехай в області D_{is} , $i = 1, 2$, заданий дифузійний процес, що керується твірним диференціальним оператором L_{is} :

$$L_{is} \equiv \frac{1}{2} b_i(s, x) \frac{d^2}{dx^2} + a_i(s, x) \frac{d}{dx}, \quad i = 1, 2.$$

Будемо вважати, що коефіцієнти операторів L_{1s} і L_{2s} визначені в області $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ і задовольняють умови:

- 1) функції $b_i(s, x)$ та $a_i(s, x)$, $i = 1, 2$, обмежені, до того ж існує стала $b > 0$ така, що $b_i(s, x) \geq b$, $i = 1, 2$, для всіх $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$;
- 2) для всіх $s, s' \in [0, T]$ і $x, x' \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$|b_i(s, x) - b_i(s', x')| \leq C (|s - s'|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - x'|^{\alpha}),$$

$$|a_i(s, x) - a_i(s', x')| \leq C (|s - s'|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - x'|^{\alpha}),$$

де C і α — додатні сталі, $0 < \alpha < 1$.

Припустимо також, що в точці $x = r(s)$ задана умова спряження типу Вентцеля [1], яка представлена за допомогою трьох доданків, до того ж один з них відповідає за можливість виходу дифузійного процесу з межі області стрибками, а два інші відповідають за властивість його часткового відбиття.

Ставиться задача побудувати двопараметричну напівгрупу Феллера T_{st} , $0 \leq s < t \leq T$, якій відповідає неоднорідний марковський процес

на прямій такий, що в областях D_{1s} і D_{2s} він збігається з дифузійними процесами, керованими операторами L_{1s} і L_{2s} відповідно, а його поведінка після потрапляння дифундуючої частинки на спільну межу цих областей визначається заданою умовою спряження типу Вентцеля. Сформульовану в описаний спосіб проблему ще називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на прямій або задачею про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембраною. Для її розв'язання ми використовуємо аналітичні методи з використанням класичної теорії параболічних потенціалів (можливість застосування цієї теорії забезпечують умови 1) і 2) та припущення щодо гельдеровості функції $r(s)$). За такого підходу інтегральне зображення шуканої напівгрупи отримуємо як розв'язок відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Окремо досліджено випадок, коли побудований нами феллерівський процес можна трактувати як узагальнений дифузійний процес в розумінні М. І. Портенка [2]. Відзначимо, що раніше в [3] аналогічна задача вивчалася у достатньо загальній постановці за умови, коли мембрана розташована у фіксованій точці $r(s) \equiv r_0$.

Література

- [1] А. Д. Вентцель, *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка*, Докл. АН СССР. Математика., **111** (2) (1956), 269–272.
- [2] М. І. Портенко, *Процеси дифузії в середовищах з мембранами*. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995.
- [3] В. І. Копытко, R. V. Shevchuk, *On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition*, Theory of Stochastic Processes, **17(33)** (2) (2011), 55–70.

Про задачу інтерполяції стохастичних послідовностей з періодично стаціонарними приростами

КОЗАК П. С.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
petrokozak91@gmail.com

Моклячук М. П.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
mmp@univ.kiev.ua

У роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_M \zeta = \sum_{k=0}^M a(k) \zeta(k)$ від невідомих значень стохастичної послідовності $\{\zeta(k), k \in \mathbb{Z}\}$ із періодично стаціонарними приростами за спостереженнями послідовності в моменти часу $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, M\}$.

За допомогою заміни $\xi_p(k) = \zeta(kT+p-1)$, $p = 1, 2, \dots, T$, $k \in \mathbb{Z}$ отримано векторну послідовність $\xi(k) = \{\xi_p(k)\}_{p=1,2,\dots,T-1}$, $k \in \mathbb{Z}$ із стаціонарними n -ми приростами. Функціонал $A_N \xi$ представлено у вигляді різниці функціоналів $A_N \xi = B_N \xi - V_N \xi$. Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $B_N \xi$ визначається із умов:

$$\widehat{B}_N \xi \in H^{(N+\mu n)-}(\xi_\mu^{(n)}) \quad (1)$$

$$B_N \xi - \widehat{B}_N \xi \notin H^{(N+\mu n)-}(\xi_\mu^{(n)}) \quad (2)$$

У випадку, коли для послідовності $\xi(k)$ відома матриця спектральної щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, отримано спектральну характеристику та величину середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_M \zeta$ від невідомих значень процесу $\{\zeta(k)\}$.

Література

- [1] М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка, *Мінімаксні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, Київ, 2012.
- [2] М. М. Луз, М. П. Моклячук, *Інтерполяція функціоналів від стохастичних послідовностей зі стаціонарними приростами*, Теорія ймовір. та матем. статист., **87** (2012), 105–119.
- [3] І.І. Дубовецька, М. П. Моклячук, *Мінімаксна інтерполяція періодично корельованих процесів*, Наук вісник Ужгород ун-ту, **23** (2012), №2, 51–62.

Перевірка розташування бітів $(0,1)$ -вектора на випадковість та на якість випадковості

МАСОЛ В. І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
vimasol@ukr.net

СІЗОНОВ Ю. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
sizonoff@ukr.net

Застосування статистичних тестів для перевірки гіпотези випадкового розташування бітів $(0,1)$ -вектора довжини n базується, зокрема, на умові, згідно з якою параметр n має бути достатньо великий, $n > 100$. Це стосується, наприклад, пакета статистичних тестів NIST [1].

Для значень n з проміжка $n \in (10, 100]$ доповнювальним інструментом для перевірки гіпотези випадкового розташування бітів $(0,1)$ -вектора довжини n може слугувати алгоритмічний аналіз цього вектора.

У доповіді пропонується варіант поєднання ймовірнісного та алгоритмічного підходів для з'ясування факту випадкового розташування бітів $(0,1)$ -вектора необов'язково великої довжини n . Увага приділяється також питанню якості випадкового розташування бітів у $(0,1)$ -векторі, що тестується. Пропонується оцінювати зазначену якість шляхом належного аналізу відстаней між $(0,1)$ -вектором, що тестується, та опорними $(0,1)$ -векторами, які розглядаються як не випадкові. Точне означення опорного вектора наведено в роботі [2].

Література

- [1] *SP 800-22 Rev. 1a. A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*, National Institute of Standards & Technology, (2010).
- [2] Yu. Sizonov, *Simple Binary Sequences*, Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv: Bukrek, (2015), 197–201.

Простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і метод Монте-Карло

МЛАВЕЦЬ Ю. Ю.

ДВНЗ “Ужгородський національний університет”

yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua

СИНЯВСЬКА О.О.

ДВНЗ “Ужгородський національний університет”

olga.synyavska@uzhnu.edu.ua

Знаходяться умови, за яких кратні інтеграли обчислюються із заданою надійністю та точністю у просторі $C(T)$ методом Монте-Карло. Для отримання цих результатів використовуються методи теорії випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 1. [1] Нехай випадковий процес $\xi(t)$, $t \in T$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ для якого виконується умова **H** з константою C_ψ , $Z_n(t) - I(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i(t) - I(t))$, де $\xi_i(t)$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$.

Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(h)$ ($\sigma(0) = 0$) така, що справджується нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|\xi(t) - \xi(s)\|_\psi \leq \sigma(h).$$

Припустимо також, що для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \kappa \left(N \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du < \infty,$$

де $\kappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $N(u)$ – метрична масивність простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma(u)$. Тоді $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1 - \delta$, $\delta > 0$ і точністю ε в просторі $C(T)$, якщо число n таке, що для будь-якого $0 < p < 1$ справджується умова

$$\inf_{u \geq 1} \left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}} \right)^u \leq \delta,$$

де $B(p) = 2\sqrt{C_\psi} \inf_{t \in T} \|\xi(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^p \kappa \left(N \left(\sigma_1^{(-1)}(u) \right) \right) du$, $\sigma_1(u) =$

$$2\sqrt{C_\psi}\sigma(u), \gamma = \sigma_1 \left(\sup_{t,s \in T} \rho(t,s) \right).$$

Література

- [1] Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець, *Застосування теорії просторів $F_\psi(\Omega)$ для обчислення кратних інтегралів методом Монте-Карло*, Теорія ймовірностей та математична статистика, **92** (2015), 61–70.

Задача фільтрації стаціонарних процесів за спостереженнями з пропущками

Моклячук М. П.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
mmp@univ.kiev.ua

Сідей М. І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
marysidei4@gmail.com

Досліджуємо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \int_{R^s} a(t)\xi(-t)dt$, від невідомих значень стаціонарного стохастичного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s [M_l, \dots, M_l + N_l]$. Розглядаємо два випадки: коли спектральні щільності процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі та коли їх точний вигляд не відомий, але знаємо, що вони належать до певних класів допустимих спектральних щільностей. У першому випадку для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала використаємо запропонований А. М. Колмогоровим метод проєкцій у гільбертових просторах [1]. У другому випадку застосуємо мінімаксний метод оцінювання [2] та для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначимо найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала [3].

Література

- [1] А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей/А.Н. Колмогоров*, “Наука”, Москва, 1986.
- [2] М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, ВПЦ “Київський університет”, Київ, 2008.

- [3] Mikhail Moklyachuk, Maria Sidei, *Filtering problem for functionals of stationary processes with missing observations*, Communication in Optimization Theory 2016, (2016), Article ID 21.

Мінімаксна інтерполяція гармонізованих α -стійких процесів за спостереженнями з шумом

Моклячук М. П.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
mmp@univ.kiev.ua

ОСТАПЕНКО В. І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
vt.ostapenko@gmail.com

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання інтегрального функціонала $A_T \xi = \int_0^T a(t) \xi(t) dt$ від гармонізованого α -стійкого стохастичного процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ – взаємно незалежні гармонізовані α -стійкі стохастичні процеси. Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A_T \xi$ визначається із наступних співвідношень

$$(A_T(\theta) - h(\theta))^{\langle \alpha-1 \rangle} f(\theta) - (h(\theta))^{\langle \alpha-1 \rangle} g(\theta) = \overline{C_T(\theta)}, \quad C_T(\theta) = \int_0^T c(t) e^{it\theta} dt,$$

$c(t), t \in [0; T]$ – невідома функція, яку потрібно знайти,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, \quad t \in [0; T].$$

Отримані формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки за умови, що спектральні щільності $f(\theta), g(\theta)$ процесів відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а вказані лише класи допустимих щільностей, отримані співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оцінок для деяких класів допустимих спектральних щільностей.

Література

- [1] S. Cambanis *Complex stable variables and processes*, Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson, P. K. Sen, ed., North-Holland, New York – 1983. – P. 63-79.

- [2] М. П. Моклячук *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів.* — К.: ВПЦ "Київський університет 2008. — 320 с.
- [3] М. Pourahmadi *On minimality and interpolation of harmonizable stable processes*, SIAM J. Appl. Math. — **44** (5) (1984). — P. 1023-1030.

Третя початково-крайова задача для псевдодиференціального рівняння пов'язаного із симетричним стійким випадковим процесом

Осипчук М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

ПОРТЕНКО М. І.

Інститут математики НАН України
portenko@imath.kiev.ua

Нехай $\mathbf{A}$ — генератор симетричного α -стійкого випадкового процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ в $\mathbb{R}^d$ (вважаємо $d \geq 2$). Це — псевдодиференціальний оператор, символ якого має вигляд $(-c|\lambda|^\alpha)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$. Ми розглядаємо випадок $\alpha \in (1, 2)$. Нехай $\mathbf{B}$ — $\mathbb{R}^d$ -значний псевдодиференціальний оператор із символом $(i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$. Через $\mathbf{B}_\nu$ (для довільного орта ν) позначатимемо оператор, дія якого підпорядковується наступному правилу $\mathbf{B}_\nu f = (\mathbf{B}f, \nu)$.

Нехай S — обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, тобто, поверхня, яка в околі кожної своєї точки в локальній системі координат задається явно диференційовною функцією, що задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1)$ та сталою, що не залежить від точки поверхні. Нехай $\nu(x)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в точці x .

Нехай в точках поверхні S задані неперервні дійснозначні функції $q(x)$ та $r(x)$, друга з яких невід'ємна. Нас цікавить наступна задача

Задача. Для кожної обмеженої неперервної функції $(\varphi(x))$ знайти таку неперервну функцію $(U(t, x, \varphi))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$ що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial U(t, x, \varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}U(t, \cdot, \varphi)(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus S;$$

початкову умову

$$U(0+, x, \varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

та граничну умову

$$\begin{aligned} \frac{1+q(x)}{2} \mathbf{B}_{\nu(x)} U(t, \cdot, \varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2} \mathbf{B}_{\nu(x)} U(t, \cdot, \varphi)(x-) = \\ = r(x) U(t, x, \varphi), \quad t > 0, \quad x \in S, \end{aligned}$$

де $f(x+)$ (відповідно $f(x-)$) означає границю функції $(f(y))_{y \in \mathbb{R}^d}$ в точці $x \in S$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі з вершиною x , для кожної точки $y \neq x$ якого виконується $(y-x, \nu(x)) > 0$ (відповідно $(y-x, \nu(x)) < 0$).

Побудовано розв'язок цієї задачі, а у випадку $q(x) \equiv 0$ (симетрична крайова задача) знайдено її фундаментальний розв'язок. Основою наших конструкцій є результати роботи [1].

У випадку симетричної задачі розв'язок породжується напівгрупою операторів, що задає однорідний марківський процес одержаний з даного перетворенням Фейнмана-Каца з адитивним функціоналом

$$\eta_t = \int_0^t r(x(\tau)) \delta_S(x(\tau)) d\tau,$$

який треба розуміти як W-функціонал з характеристикою

$$f_t(x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t, x, y) r(y) d\sigma_y, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

де $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ — щільність відносно лебегової міри ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t \geq 0}$.

Розв'язок в загальному випадку будемо з допомогою деякого збурення одержаного процесу, яке взагалі кажучи не приводить до якогось марківського процесу. Побудована напівгрупа не залишає інваріантним конус невід'ємних функцій (див. [2], [3]).

Література

- [1] Osypchuk, M. M. and Portenko, M. I. *On simple-layer potentials for one class of pseudo-differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, **67** (11) (2016), 1704–1720
- [2] Osypchuk, M. M. *On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations*, Carpathian Mathematical Publications, **7** (1) (2015), 101–107.
- [3] Osypchuk, M. M. *On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems*, Theory of Stochastic Processes, **21** (1) (2016), 64–72.

Гельдеровість розв'язку хвильового рівняння зі стійким білим шумом

ПРИГАРА Л.І.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
pruhara7@gmail.com

Рівняння математичної фізики з випадковою правою частиною відіграють значну роль у моделюванні. Більшість літератури з тематики присвячено або випадку загальних стохастичних мір [4], або випадку гаусівських чи субгаусівських розподілів випадковості [2, 2, 3, 4, 6]. Тому наявні результати непридатні в ситуації, коли випадковість має важкі хвости розділу.

Ми розглядаємо хвильове рівняння з α -стійким збуренням:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) U(x, t) = f(x, t), \\ U(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

Розглядатимемо випадкове збурення, що є просторовим шумом, тобто:

$$f(x, t) = \sigma(x, t) \dot{M}(x),$$

де $\dot{M}(x)$ — « α -стійкий білий шум» у $\mathbb{R}^2$, що є щільністю Радона-Нікодіма симетричної міри M , $\sigma : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна обмежена функція.

Потенційний розв'язок визначено за формулою Пуассона-Парсеваля:

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{|x-y| < a(t-\tau)} \frac{\sigma(y_1, y_2, \tau) M(dy_1, dy_2) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \quad (2)$$

Теорема 1. Якщо функція σ є обмеженою, то $\forall x \in \mathbb{R}^2$ інтеграл у (2) є скінченним майже напевно.

На відміну від часової змінної, за просторовою змінною розв'язок не є неперервним, більше того, він є необмеженим в околі кожної точки, в якій σ не обертається в нуль.

Теорема 2. Для будь-яких $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^2$ таких, що $\sigma(t, x) \neq 0$ та для $\forall \delta > 0$ виконується наступне співвідношення:

$$\sup_{y: |x-y| < \delta} |U(y, t)| = +\infty.$$

Теорема показує, що рівняння (1) не може мати розв'язку в класичному сенсі. Функція $U(x, t)$ задовольняє рівняння (1) в узагальненому сенсі, що показує наступна теорема.

Теорема 3. 1. Якщо $\alpha \in (0, 1)$, то знайдеться $\Omega_0 \in F$, $P(\Omega_0) = 1$, така, що для довільних $\omega \in \Omega_0$ та для довільної функції $\theta(x, t) \in C_{fin}^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ з імовірністю 1 виконано рівність:

$$\int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^2} \theta(x, t) \sigma(x, t) M(dx) dt = \int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^2} U(x, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x, t) - a^2 \Delta \theta(x, t) \right) dx dt. \quad (3)$$

2. Якщо $\alpha \geq 1$ то для довільної функції $\theta(x, t) \in C_{fin}^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ майже напевно буде виконуватись рівність (3).

Теорема 4. Нехай виконуються умови теореми 1, функція σ є гельдеровою. Тоді розв'язок хвильового рівняння (1) є майже напевно гельдеровим за змінною t .

Література

- [1] Balan R.M., Tudor C.A. The stochastic wave equation with fractional noise: a random field approach // Stochastic Processes Appl. - 2010. - Vol. 120(12). - P. 2468-2494.
- [2] Dalang R.C., Frangos N.E. The stochastic wave equation in two spatial dimensions // Ann. Probab. - 1998. - Vol. 26(1). - P. 187-212.
- [3] Millet, A., Morien, P.-L. On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density // Stochastic Process. Appl. - 2000. - Vol. 86(1). - P. 141-162.
- [4] Pryhara L., Shevchenko G. Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise // Modern Stochastics: Theory and Applications. - 2016. - Vol.3(3). - P. 237-248.
- [5] Radchenko, V.: Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. Stud. Math. - 2009. - Vol. 194(3). - P. 231-251. Quer-Sardanyons L., Tindel S. The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet // Stochastic Processes Appl. - 2007. - Vol. 117(10). - P. 1448-1472.
- [6] Walsh J.B. An introduction to stochastic partial differential equations // In: Ecole D'ete de Probabilites de Saint-Flour, XIV—1984. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin. - 1986. - Vol. 1180. - P. 265-439.

Гранична поведінка рівняння Маккіна-Власова з дробовим броунівським шумом

ТАНЦЮРА М. В.

Інститут математики НАН України

mtan@meta.ua

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k^n(t) = \left(-\lambda X_k^n(t) + a(X_k^n(t), \mu^n(t)) \right) dt + dw_k(t), \quad k = \overline{1, n}, t \geq 0, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k^n(t)}, \\ X_k^n(0) = x_k, \quad k = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, функція a є обмеженою ліпшицевою, w_k є незалежними дробовими броунівськими процесами, $\{x_i, i \geq 1\}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з розподілом $m(dx)$.

Теорема 1. Для всіх $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ має місце збіжність $X_k^n(t) \rightarrow X_k(t)$, $n \rightarrow \infty$, де випадковий процес $X_k(t)$ визначається з системи

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k(t) = \left(-\lambda X_k(t) + a(X_k(t), \mu(t)) \right) dt + dw_k(t), \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = \text{distr}(X_k(t)), \\ X_k(0) = x_k, \end{array} \right. \quad (2)$$

де $\text{distr}(X(t))$ – розподіл випадкової величини $X(t)$.

Зауваження. Міра $\mu(t)$ не залежить від k .

Позначимо через ρ метрику Васерштейна першого порядку:

$$\rho(\mu, \nu) = \inf_{\text{distr}(\xi)=\mu, \text{distr}(\eta)=\nu} E|\xi - \eta|.$$

Доведено, що якщо міра m має другий момент, то за вищевказаних припущень має місце рівномірна пропagaція хаосу, а саме

$$\sup_{t \geq 0} \rho(\mu^n(t), \mu(t)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

за ймовірністю.

Дослідження та графічне представлення моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу у деяких просторах Орліча.

ТЕГЗА А. М.

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

anteg@ukr.net

СЛИВКА-ТИЛИЩАК Г. І.

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

aslyvka@ukr.net

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією $r(\tau)$.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ незалежні центровані гауссові випадкові процеси з незалежними приростами.

За модель процесу $X(t)$ візьмемо

$$X_\Lambda^M(t) = \sum_{k=0}^M (\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t), \quad (1)$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0, \infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$; η_{k1} , η_{k2} , ζ_k незалежні випадкові величини такі, що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, $k = 1, \dots, M$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функціями розподілу $F_k(\lambda)$.

Показано за яких умов треба вибирати розбиття Λ , щоб для моделі X_Λ^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі Орліча із заданими точністю та надійністю [1].

Провівши відповідні обчислення і оцінки у виразі $B_\Lambda(t)$ [1], одержали:

$$\tau(X(t) - X_\Lambda^M(t)) \leq 4 \left(\left(\frac{\Lambda T}{2M} \right)^{2\gamma} F(\Lambda) + F(+\infty) - F(\Lambda) \right)^{1/2}$$

Розглянуто часткові випадки простору Орліча випадкових величин, що породжуються різними С-функціями:

$$U_{\alpha}(x) = e^{|x|^{\alpha}} - 1, 1 \leq \alpha \leq 2; U_{\alpha}(x) = \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}, 0 < \alpha < 1.$$

При виборі різних С-функцій, спектральних щільностей, параметрів С-функцій та параметрів одержаних оцінок субгауссового стандарту, значень точності і надійності одержано оцінку для обчислення числа М, при якому модель X_{Λ}^M наближатиме гауссовий процес $X(t)$ з заданими точністю і надійністю.

Зокрема:

- 1) При $U_{\alpha}(x) = e^{|x|^{\alpha}} - 1, \alpha = 2, U^{(-1)}(1) = \sqrt{\ln 2}, T = 1, \gamma = \frac{1}{2}, F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}, \delta = 0.01, \beta = 0.01$ одержано

$$M \geq \frac{\Lambda(1 - e^{-\Lambda})}{2(3.306 * 10^{-7} - e^{-\Lambda})}$$

Мінімум функції $M = 2.862 * 10^6$ досягається при $\Lambda = 17$.

- 2) При $U_{\alpha}(x) = e^{|x|^{\alpha}} - 1, \alpha = 2, U^{(-1)}(1) = \sqrt{\ln 2}, T = 1, \gamma = 1, F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}, \delta = 0.01, \beta = 0.01$ одержано

$$M \geq \sqrt{\frac{\Lambda^2(1 - e^{-\Lambda})}{4(3.306 * 10^{-7} - e^{-\Lambda})}}$$

Мінімум функції $M = 15780$ досягається при $\Lambda = 17$.

- 3) При $U_{\alpha}(x) = \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \alpha = 1/2, U^{(-1)}(1) = \left(\frac{4}{e}\right)^2, T = 1, \gamma = 1, F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}, \delta = 0.01, \beta = 0.01$ одержано

$$M \geq \sqrt{\frac{\Lambda^2(1 - e^{-\Lambda})}{4(2.326 * 10^{-6} - e^{-\Lambda})}}$$

Мінімум функції $M = 5277$ досягається при $\Lambda = 15$.

Підставляючи число М у модель (1) і комп'ютерно моделюючи випадкові величини $\eta_{k1}, \eta_{k2}, \zeta_k$ при $k = \overline{0, M}$, одержали графічні представлення моделей процесу.

Література

- [1] Антоніні Р.Д., Козаченко Ю.В., Тегза А.М., *Точність моделювання в L_p гауссових випадкових процесів*, Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. , **Вип. 5** (2002), 7–14.

Страхові премії в умовах факторизаційної моделі

ЧОРНИЙ Р. О.

ЛНУ ім. Івана Франка
rostykchorny@gmail.com

КІНАШ О. М.

ЛНУ ім. Івана Франка
okinasch@yahoo.com

Припустимо, що ми знаходимось в умовах факторизаційної моделі індивідуальних позовів (Φ - моделі)[див. зокрема, [1], ст.248]. Нагадаємо, що суть Φ - моделі полягає в тому, що випадкові величини X_j - величина відносного позову за j -м договором страхування і S_j - страхова сума за j -м договором вважаємо незалженими.

Отримано певні асимптотичні оцінки страхових премій, які базуються на припущенні, що страховий фонд R може бути апроксимований за нормальним законом.

Література

- [1] Королев В.Ю. *Математические основы теории риска.*/ В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. - М.:Физматлит,(2011). - 620 с.

2 Секція математичного аналізу

Деякі достатні умови збіжності та абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

АНТОНОВА Т. М.
НУ “Львівська політехніка”
tamara_antonova@ukr.net

ВОЗНА С.М.
НУ “Львівська політехніка”
svitlanavozna@gmail.com

ГЛАДУН В.Р.
НУ “Львівська політехніка”
v_hladun@yahoo.com

Ми розглядаємо деякі достатні умови збіжності послідовності $\{f_n\}$,

$$\begin{aligned} f_0 &= b_0, \quad f_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \\ &+ \Psi i = 1n \frac{a_{i,0}}{b_{i,0} + F_{i,0}^{([(n-i)/2])}} + \Psi i = 1n \frac{a_{0,i}}{b_{0,i} + F_{0,i}^{([(n-i)/2])}}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ F_{i,j}^{(0)} &= 0, \quad F_{i,j}^{(k)} = \Psi p = 1k \frac{a_{p+i,p+j}}{b_{p+i,p+j}}, \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де $b_0, a_{i,j}, b_{i,j}, i, j = 0, 1, \dots, i + j \geq 1$ — комплексні сталі, $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α , та обмеженості абсолютної похибки елементів послідовності, тобто

$$\left| \hat{f}_n - f_n \right| \leq \left| \hat{b}_0 - b_0 \right| + C\Delta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

якщо C, Δ — додатні сталі,

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= \hat{b}_0, \quad \hat{f}_n = \hat{b}_0 + \hat{F}_{0,0}^{([n/2])} + \\ &+ \Psi i = 1n \frac{\hat{a}_{i,0}}{\hat{b}_{i,0} + \hat{F}_{i,0}^{([(n-i)/2])}} + \Psi i = 1n \frac{\hat{a}_{0,i}}{\hat{b}_{0,i} + \hat{F}_{0,i}^{([(n-i)/2])}}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\hat{F}_{i,j}^{(0)} = 0, \quad \hat{F}_{i,j}^{(k)} = \Psi p = 1k \frac{\hat{a}_{p+i,p+j}}{\hat{b}_{p+i,p+j}}, \quad i, j = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

$$|\hat{a}_{i,j} - a_{i,j}| \leq \Delta, \quad \left| \hat{b}_{i,j} - b_{i,j} \right| \leq \Delta, \quad i, j = 0, 1, \dots, i + j \geq 1.$$

Estimate minimum modulus of entire function of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables

BANDURA A. I..

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
andriykopanytsia@gmail.com

We use definitions and notations from [1]. Our main result is following

Theorem 1. *Let $\mathbf{L} \in Q^n$, F be an entire in $\mathbb{C}^n$ function. If $\exists R \in \mathbb{R}_+^n$ with $\mathbf{0} < R < \mathbf{1}$, $\exists p_2 \geq 1 \exists \Theta \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$, ($R' = \mathbf{0}$ for $Z_F = \emptyset$) such that $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n \exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, for which*

$$\text{meas} \left\{ T^n \left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)} \right) \cap G_{R'}(F) \right\} < \left(\frac{2\pi}{3} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R + \mathbf{1}))l_j(z^0)} \text{ and}$$

$$\begin{aligned} & \max \left\{ |F(z)| : z \in T^n \left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)} \right) \right\} \leq \\ & \leq p_2 \min \left\{ |F(z)| : z \in T^n \left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)} \right) \setminus G_{R'}(F) \right\} \end{aligned}$$

then the function F has bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables (meas is the Lebesgue measure on the skeleton in the polydisc).

This theorem is necessary to deduce conditions by partial logarithmic derivatives and distribution of zeros, which provides boundedness of $\mathbf{L}$ -index in joint variables.

References

- [1] A. I. Bandura, M. T. Bordulyak, O. B. Skaskiv, *Sufficient conditions of boundedness of L -index in joint variables*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 12–26

Асимптотика цілих функцій нульового порядку з нулями на логарифмічній спіралі

БАСЮК Ю. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка
yuliya.basyuk.92@mail.ru

ЗАБОЛОЦЬКИЙ М. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка
m_zabol@franko.lviv.ua

Нехай $L_\theta^c = \{z : z = re^{i(c \ln r + \theta)}\}$, $1 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < c < \infty$ – логарифмічна спіраль, $f(z)$ – ціла функція така, що $f(0) = 1$, $n(t)$ – рахуюча функція її нулів,

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt,$$

$\ln f(z)$ – однозначна в області $\mathbb{C} \setminus L_0^c$ вітка багатозначної функції $\text{Ln } f(z)$ така, що $\ln f(0) = 0$. Через $\mathfrak{L}$ позначимо клас невід’ємних, зростаючих до $+\infty$ неперервно-диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій $v(r)$ таких, що $rv'(r) = o(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$.

Теорема 1. *Нехай $v \in \mathfrak{L}$, f – ціла функція нульового порядку з нулями на логарифмічній спіралі L_0^c такими, що*

$$n(r) = \Delta v(r) + o(v(r)), r \rightarrow +\infty.$$

Тоді для $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\ln f(re^{i(c \ln r + \theta)}) = (1 + ic)N(r) + i\Delta(\theta - \pi)v(r) + o(v(r)), r \rightarrow +\infty,$$

причому останнє співвідношення виконується рівномірно щодо $\theta \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < 1$.

Випадок цілих функцій додатнього порядку з нулями на логарифмічній спіралі було розглянуто в [1].

Література

- [1] С. Балашов, *О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения*, Изв. АН СССР Сер. матем., **37** (3) (1973), 603–629.

Критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами

БОДНАР Д. І.

Тернопільський національний економічний університет
bodnar4755@ukr.net

БІЛАНІК І. Б.

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка
i.bilanyk@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0 + \overset{\infty}{D} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \quad (1)$$

де $b_{i(k)} > 0, i(k) \in \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{i_1 i_2 \dots i_k : 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq \dots \leq i_0; k \geq 1; i_0 = N\}$,
 N – фіксоване натуральне число.

Для дробу (1) означимо

$$b_0^{(m)} = b_0^{(m-1)} + \overset{\infty}{D} \frac{1}{b_{m[k]}^{(m-1)}}, b_{i(n)}^{(m)} = b_{i(n)}^{(m-1)} + \overset{\infty}{D} \frac{1}{b_{i(n)m[k]}^{(m-1)}}, m = \overline{1, N}, \quad (2)$$

де $b_{i(n)m[k]}^{(0)} = b_{i(n)m[k]}, m[k] = \underbrace{mm\dots m}_k, i(n) \in \mathcal{I}_{m+1}, \mathcal{I}_{m+1} =$
 $\{i_1 i_2 \dots i_n : m+1 \leq i_n \leq i_{n-1} \leq \dots \leq i_0; n \geq 1; i_0 = N\}.$

Теорема 1. ГЛД (1) збігається тоді і тільки тоді, коли для кожного $m, 1 \leq m \leq N$, і кожного $i(n), i(n) \in \mathcal{I}_{m+1}$, розбігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{m[k]}^{(m-1)}, \sum_{k=1}^{\infty} b_{i(n)m[k]}^{(m-1)}, \quad (3)$$

елементи яких визначаються співвідношеннями (2).

Convergence of 1-periodic branched fraction of the special form in some regions

BUBNIAK M.

Ternopil National Economic University

mariabubniak@gmail.com

VOZNYAK O.

Ternopil National Economic University

olvoz@ukr.net

Object of our research is 1-periodic branched continued fraction (BCF) of the following form

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{c_{i_1}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i_2}}{1 + \dots}}\right)^{-1}, \quad (1)$$

where $c_j \neq 0$ – complex numbers, $j = \overline{1, N}$; $i_0 = N$ – fixed natural numbers.

Theorem 1. *Let $N > 1$ and elements c_j of fraction (1) satisfy follow conditions*

$$c_1 \in \Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\},$$

$c_j \in \mathcal{P}_j(\alpha_1)$, where

$$\mathcal{P}_j(\alpha_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \Re(ze^{-2i\alpha_1}) \leq 2l_j \cos^2 \alpha_1\},$$

where $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg c_1$, $l_j = \frac{1 - \varepsilon}{2(N-1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{(1 - \varepsilon)(j-1)}{2(N-1)} \right)$, ε – some parameter,

$0 < \varepsilon < 1$. Then

1) 1-periodic BCF uniformly converge according to $c_2, \dots, c_N$ on any compact of $\mathcal{P}_2(\alpha_1) \times \mathcal{P}_3(\alpha_1) \dots \mathcal{P}_N(\alpha_1)$ with fixed c_1 ;

2) value set is the circle

$$\mathcal{K}(\alpha_1) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{e^{-i\alpha_1}}{\varepsilon \cos \alpha_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon \cos \alpha_1} \right\}.$$

Алгебра симметричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$

ВАСИЛИШИН Т. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
taras.v.vasylyshyn@gmail.com

КРАВЦІВ В. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
maksymivvika@gmail.com

Нехай $p \in [1, +\infty)$. Позначимо $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, де $x_m = (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(n)}) \in \mathbb{C}^n$ для $m \in \mathbb{N}$, для яких скінченною є норма

$$\|x\|_p = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n |x_m^{(j)}|^p \right)^{1/p}.$$

Функцію $f : \ell_p(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо

$$f((x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)) = f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}, \dots))$$

для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ і для всіх бієкцій $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

В роботі описано алгебраїчний базис алгебри усіх неперервних симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Нерівності типу Бернштейна-Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік

ВЛАСИК Г.

Інститут математики НАН України
annawlasik@gmail.com

У багатьох питаннях теорії наближення періодичних функцій однієї змінної важливу роль відіграють нерівності, які пов'язують норми полінома і його похідної в різних метриках (див., наприклад, [1, Ч. I, §2]):

для довільного тригонометричного полінома $t \in T(m)$, де $T(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx} \right\}$, та для довільних $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\|t_\beta^r\|_q \ll m^{r+1/p-1/q} \|t\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Співвідношення такого виду називають нерівностями Бернштейна–Нікольського, оскільки в них поєднані нерівності С.Н. Бернштейна при $p = q$ з "нерівностями різних метрик" С.М. Нікольського при $r = 0$.

У зв'язку з нерівностями Бернштейна–Нікольського для тригонометричних поліномів із множини $T(m)$ в роботах В.Є. Майорова [2] була розглянута більш загальна постановка задачі, а саме досліджувалася величина

$$\mathcal{T}_m(r, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T(K_m)} \frac{\|t^r\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,$$

де похідна порядку $r \geq 0$ розуміється в сенсі Вейля–Надя, $\beta = r$, $T(K_m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{j \in K_m} c_j e^{ijx} \right\}$, а $K_m = \{j_1, \dots, j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел.

Нехай $L_q, 1 \leq q \leq \infty$, — простір вимірних 2π -періодичних функцій f зі стандартною нормою. Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f . Скрізь нижче

будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$.

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0, \tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О.І. Степанця [3, с. 25], назовемо (ψ, β) -похідною функції f і позначимо f_{β}^{ψ} . Зауважимо, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}, r > 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (ψ, β) -похідна функції f співпадає з її (r, β) -похідною (позначення f_{β}^r) в сенсі Вейля–Надя.

Для ψ — додатних і незростаючих та $\beta \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T(K_m)} \frac{\|t_{\beta}^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty.$$

Позначимо через Ψ множину додатних і незростаючих послідовностей $\psi(\tau), \tau \in \mathbb{N}$, таких, що $\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C$, де $C > 0$ деяка абсолютна стала.

Теорема 1. Нехай $1 < q \leq p < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — додатня і незростаюча послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедлива оцінка

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \ll \psi^{-1}(m).$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \asymp \psi^{-1}(m).$$

Теорема 2. Нехай $2 \leq p \leq q < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — додатня і незростаюча послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедлива оцінка

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \ll \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$ не зростає, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Література

- [1] V.N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions.*, New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.
- [2] В.Е. Майоров, *Неравенства Бернштейна–Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам*, Мат. заметки, **47** (6) (1990), С. 55 – 61.
- [3] А.И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций.*, К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Найкраще середньоквадратичне наближення класів періодичних функцій високої гладкості

Войтович В. А.

Институт математики НАН України

viktorvojtovich@gmail.com

У доповіді мова буде йти про класи 2π -періодичних неперервних функцій $C_{\beta,s}^\psi$, що задаються наступним чином:

$$C_{\beta,s}^q = \left\{ f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \Psi(t) dt, a_0 \in \mathbb{R}, \|\varphi\|_s \leq 1, \varphi \perp 1 \right\},$$

де $\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_k \pi}{2}\right)$, а $\psi(k), \beta_k \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ множини послідовностей $\psi(k) > 0, k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$.

Нехай f — неперервна 2π -періодична функція. Розглянемо рівномірне розбиття відрізка $[-\pi, \pi]$ системою точок $x_i = \frac{2\pi i}{N}$, де $i = 0, 1, \dots, N-1$, де N — довільне натуральне число.

Через $T_{n-1}^N(f; x)$ позначимо тригонометричний поліном порядку не вище $n-1$ який, серед усіх тригонометричних поліномів $T_{n-1}(x)$ порядку не вище $n-1$, мінімізує суму $\sum_{i=1}^N |f(x) - T_{n-1}(x)|^2$, при $N \geq 2n-1$.

Розглядається задача про відшукування асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,s}^{\psi}; T_{n-1}^N; x) = \sup_{f \in C_{\beta,s}^{\psi}} |f(x) - T_{n-1}^N(f; x)|,$$

коли $\psi \in \mathcal{D}_0, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0, \beta_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, n, N \in \mathbb{N}, N > 2n-1, 1 \leq s \leq \infty$. Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C_{\beta,s}^{\psi}; T_{n-1}^N; x) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k),$$

де $O(1)$ — величина рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Про гладкі відображення постійної кратності

ВИГОВСЬКА І. Ю.

Інститут математики НАН України
vkinata@gmail.com

ДАКХІЛ Х. К.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
moon5385@gmail.com

Основне питання, що досліджується в доповіді, це побудова неперервного гладкого відображення постійної непарної кратності відкритої кулі Евклідового простору в себе, яке продовжується до гомеоморфізму на межі.

Мета доповіді дати часткову відповідь на наступне запитання [1,2]. Існування негладкого відображення встановлено в роботах [3, 4].

Питання. Чи існує для кожного власного відображення $f : D \rightarrow D_1$ (D, D_1 — області на n -вимірних многовидах) гомотопне до f власне відображення g таке, що кожна точка образу $g(D)$ має не більше ніж $|deg f| + 2$ прообразів (де $deg f$ — степінь відображення f)?

Теорема 1. *Існує гладке неперервне відображення n -вимірної кулі $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі, а кожна внутрішня точка кулі має в точності k прообрази, де k є непарним числом.*

Висновок. Нехай множина X має форму декартового добутку $X = Y \times B^n$, тоді на X можна задати гладке неперервне відображення в X , яке буде гомеоморфізмом на $Y \times \partial B^n$, а кожна точка з $Y \times \text{int} B^n$ має рівно k прообразів, де k є непарним числом.

Теорема 2. *Для будь якого $k \geq 3$ існує гладке неперервне відображення n -вимірної кулі $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq k-2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 2, \dots, n\}$ на циліндр $S^1 \times \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{(n-1)\text{-раз}}$, для якого кожна точка образу має в точності k прообразів.*

Різні оцінки кратності відображень областей на многовидах отримано в роботах [5-8].

Література

- [1] Yu. B. Zelinskii *Continuous mappings between domains of manifolds*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform, **60** (2) (2010), 11–14.
- [2] Yu. B. Zelinskii *Open topological and geometrical problems in analysis*, https://www.academia.edu/29063888/Open_topological_and_geometrical_problems_in_analysis.
- [3] І. Ю. Виговська, Д. С. Доля, Х. К. Дакхіл, *Про відображення кулі фіксованої кратності*, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 24-27 лютого 2015. Тези доповідей, 66–67.
- [4] Yu. B. Zelinskii, H. K. Dakhil, *On mappings of constant multiplicity*, Advances in Analysis, (2017), в друку.
- [5] Ю. Б. Зелинский, *О некоторых проблемах Косинского*, Укр. матем. журнал, **27** (4) (1975), 510–516.
- [6] Ю. Б. Зелинский, *О кратности непрерывных отображений областей*, Укр. матем. журн., **57** (4) (2005), 554–558.
- [7] Ю. Б. Зелинский, *Об отображении областей на многообразиях*, Збірник праць Інституту математики НАН України, **5** (1) (2008), 149–152.

- [8] Ю. Б. Зелинский, *Открытые вопросы отображения областей на многообразиях*, Збірник праць Інституту математики НАН України, **7** (2) (2010), 242–248.

Some inequalities for the inner radii of partially overlapping domains

VYHIVSKA L. V.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

liudmylavygivska@ukr.net

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be its one-point compactification, and $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Let $r(D, a)$ be the inner radius of the domain $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in D$. (see, for example, [2, 4, 5]). The inner radius is a generalization of the conformal radius for multiply connected domains. The inner radius of the domain D is associated with the generalized Green function $g_D(z, a)$ of the domain D by the relations

$$g_D(z, a) = \ln \frac{1}{|z - a|} + \ln r(D, a) + o(1), \quad z \rightarrow a,$$

$$g_D(z, \infty) = \ln |z| + \ln r(D, \infty) + o(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

Denote by $P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$. The system of domains $D_0, \{D_k\}_{k=1}^n$ satisfy the partially overlapping condition with respect to the unit circle points $|a_k| = 1$, if the open set $K = \bigcup_{k=1}^n D_0 \cup D_k$ satisfies the non-overlapping condition with respect to the systems of points. The open set $K, \{0\} \cup \{a_k\} \subset K$, satisfies the non-overlapping condition with respect to the unit circle points $|a_k| = 1$, if the equality

$$K_k(0) \cap K_k(a_i) \cap K_k(a_j) = \emptyset$$

holds and for any fixed $k = \overline{1, n}$ for all different points a_i, a_j which belong to $P_k(a_k)$.

The following theorem strengthens the main result of the paper [6].

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4, 17$, $\gamma_5 = 5, 71$, $\gamma_6 = 7, 5$, $\gamma_7 = 9, 53$, $\gamma_8 = 11, 81$, and $\gamma_n = 0, 1215 n^2$ for $n \geq 9$. Then for any different points of the unit circle $|a_k| = 1$ such that $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{\gamma}$, $k =$*

$\overline{1, n}$, and for any system domains D_k , $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$ which satisfy the partially overlapping condition with respect to points of a unit circle, the following inequality holds

$$J_n(\gamma) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (1)$$

The equality is attained if a_k and D_k , $k = \overline{0, n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Corollary 1. [6] Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n$. Then for different point of the unit circle $|a_k| = 1$ such that $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0, n}$, and for any non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, the inequality (1) holds. The equality is attained under the same condition, as in the theorem 1.

Corollary 2. [3] Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$. Then for different point of the unit circle $|a_k| = 1$ such that $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0, n}$ and for any non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, the inequality (1) holds. The equality is attained under the same condition, as in the theorem 1.

Corollary 3. [6] Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, for $n \geq 9$ $\gamma_n = 0, 12n^2$. Then for different points of the unit circle $|a_k| = 1$ such that $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0, n}$ and for any non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, the inequality (1) holds. The equality is attained under the same condition, as in the theorem 1.

References

- [1] V. Dubinin, *The method of symmetrization in the geometric function theory of a complex variable*, Uspekhi Math. Nauk, **49** (1) (1994), 3–76.
- [2] V. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, (2014), 344.
- [3] A. Bakhtin, G. Bakhtina and Yu. Zelinskii, *Topological Algebraic Structures and Geometric Methods in Complex Analysis*, K.: Inst. Math. of the NAS of Ukraine, (2008), 308.
- [4] L. Kovalev *To the problem of extremal decomposition with free poles on a circumference* Dal'nevost. Mat. Sborn., (2) (1996), 96–98.

- [5] A. Bakhtin, I. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane*, Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2) (2012), 83–92.
- [6] A. Bakhtin, L. Vygyvska, I. Denega, *An inequalities for the inner radii of non-overlapping domains*, Ukrainian Mathematical Bulletin, **13** (1) (2016), 68–75.

Про спектри алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі, породжених зліченною множиною поліномів

ГАЛУЩАК С. І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
sv.halushchak@ukr.net

Позначимо ℓ_∞ банахів простір усіх обмежених послідовностей комплексних чисел. Нехай X – деякий замкнений підпростір простору ℓ_∞ . Для кожного натурального n визначимо n -однорідний поліном $P_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ рівністю $P_n(x) = x_n^n$ для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in X$. Позначимо через $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}(X)$ алгебру, яка породжена цими поліномами і замкнена в просторі $H_b(X)$ цілих функцій на X обмеженого типу (обмежених на обмежених підмножинах банахового простору X).

У даній роботі досліджуються спектри алгебр $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}(\ell_\infty)$, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}(c_0)$ і $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}(\ell_1)$.

Проблема опису процесів народження та поширення кореляцій в квантових системах

ГЕРАСИМЕНКО В.І.

Інститут математики НАН України, Київ
gerasym@imath.kiev.ua

У доповіді розглядається проблема строгого опису еволюції станів квантових систем багатьох частинок за допомогою кореляційних операторів. Побудовано непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь для послідовності маргінальних кореляційних операторів, якими описуються процеси народження та поширення кореляцій [1].

В границі самоузгодженого поля встановлено асимптотичну поведінку побудованих маргінальних кореляційних операторів, зокрема, яка описується за допомогою кінетичного рівняння з початковими кореляціями – квантового кінетичного рівняння Власова немарковського типу.

Доведення отриманих результатів ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд маргінальних кореляційних операторів [2].

Література

- [1] V.I. Gerasimenko, *Processes of creation and propagation of correlations in quantum many-particle systems*, Reports of NAS of Ukraine, **5** (2016), 58–66.
- [2] V.I. Gerasimenko, *Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations*, In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications, N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2013.

Про перетворення координат у кінематичних мінливих множинах

ГРУШКА Я.І.

Інститут Математики НАН України, м. Київ
grushka@imath.kiev.ua

Теорія кінематичних мінливих множин базується на теорії мінливих множин. З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (тобто еволюції), зокрема змінювати свої властивості в часі, розпадатись на частини, чи навпаки — об'єднуватись в одне ціле. Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження, тобто, фактично, від системи відліку.

Кінематичні мінливі (скорочено — кінематичні множини) множини являють собою математичні структури, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними об'єктами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. Дослідження кінематичних множин може мати застосування в астрофізиці, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики можуть бути відмінними від класичних, тобто тих, які діють в околі нашої сонячної системи. Математичну теорію мінливих та кінематичних множин найбільш повно викладено в роботах [1, 2, 3]. В доповіді буде сформульовано математично строгі означення реального і універсального перетворення координат між системами відліку кінематичних множин і наведено приклади кінематичних множин, які допускають і які не допускають універсальне перетворення координат.

Література

- [1] Grushka Ya.I., *Abstract concept of changeable set*. Preprint arXiv:1207.3751v1, (2012), (<http://arxiv.org/abs/1207.3751v1><http://arxiv.org/abs/1207.3751v1>).
- [2] Grushka Ya.I., *Draft Introduction to Abstract Kinematics*. Preprint viXra:1701.0523, (2017), (<http://vixra.org/abs/1701.0523><http://vixra.org/abs/1701.0523>).
- [3] Грушка Я.І., *Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат*. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **12**, (1), (2015), 74–118.

Математична модель та аналіз геодезичного дослідження стовбура свердловини при видобутку сланцевого газу

ГРИГОРЧУК Г.В.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ГРИГОРЧУК Л. І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
grygorchukl@gmail.com

ПЕТРАШ А.І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

На сучасному етапі проведення вимірів свердловин вимагає підвищеної точності визначення глибини свердловин. Особливої актуальності дане дослідження набуває при вирішенні спеціальних задач шляхом буріння (наприклад ліквідація фонтануючої свердловини, коли забій на великій глибині повинен попасти у круг допуску 3,5 м). На основі автоматизації процесів буріння та дослідження стовбура свердловин можливо використання найбільш досконалих математичних моделей і методів рішення поставлених завдань.

Для кожного інтервалу інклінометричного виміру zenітні кути й азимутні обчислюють як середні зі значень, отриманих у сусідніх точках зйомки, що не завжди відбиває правдиве положення. Всі розрахунки робляться за даними інклінометрії (зенітний кут, азимутний кут і віддаль). При існуючій методиці основні розрахунки осі прокладки свердловин виконуються за

методом, у якому для кожного інтервалу інклінометричній зйомки зенітні кути θ й азимутні кути α обчислюються як середні зі значень, отриманих у сусідніх точках зйомки:

$$x_n = x_0 + \sum_{i=1}^n l_i \cdot \sin [0,5 (\psi_i + \psi_{i+1})] \cos [0,5 (\varphi_i + \varphi_{i+1})]$$

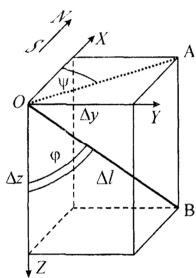
$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n l_i \cdot \sin [0,5 (\psi_i + \psi_{i+1})] \sin [0,5 (\varphi_i + \varphi_{i+1})]$$

$$z_n = z_0 - \sum_{i=1}^n l_i \cdot \cos [0,5 (\psi_i + \psi_{i+1})],$$

де x_n, y_n, z_n - координати точки свердловини; x_0, y_0, z_0 - координати гирла свердловини; l_i - інтервал інклінометрії; ψ_i, φ_i - зенітні кути та азимути осі свердловини в точках спостереження. Оскільки азимутні і зенітні кути вимірюються в довільно заданих точках осі свердловини можна скористатися так названою інтерполяційною формулою. Однак у цьому випадку при обчисленні координат можлива поява великих помилок, оскільки не представляється можливим оцінити розмір залишкового члена поліному Лагранжа. Розглянемо поняття кубічного сплайну для розв'язання задач.

Визначимо основні поняття сплайну. Інтерполяційним кубічним сплайном називається функція $S(x)$, що володіє наступними властивостями :

- 1) графік цієї функції проходить через кожну точку заданого масиву,
- 2) $S(x) = y_i, i = 0, 1, \dots, m$
- 3) на кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, m - 1$ функція є багато-членом третього ступеня,
- 4) на усьому відрізку завдання $[x_0, x_m]$ функція $S(x)$, має неперервну другу похідну.



Система позначень для виведення рівняння форми стовбура свердловини за даними інклінометрії.

З математичної точки зору доведено, що вона є єдиною функцією, що володіє властивістю мінімальної кривизни, серед усіх функцій, що інтерполюють дані точки і мають другу похідну, що квадратично інтегрується. У цьому змісті кубічний сплайн є найгладкішою з функцій, що інтерполюють задані точки [4]. Розглянемо опис стовбура свердловини як неперервну криву. Виберемо прямокутну систему координат XYZ , де вісь OX спрямована на північ, OY - на схід, а OZ - в нижній півпростір до центра Землі.

З геометричних представлень сферичної системи координат:

$$\Delta x = \Delta l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad \Delta y = \Delta l \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad \Delta z = \Delta l \cdot \cos \varphi,$$

де Δl -довжина ланки, φ -зенітний кут, ψ -азимут. Таким чином одиничні вектори моделі свердловини будуть описуватися наступними формулами:

$$\cos \alpha = \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad \cos \beta = \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad \cos \gamma = \cos \varphi.$$

Використовуючи граничний перехід при $\Delta l \rightarrow 0$, одержимо систему диференціальних рівнянь, яка описує просторову поведінку стовбура свердловини:

$$\frac{dx}{dl} = \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad \frac{dy}{dl} = \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad \frac{dz}{dl} = \cos \varphi$$

Тепер сформулюємо постановку задачі: знайти таке представлення параметрично заданих неперервних функцій $F(l)$, $V(l)$, $W(l)$, які описують поведінку стовбура свердловини у просторі. Дані і функції повинні задовольняти таким умовам:

$$x(t) = F(l), \quad y(t) = V(l), \quad z(t) = W(l),$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

Для всіх спостережень φ_i та ψ_i , де x_0 , y_0 , z_0 - координати гирла свердловини; P_i^x , P_i^y , P_i^z - значення похідних у точках спостереження $i = 1, 2, \dots, n$ - кількість точок спостереження, l - параметр довжини стовбура свердловини. Для практичної реалізації пошуку похідних P_i^x , P_i^y , P_i^z задамося параметричним тривимірним сплайном, що проходить через точки M_i , $i = 1, 2, \dots, n$

$$r(t) = \begin{bmatrix} S_x(t) \\ S_y(t) \\ S_z(t) \end{bmatrix} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = T^T(t) A, 0 \leq t \leq 1$$

де $a_k = \begin{bmatrix} a_{x,i} \\ a_{y,i} \\ a_{z,i} \end{bmatrix}$ – вектори шуканих коефіцієнтів сплайна, кількість таких рівнянь буде втричі більшою $3 \times 4n$.

Отже маючи майже ідеальні обчислені значення глибини кожної конкретної ділянки свердловини, можемо перерахувати координати ствола свердловини за відомими математичними методами обробки даних інклінометрії.

Література

- [1] Барановский В.Д., Антаманов С.И., Лебедев Е.А., Савенков Ю.И. *Влияние качества ствола на успешность проводки глубоких скважин*. М., ВНИИО-ЭНГ, 1981.
- [2] Лиманов Е.Л., Страбыкин И.Н. *Классификация профилей скважин направленного бурения и применяемая терминология*. Известия вузов, сер. Геология и разведка, **3**, 1964.
- [3] Мазницкий А. С., Сова В. Г. *Маркшейдерско-геодезические работы на месторождениях нефти и газа*. М., Недра, 1979. 325 с.
- [4] Маковійчук М.В. *Математичні методи і моделі: Конспект лекцій*.-Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2013.-127с.

Бігармонічні інтеграли в крайових задачах типу задачі Шварца для моногенних функцій у напівплощині та крузі

Грищук С. В.

Інститут математики НАН України, м. Київ
serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

ПЛАКСА С. А.

Інститут математики НАН України, м. Київ
plaksa62@gmail.com, plaksa@imath.kiev.ua

Розглянемо комутативну алгебру $\mathbb{B}$ над полем комплексних чисел, що містить базис $\{e_1, e_2\}$: $(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0$, $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$. Нехай D — область в декартовій площині xOy , $D_\zeta := \{xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mathbb{B}$. Кажемо, що $\mathbb{B}$ -значна функція

$$\Phi: D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}, \Phi(\zeta) = U_1(x, y)e_1 + U_2(x, y)ie_1 + U_3(x, y)e_2 + U_4(x, y)ie_2,$$

$\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta$, $U_k: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, є моногенною в D_ζ , тоді і тільки тоді, коли Φ має класичну похідну в кожній точці D_ζ . Кожна U_k , $k = \overline{1, 4}$, є бігармонічною функцією в D .

Розглянемо крайову задачу типу задачі Шварца для моногенних функцій $\Phi: D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ в області D_ζ , яка полягає у знаходженні моногенної в D_ζ функції за заданими граничними значеннями компонент U_j , $j = \{k, m\}$, $1 \leq k < m \leq 4$, тбт. ставляться наступні крайові умови:

$$U_k(x, y) = u_k(\zeta), \quad U_m(x, y) = u_m(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D_\zeta, \quad (1)$$

де u_k та u_m — фіксовані дійснозначні функції границі ∂D_ζ області D_ζ . Дану задачу, як і в [1], назвемо (k-m)-задачею для моногенних функцій в області D_ζ .

Розв'язок (1-3)- та (1-4)-задач для моногенних функцій у диску та напівплощині, відповідно, знайдено у вигляді гіперкомплексних бігармонічних інтегралів типу класичного інтеграла Шварца (див. [2, 3]):

$$S_{\Pi^+}[u](\zeta) := \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)(1+t\zeta)}{(t^2+1)} (t-\zeta)^{-1} dt \quad \forall \zeta \in \Pi^+ \quad (2)$$

для напівплощини $\Pi^+ := \{xe_1 + ye_2 \in \mu : y > 0\}$,

$$S_{D_\zeta}[u](\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\zeta} u(\tau)(\tau + \zeta)(\tau - \zeta)^{-1} \tau^{-1} d\tau \quad \forall \zeta \in D_\zeta \quad (3)$$

для круга $D_\zeta = \{\zeta \in \mu : \|\zeta\| \leq 1\}$ (u — шукана дійснозначна щільність з відповідного функціонального класу).

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

Література

- [1] В. Ф. Ковалев, *Бигармоническая задача Шварца*. — Киев, 1986. — 19 с. — (Препр. / АН України. Ін-т математики; 86.16).
- [2] S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Schwartz-type integrals in a biharmonic plane*, Inter. J. of Pure and Appl. Math., **83** (1) (2013), 193 – 211 (on-line version: <http://www.ijpam.eu/contents/2013-83-1/13/13.pdf>).
- [3] S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *A Schwartz-type boundary value problem*, ArXiv preprint /arXiv:1610.00436v1 [math.AP]/ (2016), 10 pages.

Точки вузькості і одностайно вузькі лінійні та ортогонально адитивні оператори

ГУМЕНЧУК А. І.

Чернівецький медичний коледж

anna_hostyuk@ukr.net

КРАСІКОВА І. В.

Запорізький національний університет

ПОПОВ М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

У роботі [2] поняття вузького оператора розповсюджено на ортогонально адитивні оператори. Це надало можливість узагальнити деякі теореми про вузькі лінійні оператори на ортогонально адитивні оператори. Крім

того, в цій же роботі уперше поняття вузькості розглядалося у фіксованій точці області визначення. Нехай E – векторні ґратка та X – лінійний простір. Ортогонально адитивний оператор $T : E \rightarrow X$ називається *стро-го вузьким в точці* $e \in E$, якщо існує розклад $e = e' \sqcup e''$ такий, що $T(e') = T(e'')$. Оператор $T : E \rightarrow X$ називається *стро-го вузьким*, якщо він є строго вузьким в кожній точці $e \in E$. У випадку банахового простору X оператор T називається *вузьким в точці* $e \in E$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує розклад $e = e' \sqcup e''$ такий, що $\|T(e') - T(e'')\| < \varepsilon$. Оператор $T : E \rightarrow X$ називається *вузьким*, якщо він є вузьким в кожній точці $e \in E$.

Один з найцікавіших фактів про вузькі оператори полягає в тому, що для деяких пар просторів (E, F) сума $S + T$ довільних двох вузьких операторів $S, T : E \rightarrow X$ є вузьким оператором, проте для інших пар – ні. Наприклад, сума двох вузьких операторів на просторі $L_1[0, 1]$ є вузьким оператором, але кожний оператор на просторі $L_p[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ є сумою двох вузьких операторів (див. [3]). Інша ситуація виникає для вузькості у фіксованій точці.

Теорема 1. *Нехай E – банахів простір Кете на просторі зі скінченною безатомною мірою (Ω, Σ, μ) . Тоді існують лінійні неперервні оператори $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$, кожний з яких є строго вузьким в точці $\mathbf{1} = \mathbf{1}_\Omega$, проте сума $T_1 + T_2$ не є вузьким оператором в точці $\mathbf{1}$.*

Всі відомі доведення того, що сума двох вузьких операторів з E в X є вузьким оператором, зводяться до того, щоби довести сильніше твердження: для довільних $e \in E$ та $\varepsilon > 0$ існує розбиття $e = e' \sqcup e''$ (спільне для S та T) таке, що $\|Se' - Se''\| < \varepsilon/2$ та $\|Te' - Te''\| < \varepsilon/2$.

Означення 2. *Нехай E – векторна ґратка та X – F -простір. Казати-мемо, що ортогонально адитивні оператори $S, T : E \rightarrow X$ є **одностаїно вузькими**, якщо для довільних $e \in E$ та $\varepsilon > 0$ існує розбиття $e = e' \sqcup e''$ таке, що $\|Se' - Se''\| < \varepsilon$ та $\|Te' - Te''\| < \varepsilon$.*

Виникає природне питання: чи кожна пара вузьких лінійних (чи ортогонально адитивних) операторів $S, T : E \rightarrow X$ з вузькою сумою є одностаїно вузькою? У окремих природних випадках отримуємо позитивну відповідь.

Теорема 3. *Нехай E – векторна ґратка та X – банахів простір, для якого існують підпростір Y та розклад $Y = X_1 \oplus X_2$ на підпростори X_1, X_2 , ізоморфні X . Нехай сума довільних двох вузьких лінійних неперервних операторів з E в X є вузьким оператором. Тоді кожна пара $S, T : E \rightarrow X$ вузьких лінійних неперервних операторів є одностаїно вузькою.*

Наприклад, припущення теореми 3 виконуються для $E = X = L_1[0, 1]$.

Теорема 4. Нехай E – векторна ґратка і X – банахова ґратка, для якої існують підпростір Y та розклад $Y = X_1 \oplus X_2$ на підпростори X_1, X_2 , ізоморфні до X з регулярними ізоморфізмами $\tau_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$. Нехай сума кожних двох вузьких регулярних лінійних операторів з E в X є вузьким оператором. Тоді кожна пара $S, T : E \rightarrow X$ вузьких регулярних лінійних операторів є одностайно вузькою.

Згідно з [1, Theorem 11.8], припущення теореми 4 виконуються в багатьох природних випадках.

Теорема 5. Нехай E – безатомна векторна ґратка з принциповою проєктивною властивістю і F – порядково неперервна банахова ґратка, для якої існують підпростір Y та розклад $Y = X_1 \oplus X_2$ на підпростори X_1, X_2 , ґратково ізоморфні X , причому відповідні проєктори з Y на X_i паралельно до X_{3-i} порядково неперервні. Тоді кожна пара $S, T : E \rightarrow X$ вузьких латерально неперервних порядково обмежених ортогонально адитивних операторів є одностайно вузькою.

Література

- [1] O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, M. M. Popov, *A lattice approach to narrow operators*, Positivity, **13** (2009), 459–495.
- [2] M. Pliev, M. Popov, *Narrow orthogonally additive operators*, Positivity, **18** (2014), 641–667.
- [3] M. Popov, B. Randrianantoanina. *Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices*, De Gruyter Studies in Mathematics **45**, De Gruyter, Berlin-Boston, 2013.

Застосування гіллястих ланцюгових дробів до наближення гіпергеометричних функцій багатьох змінних

Гоєнко Н. П.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України

hoyenko@gmail.com

Гіпергеометричні функції Лаурічелли використовуються в астрофізиці [1]. Зокрема, представлення точних розв'язків рівнянь для ізотропних геодезійних рухів у метриці Керра-де Сіттера виражається функцією

$$F_D^{(3)} \left(1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z_1, z_2, z_3 \right). \quad (1)$$

Побудовано розвинення функції (1) у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1 - 2z_1 + z_2 - z_3 + \frac{\frac{4}{3}z_1(1-z_1)}{1 - 2z_1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 + \dots} + \frac{-\frac{2}{3}z_2(1-z_2)}{1 - \frac{4}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 + \dots} + \frac{\frac{2}{3}z_3(1-z_3)}{1 - \frac{4}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 - z_3 + \dots} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Для наближення функції (1) використано підхідні дроби ГЛД (2).

Література

- [1] G. V. Kraniotis, *Precise analytic treatment of Kerr and Kerr-(anti) de Sitter black holes as gravitational lenses*, Class. Quantum Grav. **28** (2011) 085021

On the problem of extremal decomposition of the complex plane

DENEGA I. V.

Institute of mathematics of NAS of Ukraine
iradenega@yandex.ru

ZABOLOTNIJ JA. V.

Institute of mathematics of NAS of Ukraine
yaroslavzabolotnii@mail.ru

The report is devoted to one classic problem of geometric function theory on extremal decomposition of the complex plane (see, for example, [1–5]). We consider a problem of maximization of product of inner radii of n non-overlapping domains.

Let $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, and let $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be its one-point compactification, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Let $r(B, a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to a point $a \in B$. Inner radius is a generalization of conformal radius for multiply connected domains. Note that to describe the extremal configurations of domains we use notion of quadratic differential (see, for example, [1, P.324–326], [2, P. 63–70]).

Consider an extremal problem which was formulated in [1, P. 330] in the list of unsolved problems.

Problem. Consider the product

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

where $B_0, B_1, \dots, B_n$ ($n \geq 2$) are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ and $0 < \gamma \leq n$. Show that it attains its maximum at a configuration of domains B_k and points a_k possessing rotational n -symmetry.

For $\gamma = 1$ the proof is due to V. Dybinin and for $0 < \gamma < 1$ to G. Kuz'mina. L. Kovalev solved this problem under the additional assumption that the angles between neighbouring line segments $[0, a_k]$ do not exceed $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$.

Let $n \in \mathbb{N}$. A set of points $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$ is called n -radial system if $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, and $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$.

Let $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$. For an arbitrary n -radial points system $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, and $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ we assume

$$\mu^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^n |a_k|^{1 + \frac{1}{4}\gamma(\alpha_k + \alpha_{k-1})}.$$

It is clear that the class of n -radial points systems for which $\mu^{(\gamma)}(A_n) = 1$ automatically includes all systems of n distinct points that are located on the unit circle.

The following statements hold

Theorem 1. [4] Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0.45}$. Then for any n -radial system of points $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ such that $\mu^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mu^{(0)}(A_n) \leq 1$, and any system of non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$ ($k = \overline{1, n}$), we have inequality

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

where equality is attained if a_k and B_k , $k = \overline{0, n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Theorem 2. [5] Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 541$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Then for any different points on the circle $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, and any system of non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $a_0 = 0 \in B_0$ ($k = \overline{1, n}$), the following inequality holds

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

where Λ_k , λ_k , $k = \overline{0, n}$, $\lambda_0 = 0$, are, respectively, circular domains and poles of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

References

- [1] V. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, 344 pp.
- [2] A. Bakhtin, G. Bakhtina, Yu. Zelinskii, *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis*, Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008, 308 pp. (Russian)
- [3] A. Bakhtin, I. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane*, Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2) (2012), 83–92.
- [4] A. Bakhtin, I. Dvorak, I. Denega, *A separating transformation in the problems of extremal decomposition of the complex plane*, Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., (12) (2015), 7–12. (Russian)
- [5] Ja. Zabolotnij, *Determination of the maximum of a product of inner radii of pairwise nonoverlapping domains*, Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., (3) (2016), 7–13. (Ukrainian)

Інтегральні системи, пов'язані з узагальненою струною Стілт'єса

ДЕРКАЧ В. О.
НПУ імені М.П.Драгоманова
derkach.v@gmail.com

КОВАЛЬОВ І.М.
НПУ імені М.П.Драгоманова
i.m.kovalyov@gmail.com

Розглядаються системи різницевих рівнянь, що поліноміально залежать від спектрального параметра і у випадку лінійної залежності від спектрального параметра співпадають з системою рівнянь поперечних коливань струни Стілт'єса, яка містить злічену кількість точкових мас на невагомій нитці. Знайдено вигляд інтегральної системи, що є еквівалентною цій різницевій системі. Показано, що матриця монодромії цієї інтегральної системи співпадає з резольвентною матрицею для деякої індефінітної проблеми моментів Стілт'єса.

Про відповідність регулярного багатовимірною C -дробу з нерівнозначними змінними

ДМИТРИШИН Р. І.
ДВНЗ "Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника"
dmytryshynr@hotmail.com

Досліджується відповідність між формальним кратним степеневим рядом

$$\sum_{|m(N)| \geq 0} c_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)}, \quad (1)$$

де $m(N) = m_1, m_2, \dots, m_N$ – мультиіндекс, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq N$, $|m(N)| = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, $0(N) = 0, 0, \dots, 0$, $c_{0(N)} = 1$, $c_{m(N)} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{z}^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_N^{m_N}$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, і регулярним багатовимірним C -дробом з нерівнозначними змінними

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i_2(2)} z_{i_2}}{1} + \dots, \quad (2)$$

де $i(k) = i_1, i_2, \dots, i_k$ – мультиіндекс, $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $a_{i(k)} \neq 0$, $k \geq 1$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, $1 \leq n \leq k$, $i_0 = N$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Справджується теорема:

Теорема. Для регулярного багатовимірного C -дробу з нерівнозначними змінними (2) існує єдиний формальний кратний степеневий ряд вигляду (1), до якого цей дріб буде відповідним. Порядок відповідності n -го підхідного дробу

$$g_n(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \dots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)} z_{i_n}}{1}$$

дорівнює $\nu_n = n + 1$, i , отже, розвинення $g_n(\mathbf{z})$ у ряд Тейлора у точці $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0)$ має такий вигляд

$$\sum_{|m(N)|=0}^n c_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \sum_{|j(N)| \geq n+1} \gamma_{j(N)}^{(n)} \mathbf{z}^{j(N)}, \quad n \geq 1,$$

де $\gamma_{j(N)}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|j(N)| \geq n + 1$, $n \geq 1$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Узагальнені спектральні апроксимації для регулярних еліптичних операторів

ДМИТРИШИН М. І.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

m_dmytryshyn@hotmail.com

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита обмежена область з нескінченно гладкою межею $\partial\Omega$ і набір операторів

$$(Au)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(\xi) D^\alpha u(\xi), \quad a_\alpha(\xi) \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_j u)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(\xi) D^\alpha u(\xi), \quad b_{j,\alpha}(\xi) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad j = 1, \dots, m$$

є регулярно еліптичний ([1, означення 5.2.1/4]).

Розглянемо замкнений оператор A в просторі $L_q(\Omega)$ ($1 < q < \infty$) з областю визначення $W_{q, \{B_j\}}^{2m}(\Omega) = \{u \in W_q^{2m}(\Omega) : B_j u|_{\partial\Omega} = 0, j = 1, \dots, m\}$, де $W_q^{2m}(\Omega)$ – простір Соболева. Якщо резольвентна множина $\rho(A)$ оператора A непорожня, то A має точковий спектр $\sigma(A)$ [1, § 5.4.4].

Нехай $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ – кореневий підпростір оператора A , що відповідає власному значенню $\lambda_j \in \sigma(A)$. Позначимо через $\mathcal{R}^\nu(A)$ комплексну лінійну оболонку в $L_q(\Omega)$ корневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j| < \nu$, $\lambda_j \in \sigma(A)$. На об'єднанні $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{R}^\nu(A)$ задамо квазінорму $|u|_{\mathcal{R}(A)} = \|u\|_{L_q(\Omega)} + \inf\{\nu > 0 : u \in \mathcal{R}^\nu(A)\}$.

Для $0 < s < \infty$, $1 < q < \infty$ і $1 \leq \tau \leq \infty$ визначимо простір $B_{q,\tau,\{B_j\}}^s(\Omega) := \{u \in B_{q,\tau}^s(\Omega) : B_j A^k u|_{\partial\Omega} = 0, j = 1, \dots, m, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $B_{q,\tau}^s(\Omega)$ – простір Бесова.

Теорема 1. *Існують постійні c_1 і c_2 такі, що виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_{q,\tau}^s(\Omega)} &\leq c_1 |u|_{\mathcal{R}(A)}^s \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A), \\ E(t, u) &\leq c_2 t^{-s} \|u\|_{B_{q,\tau}^s(\Omega)}, \quad u \in B_{q,\tau,\{B_j\}}^s(\Omega), \end{aligned}$$

де $E(t, u) = \inf \{ \|u - u^0\|_{L_q(\Omega)} : u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \leq t \}$, $u \in L_q(\Omega)$, $t > 0$.

Література

- [1] Н. Triebel, *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

Оцінки інтегралів Лапласа-Стільтьєса

ДОБУШОВСЬКИЙ М. С.

Львівський національний університет імені І. Франка
mdobush19@gmail.com

ШЕРЕМЕТА М. М.

Львівський національний університет імені І. Франка

Нехай V - клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0, +\infty)$ функцій F . Будемо говорити, що $F \in V(l)$, якщо $F \in V$ і $F(x) - F(x-0) \leq l < +\infty$ для всіх $x \geq 0$. Для невід'ємної на $[0, +\infty)$ функції f інтеграл $I(\sigma) = \int_0^\infty f(x) e^{x\sigma} dF(x)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, називається інтегралом Лапласа-Стільтьєса.

Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$ - абсциса збіжності інтегралу $I(\sigma)$, $I \in LS_A(F)$ - клас інтегралів $I(\sigma)$ з абсцисою збіжності A і заданою функцією F . Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ

таких, що похідна Φ' є додатною неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ - функція, обернена до Φ' , а $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Нехай $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ - така неперервна функція, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а для $q \in (0, 1)$ і $x \geq 0$ нехай $\Delta_\gamma(x; q) = \frac{1}{x}(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx}))$. Оцінки зверху і знизу для інтегралів з класу $I \in LS_{+\infty}(F)$ містяться у таких теоремах.

Теорема 1. Нехай $A = +\infty$ або $A = 0$, $I \in LS_A(F)$, $\Phi \in \Omega(A)$ і $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow A$. Припустимо, що $\gamma(x)/x$ не зростає на $[x_0, +\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \rightarrow +\infty$. Якщо $\ln f(x) \leq -x\Psi(\varphi(x))$ для $x \geq x_0$ і $\ln F(x) = o(\gamma(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, то $\lim_{\sigma \uparrow A} (\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma))/\gamma(\Phi'(\sigma)) \leq 0$.

Теорема 2. Нехай $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ і $\ln f(x) \geq -x\Psi(\varphi(x))$ для $x \geq x_0$. Припустимо, що функція γ така, що $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ для деякого $q \in (0, 1)$. Тоді, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln F(x))/\gamma(x) > 1$, то $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} (\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma))/\gamma(\Phi'(\sigma)) \geq 1 - q > 0$.

Подібне до теореми 2 твердження є правильним і для інтегралів $I \in LS_0(F)$.

З доведеннями наведених результатів можна ознайомитись в Укр. мат. журн. за 2016 рік, Т. 68, N 11.

О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей

ДВОРАК І.Я.

Інститут математики НАН України
dvorakinna@gmail.com

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [1, 2, 3, 4, 5]. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B [5, ?] соотношением

$$g_B(z, a) = -\ln |z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \rightarrow a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln |z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

Систему точек $A_n := \{ a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n} \}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ назовем n -лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$.

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в [2, с. 48 – 50], [4, с. 120]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i(e^{-i\theta_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

2. Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача об экстремизации функционала

$$I_n(\gamma) = [r(B_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (1)$$

при $\gamma > 0$, $n \geq 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$, таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0 \in U$ [1, 6, 7].

Отметим, что если области B_k , $k = \overline{1, n}$, симметричны относительно окружности $|a_k| = 1$ и область $B_0 \subset U$, то с помощью не сложных преобразований задачу об экстремизации функционала (1) [3, с.59] можно привести к изучению следующего функционала

$$J_n\left(\frac{\gamma}{2}\right) = r^{\gamma/2}(B_0, 0) r^{\gamma/2}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k). \quad (2)$$

В данной работе получены оценки функционала $J_n(\gamma)$ на более широком интервале значений параметра γ , по сравнению с работами [2, 3, 4, 5, 7, 8, 9].

3. Результаты и доказательства

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta \leq \delta_n$, $\delta_2 = 0, 73$, $\delta_3 = 1, 41$, $\delta_4 = 2, 29$, $\delta_5 = 3, 36$, $\delta_6 = 4, 62$, и $\delta_n = 0, 08 n^2$, $n \geq 7$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причем области B_k обладают симметрией относительно окружности $|a_k| = 1$ при всех $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство

$$r^\delta(B_0, 0) r^\delta(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\delta(\Lambda_0, 0) r^\delta(\Lambda_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области $\Lambda_0, \Lambda_\infty, \Lambda_k$, и точки $0, \infty, \lambda_k, k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (2n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}, 0 < \delta \leq \delta_n, \delta_2 = 0,73, \delta_3 = 1,41, \delta_4 = 2,29, \delta_5 = 3,36, \delta_6 = 4,62$, и $\delta_n = 0,08n^2, n \geq 7$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n, |a_k| = 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $B_k, 0 \in B_0 \subset U, \infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}, a_k \in B_k \subset \mathbb{C} \setminus U, k = \overline{1, n}$, причем области $\{B_k\}_{k=1}^n$ обладают симметрией относительно окружности $|a_k| = 1$ при всех $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство

$$r^\delta(B_0, 0) r^\delta(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\delta(\Lambda_0, 0) r^\delta(\Lambda_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области $\Lambda_0, \Lambda_\infty, \Lambda_k$, и точки $0, \infty, \lambda_k, k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (2n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Далее, согласно пункту 2, получаем утверждение:

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 < \gamma \leq \gamma_n, \gamma_2 = 1,46, \gamma_3 = 2,82, \gamma_4 = 4,58, \gamma_5 = 6,72, \gamma_6 = 9,24$ и $\gamma_n = 0,16n^2, n \geq 7$. Тогда для любых различных точек единичной окружности $|a_k| = 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n, 0 \in B_0 \subset U, a_k \in B_k \subset \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$, причем области B_k обладают симметрией относительно окружности $|a_k| = 1$ при всех $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство

$$[r(B_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq [r(\Lambda_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_k , и точки $0, \lambda_k, k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (2n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Литература

- [1] Бахтина Г.П. *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей.* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа. Киев, Ин-т матем. АН УССР. (1984), 21 – 27.
- [2] Дубинин В.Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного.* // Успехи мат. наук, **49** (1994), № 1(295), 3 – 76.
- [3] Дубинин В.Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СС-СР. **168** (1988), 48 – 66.
- [4] Дубинин В.Н. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* // Владивосток "Дальнаука" ДВО РАН, 2009, 390 с.
- [5] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* // Праці ін-ту мат-ки НАНУ, 2008, 308 с.
- [6] Ковалев Л.В. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности.* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96 – 98.
- [7] Ковалев Л.В. *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей.* // Изв. вузов. Серия Математика, **6** (2000), 80 – 81.
- [8] Кузьмина Г. В. *К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168** (1988), 98 – 113
- [9] Кузьмина Г.В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **276** (2001), 253 – 275.

Оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві

ДИРІВ М. М.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

mashadyriv@ukr.net

КАЧАНОВСЬКИЙ М. О.

Інститут математики НАН України

nkachano@gmail.com

Так званий *гауссівський аналіз білого шуму*, тобто пов'язаний з гауссівськими випадковими процесами аналіз на просторах основних, квадратично інтегровних за гауссівською мірою і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних (див., наприклад, [1]), має численні застосування у сучасній математиці. Однак у багатьох задачах стохастичного аналізу, математичної фізики та функціонального аналізу природним чином виникають не лише гауссівські випадкові процеси, тому існує необхідність у побудові аналогів аналізу білого шуму для негауссівських процесів і відповідних ймовірнісних мір.

Одними із тих, що найбільш широко застосовуються зараз, є так звані процеси Леві (випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами, див. детальніше, наприклад, [2]). Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім вінерівського та пуассонівського) так званої *властивості хаотичного розкладу* (тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів за процесом Леві від невинуватливих функцій), яка грає ключову роль при побудові гауссівського аналізу білого шуму.

Існують різні підходи до побудови аналізу білого шуму Леві, які ґрунтуються на різних аналогах властивості хаотичного розкладу. Один з підходів, запропонований Є. В. Литвиновим [3], ґрунтується на розкладі квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій (випадкових величин) у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу за поліномами Ерміта у гауссівському аналізі. Цей підхід на сьогодні є одним з найбільш цікавих та перспективних з точки зору застосувань. Отже, розбудова аналізу білого шуму Леві з використанням згаданого підходу є важливою та актуальною задачею.

Оператори стохастичного диференціювання (наприклад, [4]), які тісно пов'язані з розширеним стохастичним інтегралом Скорохода та зі стохастичною похідною Хіди, відіграють важливу роль у класичному (гауссівському) аналізі білого шуму. Зокрема, ці оператори можна використовувати для вивчення властивостей розширеного стохастичного інтеграла та розв'язків стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

Продовжуючи дослідження [5], ми вивчаємо обмежені та необмежені оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві. Точніше, розглядаємо ці оператори на просторах параметризованого регулярного оснащення простору квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій, використовуючи литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу. Це дає можливість розширити на аналіз білого шуму Леві та поглибити відповідні результати класичного аналізу білого шуму.

Література

- [1] Hida T., Kuo H. H., Potthoff J., Streit L. *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [2] Bertoin J. *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Lytvynov E.W. *Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **Vol. 6**, (1) (2003), 73–102.
- [4] Benth F.E. *The Gross derivative of generalized random variables*, Infin.Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **Vol. 2**, (3) (1999), 381–396.
- [5] Dyriv M.M., Kachanovsky N.A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions of Lévy white noise analysis*, Carpathian Mathematical Publications **Vol. 6**, (2) (2014), 212–229.

Оцінка інтеграла від модуля степеневого ряду на одиничному колі

ЗАДЕРЕЙ П.В.

Київський національний університет технологій та дизайну
zadereypv@ukr.net

ВЕРЕМІЙ М.А.

Київський національний університет технологій та дизайну
koliaveremii@gmail.com

ГАЄВСЬКИЙ М.В.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира
Винниченка
mgaevskij@gmail.com

В роботі встановлена асимптотична формула для інтеграла $I := \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}| dt$, що виражена через коефіцієнти ряду $c_k \in \mathbb{C}$.

Будемо говорити, що послідовність $\{\alpha_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, задовольняє умови типу Сідона-Теляковського (S-T), якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, існує послідовність $\{A_k\}$ така, що $|\Delta \alpha_k| := |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq A_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. Якщо коефіцієнти ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ задовольняють умови S-T та, крім того, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty$, то для інтегралу I має місце рівномірна відносно $m = 0, 1, 2, \dots$ оцінка

$$\left| I - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4|c_k||c_{m-k} - c_{m+k}|}{(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|)^2}} \sin^2 t dt + \right. \\ \left. 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} \right| \leq O(1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k|,$$

Наведена оцінка узагальнює результати робіт [1], [2] та є аналогом оцінки С.О.Теляковського [3].

Література

- [1] Ефимов А. В. *Оценка интеграла от модуля многочлена на единичной окружности*, УМН, **15** (4) (1960), 215—218.
- [2] Гаєвський М. В., Задерей П. В. *Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі, Всеукраїнська літня науково-методична математична школа "Математичний аналіз та теорія ймовірностей" 4-7 липня 2013 р. с. Пюти, Україна: Тези доповідей. – Київ. НТУУ "КПІ" 2013.*
- [3] Теляковский С. А. *Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов*, Матем. заметки, **14** (3) (1973), 317—328.

Властивості інверсора цифр Q_s -зображення дробової частини дійсного числа

ЗАМРІЙ І. В.

Державний університет телекомунікацій
irina-zamrij@yandex.ru

ВАСИЛЕНКО Н. А.

Інститут математики НАН України
nata_va@inbox.ru

Нехай $2 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -кової системи числення, $Q_s = \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$ – впорядкована множина додатних дійсних чисел, таких, що $\sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$. Розклад дійсного числа $x \in [0; 1]$ у вигляді:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}, \quad \alpha_n \in A_s, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_{\alpha_n} = \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} q_i$$

називається Q_s -розкладом (представленням), а його скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$ – Q_s -зображенням данного числа x .

У роботі [1] в термінах Q_3 -зображення дійсних чисел вводиться в розгляд та досліджуються властивості функції $I(x) = I(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_3}) = \Delta_{[2-\alpha_1(x)][2-\alpha_2(x)]\dots[2-\alpha_n(x)]\dots}^{Q_3}$, яка називається інверсором цифр Q_3 -зображення числа.

В доповіді пропонуються результати дослідження диференціальних, інтегральних та фрактальних властивостей інверсора цифр Q_s -зображення дійсного числа, тобто функції наступного вигляду: $I_s(x) = I_s(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s}) = \Delta_{[s-1-\alpha_1(x)][s-1-\alpha_2(x)]\dots[s-1-\alpha_n(x)]\dots}^{Q_s}$, де $\alpha_n \in A_s$.

Теорема 1. Інверсор I_s є неперервною строго спадною на відрізку $[0; 1]$ функцією, причому сингулярною при умові, коли $q_i \neq q_{[s-1-i]}$, $i \in A_s$.

Література

- [1] Замрій І. В., Працьовитий М. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // *Нелінійні коливання (ISSN 1562-3076)*. — **18**, 1. — Інститут математики НАН України. — 2015 р. — С. 55-70.

Про деякі "прості" математичні проблеми

ЗЕЛІНСЬКИЙ Ю. Б.

Інститут математики НАН України
zel@imath.kiev.ua

Основні питання, що будуть обговорені в доповіді, це деякі відкриті математичні проблеми, що дуже просто формулюються, але їх розв'язання потребує нових ідей.

1. Нехай полігон S складається з дзеркал як сторін і задана точка P в середині полігону S . Чи будуть повністю освітлені усі внутрішні точки S , якщо в точці P розмістити джерело світла?

2. Відкрита навіть легша проблема: Чи для кожного полігону S існує точка P , з якої джерело світла освітлює внутрішність полігону?

3. Множину S назвемо n -опукло зв'язною, якщо для будь яких n точок в S існує відрізок, що з'єднує дві з них і лежить всередині S . Valentine і Eggleston показали, що кожна 3-опукло зв'язна фігура є об'єднанням не більше трьох опуклих фігур. Яке найменше число k таке, що кожна 4-опукло зв'язна фігура є об'єднанням не більше ніж k опуклих множин?

4. Який найменший набір квадратів, таких, що кожен з них дотикається трьох інших квадратів тільки по одній точці?

5. Який найменший набір квадратів, таких, що кожен з них дотикається трьох інших квадратів вздовж частини ребра?

6. Який найменший набір квадратів, таких, що кожен з них дотикається чотирьох інших квадратів?

7. Який найменший набір квадратів, таких, що кожен з них дотикається чотирьох інших квадратів тільки по одній точці?

8. В який найменший квадрат можна упакувати 11 одиничних квадратів?

9. Для яких значень n можна розрізати прямокутник на n рівних частин, відмінних від трикутників і прямокутників?

10. Чи кожен квадрат зі стороною $n \geq 22$ можна розрізати на квадрати з меншими сторонами так, щоб між ними не було однакових?

11. Чи кожен квадрат зі стороною $n \geq 29$ можна розрізати на квадрати з меншими сторонами так, щоб кожен розмір зустрічався не більше двох раз?

12. Якщо ми розріжемо квадрат на квадрати з різними сторонами, то чи завжди буде не більше двох квадратів, що мають тільки чотирьох сусідів?

13. Чи для кожного n є тільки скінченна кількість способів розрізати квадрат на n прямокутників рівної площі?

14. Назвемо рептилією фігуру, яку можна розбити на її менші копії. Порядок рептилії — найменше число копій при такому поділі. Скільки існує рептилій порядку 2?

15. Чи можна знайти $n \geq 9$ точок в загальному положенні так щоб одна відстань між парою точок зустрілася раз, друга — двічі, і т.д. , а одна $(n - 1)$ раз?

16. Скільки точок в загальному положенні може бути, щоб відстань між кожною парою точок була цілим числом?

17. Чи можна розташувати 4 точки на площині так, щоб всі відстані між ними були натуральними числами, причому як мінімум 5 — непарними і одна із точок була центром кола, яке проходить через інші три точки?

18. Чи існує щільна множина точок на площині, відстань між кожними двома точками якої раціональне число?

19. Чи існує точка в одиничному квадраті, відстань від якої до кожної з вершин квадрата є раціональним числом?

20. Проблема черв'яка. Яка найменша опукла множина містить копію будь якої неперервної кривої довжини 1?

21. Чи кожна замкнена крива містить вершини деякого квадрата?

22. Точка P називається еквіхордальною для фігури S , якщо кожна хорда в S , яка проходить через P , має однакову довжину. Чи може опукла множина мати більше однієї еквіхордальної точки?

23. Хроматичне число площини. Яка найменша кількість кольорів необхідна для розкраски площини, щоб не існувало пари точок одного кольору на відстані точно 1?

Література

- [1] V. Klee, *Some Unsolved Problems in Plane Geometry*, Math Mag. **52** (1979), 131–145.
- [2] Yu. B. Zelinskii, *Open topological and geometrical problems in analysis*, https://www.academia.edu/29063888/Open_topological_and_geometrical_problems_in_analysis.

- [3] Ю. Б. Зелинский, *Открытые вопросы отображения областей на многообразиях*, Збірник праць Інституту математики НАН України, **7** (2) (2010), 242–248.
- [4] [https://ru.wikipedia.org/wiki/ Открытые математические проблемы](https://ru.wikipedia.org/wiki/Открытые_математические_проблемы)

Нелокальна задача з інтегральними умовами для системи гіперболічних рівнянь першого порядку

ІЛЬКІВ В. С.

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@i.ua

У циліндрі $Q_p = [0, T] \times \Omega^p$, де $0 < T_0 \leq T \leq T_1 < \infty$, Ω^p — p -вимірний тор ($p \geq 1$), розглядається задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^p A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0 u, \quad (t, x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$\int_0^T t^r u(t, \cdot) dt = \varphi, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad (2)$$

в якій $A_0, A_1, \dots, A_p$ — матриці порядку m з комплексними коефіцієнтами, $\varphi = \varphi(x)$ — відома вектор-функція, а вектор-функція $u = u(t, x)$ — шуканий розв’язок, $x = (x_1, \dots, x_p)$.

На корені $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($\lambda_j = \lambda_j(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$) характеристичного рівняння $\det(\lambda I_m - i \sum_{j=1}^p k_j A_j - A_0) = 0$ для системи (1), накладаємо такі умови:

$$\max_{t \in [0, T]} |e^{\lambda t}| \leq R, \quad m_0 \leq |\lambda_j| \leq m_1, \quad |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \geq m \quad \text{для} \quad \tilde{k} \geq K, \quad (3)$$

де m, m_0, m_1 — додатні сталі, $R \geq 1$, $K \geq 1$, а $\tilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \dots + k_p^2$.

Умови (3) справджуються, наприклад, для гіперболічних систем (1) у разі

$$|\det(\lambda I_m - i \sum_{j=1}^p k_j A_j - A_0)| \geq \text{const} > 0.$$

За умови $r \geq 1$ встановлено розв’язність задачі (1), (2) у парі шкал просторів $\{\mathbf{H}_q^1\}_{q \in \mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega^p)$ — простір Соболева періодичних за змінними $x_1, \dots, x_p$ функцій, $\mathbf{H}_q^1 = \mathbf{H}_q^1(Q_p)$ — простір функцій $u = u(t, x)$, для яких $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}_q)$ і $\partial u / \partial t \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}_{q-1})$.

Якщо $r < 1$, то задача (1), (2) у цих шкалах є некоректною за Адамаром. Такий ефект дають *малі знаменники* [1], які відсутні при $r \geq 1$.

Література

- [1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Гіперболічні поліноми, розкладені по базису Похгаммера

КАРПЕНКО І.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
ха08942099@student.karazin.ua

Досліджуються властивості h -Похгаммер оператора, зокрема, його вплив на перший та останній корені гіперболічного полінома. Вивчається зв'язок між коефіцієнтами гіперболічного полінома, розкладеного по базису Похгаммера, та його коренями. Доводиться h -аналог теореми Шура про згортку.

Робота виконана у співавторстві з Ганною Вишняковою.

Про деякі узагальнені багатопараметричні алгоритми

КОПАЧ М. І.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
kopachm2009@gmail.com

ОВШТА А. Ф.

Національний університет "Львівська політехніка"

ШУВАР Б. А.

Національний університет "Львівська політехніка"

В сучасних обчислювальних технологіях широко використовуються багатопараметричні режими обчислень, основою яких є алгоритми декомпозиції задач. Серед методів декомпозиції операторних рівнянь досить ефективними є багатопараметричні методи агрегування. В багатьох випадках

отримані за допомогою методів ітеративного агрегування результати підтверджуються чисельними експериментами навіть тоді, коли умови збіжності відповідних алгоритмів є невідомими (див., напр., [1].).

В запропонованій доповіді розглядається рівняння

$$x = \sum_{j=1}^N A_j x + A_0 x + b, \quad (1)$$

де $A_j : E \mapsto E$ ($j = 0, 1, \dots, N$) є лінійними неперервними операторами, $b \in E$, E – банахів простір. Для рівняння (1) побудовано ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = \left(\sum_{j=1}^N A_j + A_0 \right) x^{(n)} + \sum_{j=0}^N (y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}) + b, \quad (2)$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} y_i^{(n+1)} + (\varphi^{(i)}, B_i x^{(n)}) + \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^{(n)} (y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}) - (\varphi^{(i)}, b) \quad (i = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots), \quad (3)$$

де лінійні неперервні функціонали $\varphi^{(i)} \in E^*$ (E^* – спряжений з E оператор), лінійні неперервні оператори $B_i : E \mapsto E$ є задані, а також є заданими дійсні числа λ_{ij} , $\alpha_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}(x^{(n)})$. Встановлено критерії їх вибору, а також умови, при яких послідовність $\{x^{(n)}\}$, побудована за допомогою формул (2), (3), збігається до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (1) не повільніше від збіжності геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$.

Література

- [1] М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*. М.: Наука, 1985. – 256 с.

Однопараметричні способи апроксимації розв'язків лінійних інтегральних рівнянь

КОПАЧ М. І.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
kopachm2009@gmail.com

КОСТИШИН Л.П.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
lyubapav@gmail.com

Для інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_{t_1}^{t_2} k(t, s)x(s)ds, \quad (1)$$

у класі $L^2 = L^2(t_1, t_2)$ інтегрованих з квадратом на (t_1, t_2) функцій при умові, що

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} k^2(t, s)ds \leq B^2 < \infty,$$

побудовано і досліджено однопараметричний метод ітеративного агрегування, який з точністю до позначень співпадає з однопараметричним методом ітеративного агрегування із [1] у застосування до рівняння (1). Однак встановлені результати про збіжність запропонованого тут методу на відміну від умов збіжності методу М.О. Красносельського із [1] не містять вимог щодо знакосталості ядра $k(t, s)$, вільного члена $f(t)$ і функціоналу

$(\phi, x) = \int_{t_1}^{t_2} \phi(s)x(s)ds$, де $\phi(x)$ довільна дійсна функція, яка разом з довіль-

ною дійсною функцією $\psi(x)$ задовольняє співвідношення $\int_{t_1}^{t_2} \phi(s)\psi(s)ds = 1$.

Не вимагається також, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(K)$ оператора K , породженого правою частиною рівняння (1). Крім того, в [1] вимагається, щоб оператор K був фокусуючим. Зауважимо також, що запропонований тут алгоритм придатний для застосування до багатопараметричних методів ітеративного агрегування, які, як зазначено в [1], мало досліджені й умови їх збіжності невідомі, однак чисельні експерименти часто показують їх ефективність навіть тоді, коли однопараметричні методи незастосовні.

Література

- [1] М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*. М.: Наука, 1985. – 256 с.

A truncated indefinite Stieltjes moment problem

KOVALYOV I.

Dragomanov National Pedagogical University

i.m.kovalyov@gmail.com

A function f meromorphic on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ with the set of holomorphy $\mathfrak{h}_f$ is said to be in the generalized Nevanlinna class $\mathbf{N}_\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$), if for every set $z_i \in \mathbb{C}_+ \cap \mathfrak{h}_f$ ($j = 1, \dots, n$) the form

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f(z_i) - \overline{f(z_j)}}{z_i - \bar{z}_j} \xi_i \bar{\xi}_j$$

has at most κ and for some choice of z_i ($i = 1, \dots, n$) it has exactly κ negative squares. For $f \in \mathbf{N}_\kappa$ let us write $\kappa_-(f) = \kappa$. In particular, if $\kappa = 0$ then the class $\mathbf{N}_0$ coincides with the class $\mathbf{N}$ of Nevanlinna functions.

A function $f \in \mathbf{N}_\kappa$ is said to belong to the class $\mathbf{N}_\kappa^k$ ($k \in \mathbb{N}$) if $zf \in \mathbf{N}_\kappa^k$ (see [1]). If $\kappa = k = 0$ the class $\mathbf{N}_0^0$ coincides with the Stieltjes class introduced by M.G. Krein in 1952.

In this talk the following problem is considered

Problem $\mathbf{MP}_\kappa^k(\mathbf{s}, \ell)$. Given $\ell, \kappa, k \in \mathbb{Z}_+$, and a sequence $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^\ell$ of real numbers, describe the set $\mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s})$ of functions $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$, which have the following asymptotic expansion

$$f(z) = -\frac{s_0}{z^1} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z \widehat{\rightarrow} \infty. \quad (1)$$

The problem $\mathbf{MP}_\kappa^0(\mathbf{s}, \ell)$ was studied in [2].

The set $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^N$ of normal indices of the sequence $\mathbf{s}$ is defined by

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j : D_{n_j} \neq 0, j = 1, 2, \dots, N\}, \quad D_{n_j} := \det(s_{i+k})_{i,k=0}^{n_j-1}.$$

Let $D_n^+ := \det(s_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}$. It is shown that $\mathcal{N}(\mathbf{s})$ is the union of two not necessarily disjoint subsets $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{N_2}$, which are selected by

$$D_{\nu_j} \neq 0 \quad \text{and} \quad D_{\nu_j-1}^+ \neq 0, \quad \text{for all } j = \overline{1, N_1},$$

$$D_{\mu_j} \neq 0 \quad \text{and} \quad D_{\mu_j}^+ \neq 0, \quad \text{for all } j = \overline{1, N_2}.$$

Moreover, the normal indices ν_j and μ_j satisfy the following inequalities

$$0 < \nu_1 \leq \mu_1 < \nu_2 \leq \mu_2 < \dots$$

We prove that any function f with asymptotic expansion (1), where $\ell = 2n_N - 2$, admits the continued fraction expansion

$$f(z) = \frac{1}{-zm_1(z) + \frac{1}{l_1(z) + \dots + \frac{1}{-zm_N(z) + \frac{1}{\tau(z)}}}}, \quad (2)$$

where $m_j(z)$ and $l_j(z)$ are polynomials of degree $\nu_j - \mu_{j-1} - 1$ and $\mu_j - \nu_j$, respectively. In accordance with general theory the continued fraction (2) corresponds to the following system

$$\begin{aligned} y_{2j+1} - y_{2j-1} &= -zm_{j+1}(z)y_{2j}, \\ y_{2j+2} - y_{2j} &= l_{j+1}(z)y_{2j+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$P_j^+(z)$ and $Q_j^+(z)$, which satisfy this system and initial conditions

$$P_{-1}^+(z) \equiv 0, \quad P_0^+(z) \equiv 1, \quad Q_{-1}^+(z) \equiv 1, \quad Q_0^+(z) \equiv 0. \quad (4)$$

are called generalized Stieltjes polynomials of the first and the second kind, respectively.

Theorem 1. *Let $N \in \mathbb{N}$. Any solution of the moment problem $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\nu_N - 2)$ admits the following representation*

$$f(z) = \frac{Q_{2N-1}^+(z)\tau(z) + Q_{2N-2}^+(z)}{P_{2N-1}^+(z)\tau(z) + P_{2N-2}^+(z)}, \quad (5)$$

where $\tau(z)$ satisfies the conditions

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa - \kappa_N}^{k - k_N} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad z \widehat{\rightarrow} \infty. \quad (6)$$

References

- [1] V. Derkach. On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Kreĭn space. *Integral Equations Operator Theory*, **23**, 387-415 (1995).
- [2] M.G. Kreĭn and H. Langer. Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie Hermitscher Operatoren in Räume π_κ zusammenhangen, II. Verallgemeinerte Resolventen u-Resolventen und ganze Operatoren, *J.Funct.Anal.* **30**, 390-447 (1978).

Алгоритми розвинення функцій у багатовимірні неперервні дроби

КУЧМІНЬСЬКА Х. Й.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я.С. Підстригача НАН України

khkuchminska@gmail.com

ВЕНТИК Л. С.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я.С. Підстригача НАН України

leofun01@gmail.com

Різні представлення функцій неперервними дробами будуються виходячи або з формальних зображень функцій степеневими рядами, або за допомогою множин значень функцій. Розвинення функцій у неперервні дроби базуються на (інтерполяцію не розглядаємо) понятті відповідності неперервних дробів і формальних рядів Лорана [1].

Для трьох найважливіх типів відповідних неперервних дробів: правильних C -дробів; приєднаних неперервних дробів та загальних T -дробів побудовані алгоритми обчислення їх коефіцієнтів, такі як: QD-алгоритм Rutishauser-a (1954 р.), алгоритм Viscovatoff-a (1803-1806), FG-алгоритм (1996). Також такі важливі типи неперервних дробів, як дроби Якобі (j -дроби) розглядаються так само, як тип приєднаних неперервних дробів, g -дроби розглядаються разом з C -дробами (хоч тут використовуються алгоритм для обчислення коефіцієнтів розвинення у неперервний g -дріб Вауера (1965)). Узагальнення алгоритму Вауера на багатовимірний випадок запропоновано у роботі [2].

Для функцій від багатьох змінних ($n \geq 2$) ми пропонуємо алгоритми знаходження коефіцієнтів розвинень у відповідні багатовимірні неперервні дроби (правильні C -дроби, приєднані дроби), як використовуючи визначники Ганкеля та обернення кратних степеневих рядів, так і узагальнення алгоритмів типу Вісковатова.

Література

- [1] A. Cuyt, *The qd-algorithm and multivariate Padé approximants*, Numer. Math., **42** (1983), 259–269.
- [2] R. Dmytryshyn, *The multidimensional generalization of g-fractions and their application*, J. Comp. and Appl. Math., **164-165** (2004), 265–284.

Nonlocal problem with integral conditions for Polycaloric equation of second order

KUDUK G.

*Faculty of Mathematical of Nature Sciences University of Rzeszow, Poland,
gkuduk@onet.eu*

Let $H(\mathbb{R})$ be a class of entire functions, K_M be a class of quasipolynomials of the form $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n W_j(x)e^{\alpha_j x}$, where $W_j(x)$ are given polynomials, for $j = 1, \dots, n$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, for $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$. In the strip $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider nonlocal problem

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 U(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$\int_0^T U(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad (2)$$

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) \Big|_{t=0} + R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) \Big|_{t=T} = \varphi_2(x), \quad (3)$$

where $a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ is a differential expression, with entire symbol $a(\lambda) \neq \text{const}$, $R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ are given differential polynomials. $M_1(t, \lambda), M_2(t, \lambda)$ is a solution of the equations

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\lambda) \right]^2 M_m(t, \lambda) = 0,$$

satisfies nonlocal conditions

$$\int_0^T M_1(t, \lambda) dt = 1, \quad R(\lambda) \frac{d}{dt} M_1(t, \lambda) \Big|_{t=0} + Q(\lambda) \frac{d}{dt} M_1(t, \lambda) \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$\int_0^T M_2(t, \lambda) dt = 0, \quad R(\lambda) \frac{d}{dt} M_2(t, \lambda) \Big|_{t=0} + Q(\lambda) \frac{d}{dt} M_2(t, \lambda) \Big|_{t=0} = 1. \quad (5)$$

The main determinant of system (4), (5) is

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{e^{a(\lambda)T} - 1}{a(\lambda)} & \frac{e^{a(\lambda)T} (a(\lambda)T - 1) + 1}{a^2(\lambda)} \\ a(\lambda) (R(\lambda) + Q(\lambda)e^{a(\lambda)T}) & R(\lambda) + Q(\lambda) (1 + a(\lambda)T) e^{a(\lambda)T} \end{vmatrix}.$$

We denote

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\lambda) = 0\}. \quad (6)$$

Theorem 1. Let $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in K_{\mathbb{C} \setminus P}$, where P is set (6). Then in the class of functions $K_{\mathbb{C} \setminus P}$, there exists a unique solution of the problem (1), (2), (3) which can be determined in the formula

$$U(t, x) = \varphi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left\{ M_1(t, \lambda) e^{\lambda x} \right\} \Big|_{\lambda=0} + \varphi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left\{ M_2(t, \lambda) e^{\lambda x} \right\} \Big|_{\lambda=0}.$$

By means of the differential symbol method [2] we construct a solution of the problem (1), (2). This problem is a continuous work [1]

References

- [1] Kalenyuk P. I., Kuduk G., Kohut I.V., and Nytrebych Z. M., *Problem with integral condition for differential-operator equation*, J. Math. Sci., **208** (3) (2015), 267–276.
- [2] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method*. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидкоосцилюючими коефіцієнтами

Куриляк А. О.

Львівський національний університет ім. І. Франка
kurylayk88@gmail.com

Скасків О. Б.

Львівський національний університет ім. І. Франка
olskask@gmail.com

Цвігун В. Л.

Львівський національний університет ім. І. Франка
17fullter17@gmail.com

Шаповаловська Л. О.

Львівський національний університет ім. І. Франка
shap.ludmila@gmail.com

Через $\mathcal{A}^p$ позначимо клас аналітичних функцій вигляду $f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$ з областю збіжності $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p: |z_j| < 1, j \in \{1, \dots, p\}\}$. Тут $\|n\| = n_1 + \dots + n_p$ ($p \geq 2$), $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$. Для $r = (r_1, r_2, \dots, r_p) \in [0, 1)^p$ і $f \in \mathcal{A}^p$ визначимо

$$\Delta_r = \{t \in [0, 1)^p: t_j \geq r_j, j \in 1, \dots, p\},$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n: n \in \mathbb{Z}_+^p\}, \quad M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z_j| \leq r_j, j \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Нехай клас $\mathcal{K}(f, \theta) = \{f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n \exp\{2\pi i \theta_n t\} r^n: t \in \mathbb{R}\}$, де $\{\theta_n\}$ — послідовність натуральних чисел таких, що її впорядкування $\{\theta_k^*\}$ за зростанням, тобто $\{\theta_n: n \in \mathbb{Z}_+^p\} = \{\theta_k^*: k \geq 0\}$, $\theta_{k+1}^* > \theta_k^*$, задовольняє умову $\theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geq q > 1$ ($k \geq 0$).

Будемо казати, що $E \subset [0, 1)^p$ є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0, 1)^p$ (і позначимо клас таких множин Υ), якщо існує $r_0 \in [0, 1)^p$ таке, що

$$\nu(E \cap \Delta_{r_0}) := \int_{E \cap \Delta_{r_0}} \dots \int \prod_{j=1}^p \frac{dr_j}{1 - r_j} < +\infty,$$

і множина E має асимптотично нескінченну логарифмічну міру на $[0, 1)^p$, якщо $E \notin \mathcal{E}$.

Теорема 1. ([1]) (i) Для кожної функції $f \in \mathcal{A}^p$ і будь-якого $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \in [0, 1)^p \setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta}} \cdot \ln^{p/2+\delta} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \right\}.$$

(ii) Існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$, множина $E \subset [0, 1)^p$, $E \notin \mathcal{E}$ такі, що для всіх $r \in E$ виконується нерівність

$$M_f(r) \geq C \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \cdot \ln^{p/2} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \right\}.$$

Теорема 2. Нехай $\delta > 0$, $f(z, t) \in K(f, \theta)$. Тоді майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ існує множина $E = E(f, t, \delta)$, $E \in \Upsilon$, така, що для всіх $r \in [0, 1)^p \setminus E$ маємо

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) \left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{(1-r_j)^{1/2}} \cdot \ln^{p/4} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \right\} \right)^{1+\delta}.$$

Література

- [1] A.O. Kuryliak, L.O. Shapovalovska, O.B. Skaskiv, *Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc*, Ukr. Mat. Journ., **68** (1) (2016), 78–86. (in Ukrainian)

Раціонально локсодромні мероморфні функції

ЛУКІВСЬКА ДЗ. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка
d.lukivska@gmail.com

ХРИСТІЯНИН А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка
khrystiyanyn@ukr.net

Позначимо $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Означення. [2] Нехай $p, q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається p -локсодромною з мультиплікатором q якщо для всіх $z \in \mathbb{C}^*$

$$f(qz) = pf(z).$$

Клас таких функцій позначатимемо $\mathcal{L}_{qp}$. Ці функції є узагальненнями класичних локсодромних функцій [5], [7], [1], [4].

Розглянемо рівняння

$$f(qz) = R(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad (1)$$

де R - раціональна функція

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z) \dots (a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z) \dots (b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ - відмінні від нуля комплексні числа (не обов'язково різні), а C - стала.

Ми шукаємо мероморфні розв'язки рівняння (1). Ці розв'язки будуть узагальненнями функцій з класу $\mathcal{L}_{qp}$, їх ми називатимемо *раціонально локсодромними функціями*.

Означення. [3], [6], [1] *Функція*

$$P(z) = (1 - z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z) \left(1 - \frac{q^n}{z}\right)$$

називається *первинною функцією Шотткі-Кляйна*.

Позначимо

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z).$$

Теорема. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ - відмінні від нуля комплексні числа (не обов'язково різні), C - деяка стала, $m \in \mathbb{Z}$. Тоді кожен мероморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2}) \dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2}) \dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)} g(z),$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = C^{\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{b_1 b_2 \dots b_l}}$.

Література

- [1] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles. Academic Press, 2002.
- [2] Khoroshchak V.S., Khrystiyanyan A.Ya., Lukivska D.V., *A class of Julia exceptional functions*, Carpathian Math. Publ., **8** (1) (2016), 172–180. doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.

- [3] Klein F. *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*. Math. Ann., 1890, **36**, 1-83.
doi.org/10.1007/BF01199432
- [4] Kondratyuk A. A., *Loxodromic meromorphic and δ -subharmonic functions* Proceedings of the Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations. Publications of the University of Eastern Finland Reports and Studies in Forestry and Natural Sciences, Joensuu, Finland, 2014, **14**, 89-99.
- [5] Rausenberger O. *Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln*. Druck und Verlag von B.G.Teubner, Leipzig, 1884.
- [6] Schottky F. *Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt* J. Reine Angew. Math., 1887, **101** , 227-272.
- [7] Valiron G. *Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions*, 2nd Edition. Masson et.Cie., Paris, 1947.

Стабілізація розв'язків задачі Коші та теореми Ліувілля для систем рівнянь Колмогорова-Ейдельмана

БУРТНЯК І. В.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
bvanya@meta.ua

МАЛИЦЬКА Г. П.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

Ми розглядаємо таку задачу Коші

$$\partial_t u_\nu(t, x) - \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^{n_j} x_{js} \partial_{x_{j+1s}} u_\nu(t, x) = \sum_{\mu=1}^{n_0} \sum_{\substack{|k_j|=1 \\ 2b_j}} A_{k\mu}(t) D_{x_1}^k u_\mu(t, x), \quad (1)$$

$$\nu = \overline{1, n_0}, n_0 \in \mathbb{N},$$

$$u(t, x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad t \in (t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

$$n = \sum_{j=1}^4 n_j, \quad n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \quad n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j = 2, 3, 4. \quad x = (x_1, \dots, x_4), \quad b_j \in \mathbb{N}, \quad k = (k_1, \dots, k_4), \quad k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_4).$$

$\partial_t u = \sum_{\frac{k_1}{2b_1} + \dots + \frac{k_4}{2b_4} = 1} A_{k\mu}(t) D_{x_1}^k - 2\vec{b}$ – рівномірно параболічна система за

С.Д. Ейдельманом в смузі $(t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 \leq T$, $A_k(t) \in \mathbb{C}[t_0, T]$. Відповідна двоїста задача Коші до (1), (2)

$$\partial_t v_\nu(t, \xi) - \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^{n_j} \xi_{j+1s} \partial_{\xi_j s} v_\nu(t, \xi) = \sum_{\mu=1}^{n_0} \sum_{\sum_j \frac{|k_j|}{2b_j} = 1} A_{k\mu}(t) (i\xi_1)^k v_\mu(t, \xi), \quad (3)$$

$$u(t, \xi)|_{t=t_0} = v_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

така, що матриця $(\sum A_{k\mu}(i\xi)^k)$ для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, T]$ на характеристиках системи задовольняє умову Лапшо-Данилевського.

Використовуючи властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФРЗК) (1), (2) встановлено:

- а) теореми типу Ліувілля про зображення ФРЗК (1), (2) поліномами;
- б) теореми точкової та рівномірної стабілізації інтеграла Пуассона, що відповідає при $t \rightarrow \infty$ ФРЗК (1), (2) за умови існування граничних кутових середніх, граничних центрально-симетричних середніх, граничних середніх почасової функції.

Some properties of the little Lipschitz p-summing functions

MARTSINKIV M. V.

Vasyl Stefanyk Precarpatian National University
mariadubey@gmail.com

ABDELHAMID TALLAB

University of M'sila, Algeria
hamidtallab@yahoo.fr

The theory of Lipschitz functions is a classic section of modern mathematics. In recent years increased interest to Lipschitz p-summing functions. A Lipschitz map $T : X \rightarrow Y$ is Lipschitz p-summing if there is a constant C such that for all $(x_i), (y_i)$ in X and all positive reals a_i , we have

$$\left(\sum a_i \|Tx_i - Ty_i\|^p \right) \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p,$$

where $B_{X^\sharp}$ is the unit ball of $X^\sharp$, $X^\sharp$ is the space of all real valued Lipschitz function and $\|x - y\|$ is the distance from x to y in Y .

In this report we will focus on a concept little Lipschitz functions. Lipschitz function f is a little Lipschitz function if for every $\epsilon > 0$ the exists $\delta > 0$ such that $\rho(p, q) \leq \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| \leq \epsilon \rho(p, q)$. We introduce and study a concept and some properties of the little Lipschitz p -summing functions.

Деякі властивості секвенціально неперервних функцій

МАСЛЮЧЕНКО В. К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ФОТІЙ О.Г.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ofotiy@ukr.net

Відображення $f : X \rightarrow Y$, що діє між топологічними просторами X і Y , називається *секвенціально неперервним* (коротко: *s-неперервним*) у точці x з X , якщо для довільної послідовності точок x_n з X з умови $x_n \rightarrow x$ в X випливає, що $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в Y , і просто *s-неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з простору X . Сукупність усіх неперервних /s-неперервних/ відображень $f : X \rightarrow Y$ ми позначаємо символом $C(X, Y)/C_s(X, Y)$. Секвенціальним замиканням $\overline{A}^s$ множини A у просторі X називається множина всіх тих точок x з X , для яких існує така послідовність точок x_n з A , що $x_n \rightarrow x$. Множина A називається *s-замкненою* в X , якщо $\overline{A}^s = A$. Кажуть, що X – це *простір Фреше–Урисона*, якщо $\overline{A}^s = \overline{A}$ для кожної множини A в X . Простір X називається *секвенціальним*, якщо кожна s-замкнена підмножина X буде замкненою в X (див. [1, с. 94-95]). Відомі результати з [1] доповнюють такі характеристики.

Теорема 1. *Топологічний простір X буде простором Фреше–Урисона тоді і тільки тоді коли для кожного топологічного простору Y , довільного відображення $f : X \rightarrow Y$ і кожної точки x з X з s-неперервності відображення f у точці x випливає його неперервність у точці x .*

Теорема 2. *Топологічний простір X буде секвенціальним тоді і тільки тоді коли $C(X, Y) = C_s(X, Y)$ для кожного топологічного простору Y .*

Секвенціальна неперервність – це одне з найдавніших ослаблень неперервності. У кінці XIX століття почалось інтенсивне вивчення і іншого ослаблення неперервності, але вже для функції двох змінних, а саме, нарізної неперервності. Вивчення зв'язків між нарізною і звичайною (чи як кажуть сукупною) неперервністю почалось з капітальної праці Р. Бера [2].

На початку XX століття у праці [3] було введено підсилення нарізної неперервності – лінійна неперервність. Пізніше це поняття дістало розвиток у праці [4], де прямі лінії були замінені на криві. В недавній час у цьому напрямку були отримані нові результати у роботах [5],[6],[7]. Всі вони стосувались відображень $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Відправляючись від цих робіт, ми вводимо тут поняття Ω_{x_0} -неперервності для відображень $f : X \rightarrow Y$, де Ω_{x_0} – довільна множина кривих $\omega : [0, 1] \rightarrow X$, для яких $\omega(0) = x_0$. Відображення f називається Ω_{x_0} -неперервним, якщо для довільного $\omega \in \Omega_{x_0}$ композиція $f \circ \omega$ є неперервною у точці 0. Позначимо символом C_{x_0} сукупність усіх неперервних кривих $\omega : [0, 1] \rightarrow X$, для яких $\omega(0) = x_0$.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний векторний простір, $x_0 \in X$ і Y – довільний топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ буде C_{x_0} -неперервним тоді і тільки тоді коли воно s -неперервне в точці x_0 .*

Простори $\mathbb{R}^\infty$ усіх фінітних послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ і $\mathbb{R}^{[0,1]}$ усіх дійсних функцій $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ зі своїми природними топологіями [8] не є просторами Фреше–Урисона, тому на основі теореми 1 існують такі C_{x_0} -неперервні відображення $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X = \mathbb{R}^\infty$ або $\mathbb{R}^{[0,1]}$, які розривні в точці x_0 .

Секвенціальною межею множини A у топологічному просторі X ми називаємо перетин $fr_s A = \overline{A}^s \cap \overline{X \setminus A}^s$. Підмножина A простору X називається *нетривіальною*, якщо $A \neq \Omega$ і $A \neq X$. Ми кажемо, що простір X є s -зв'язним, якщо кожна нетривіальна множина A в X має непорожню s -межу $fr_s A$. З допомогою цього поняття можна отримати такий аналог класичної теореми про проміжне значення.

Теорема 4. *Нехай X – s -зв'язний топологічний простір, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – s -неперервне відображення, $a \in X$, $b \in X$ і $f(a) < \gamma < f(b)$. Тоді існує така точка $c \in X$, що $f(c) = \gamma$.*

Література

- [1] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир, (1986), 752с.
- [2] R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annal Mat. Pura Appl., **3** (3) (1899), 1-123.
- [3] W. Young, G. Young, *Discontinuous functions continuous with respect to every straight line*, Quart. J. Math., Oxford **41** (I) (1910), 87-93.
- [4] A. Rosenthal, *On the continuity of functions of several variables*, Math. Zeitschr., **63** (1955), 31–38.

- [5] K. Ciesielski, T. Glatzer, *Functions continuous on twice differentiable curves, discontinuous on large sets*, Real Anal. Exchange, **37** (2) (2012), 353–361.
- [6] K. Ciesielski, T. Glatzer, *Sets of discontinuities of linearly continuous functions*, Real Anal. Exchange, **38** (2) (2013), 337–389.
- [7] K. Ciesielski, T. Glatzer, *Sets of discontinuities for functions continuous on flats*, Real Anal. Exchange, **39** (1) (2014), 117–138.
- [8] В.К. Маслюченко, *Лінійні неперервні оператори*, Чернівці: Рута, (2002), 72с.

Про побудову диференційовних проміжних функцій

МАСЛЮЧЕНКО В. К.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@ukr.net

МЕЛЬНИК В. С.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
windchange7@gmail.com

Ми кажемо, що (g, h) — це пара Гана на топологічному просторі X , якщо $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ і $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ — це неперервні відповідно зверху і знизу функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X . Якщо $g(x) < h(x)$ на X , то пара Гана (g, h) називається *строгою*. Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *проміжною* для пари Гана (g, h) на X , якщо $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X і *строго проміжною*, якщо $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$. Згідно з теоремою Гана-Д'єдонне-Тонга-Катетова [1, с. 105] T_1 -простір X буде нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g, h) на X має проміжну неперервну функцію. Ця теорема має багато аналогів (див. [2] і вказану там літературу). Тут ми розвиваємо результати з [2], що стосувалися строго проміжних нескінченно диференційовних функцій для строгих пар Гана на проміжках числової прямої, що задовольняють певні додаткові умови.

Перша теорема стосується скінченновимірного випадку і отримується з допомогою компактності і відповідних скінченних розбиттів одиниці.

Теорема 1. Нехай $X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ — це замкнений паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$, (g, h) — строга пара Гана на X , $x_0 \in X$ і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує така строга проміжна для пари Гана (g, h) нескінченно диференційовна функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, що $f(x_0) = y_0$.

Диференційовні за Фреше функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на дійсних нормованих просторах ми називатимемо просто диференційовними, а нескінченно диференційовні за Фреше — C^∞ -функціями.

Використовуючи факти з монографії С. Ленга[3, с. 49], можна встановити такий результат.

Теорема 2. *Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір і $(U_j)_{j \in J}$ — відкрите покриття простору X . Тоді існує локально скінченне C^∞ -розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i \in I}$ на X , яке підпорядковане цьому покриттю.*

З теореми 2 виводиться.

Теорема 3. *Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір і (g, h) — строга пара Гана на X . Тоді існує C^∞ -функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, яка буде строгою проміжною для пари (g, h) .*

Подібний результат можна отримати і для сепарабельних асплундових просторів, використовуючи техніку з [4].

Література

- [1] Р. Энгелькинг *Общая топология.*, М.: Мир, (1986), 752 с.
- [2] В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, В.С. Мельник *Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій*, Бук. мат. журн., **4** (3-4) (2016), 93-100.
- [3] С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, М.: Мир., (1967) 203 с.
- [4] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Longman Scientific & Technical, (1993), 359 p.

Numerical methods of solving nonlinear integral equations of Volterra type

MENTYNSKYI S. M.

Lviv Polytechnic National University
serge.mentynskyi@i.ua

PELEKH R. YA.

Lviv Polytechnic National University
Pelekh_R_Ya@ukr.net

PELEKH YA. M.

Lviv Polytechnic National University
Pelekh_Ya_M@ukr.net

Consider a nonlinear Volterra integral equation

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)] dy, \quad x \in I_L, \quad (1)$$

where $F[x, y, f(y)]$ has the smoothness needed for computations.

We break the interval $I_L = [a, b]$ into N parts of length $h = \frac{b-a}{N}$ and introduce the notation $x_{i+1} = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots$), $f_i = f(x_i)$. Applying the machinery of continued fractions and the idea of the construction of Runge-Kutta methods, we seek an approximate solution of Eq. (1) in the form

$$Y_2^{[k,l]} = \frac{C_{0,0}}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}, \quad (2)$$

When $k + l = 2$ ($k = 1, 2; l = 0, 1$), the expressions for $C_{0,0}$ and $d_{i,j}$ have the form

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= h\delta_1, & d_{0,0} &= 1, & d_{1,0} &= \frac{\delta_2}{\delta_1}, & d_{2,0} &= \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}, \\ d_{1,1} &= -\frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}, & \delta_i &= \sum_{j=1}^p a_{ij}k_j, & p &= k + i + 1 \\ k_j &= F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h \sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm}k_m\right], & \gamma_{j0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

When $k = 1$ and $l = 0$, we obtain

$$Y_2^{[1,0]} = \frac{C_{0,0}}{d_{0,0} + d_{1,0}} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= h\delta_1, & d_{0,0} &= 1, & d_{1,0} &= \frac{\delta_2}{\delta_1}, & \delta_i &= \sum_{j=1}^2 a_{ij}k_j, \quad i = 1, 2, \\ k_1 &= F[a + \alpha_1 h, a + \beta_1 h, 0], & k_2 &= F[a + \alpha_2 h, a + \beta_2 h, \gamma_{21} h k_1]. \end{aligned}$$

We determinate the parameters a_{ij} , α_i , β_i ($i, j = 1, 2$) and γ_{21} from the condition that the Taylor series expansions of the unknown solution f_2 and the approximate solution $Y_2^{[1,0]}$ in a neighborhood of the point $x = x_1$ coincide up to terms order h^2 inclusive.

Theorem 1. *If $\delta_1 + \delta_2 \neq 0$,*

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - a_{12}, & a_{21} &= \frac{1}{2\gamma_{21}} - a_{12}, & a_{22} &= a_{12} - \frac{1}{2\gamma_{21}}, \\ \alpha_2 &= 2\gamma_{21} + (1 - 2\gamma_{21})\alpha_1, & \beta_2 &= \gamma_{21} + (1 - 2\gamma_{21})\beta_1, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\gamma_{21} \neq 0$, a_{12} , α_1 , and β_1 , are arbitrary numbers, then

$$f_2 - Y_2^{[1,0]} = O(h^3).$$

Let us write out two families of solutions of this system:

- 1) $\alpha_1 = \alpha_3$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $B_2 = 0$, $B_3 = \frac{3}{4}$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_{21} = \beta_2$, $\alpha_2 = 1 - \beta_2$, $\beta_3 = \frac{2}{3}$, $\gamma_{31} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9\beta_2}$, $\gamma_{32} = \frac{2}{9\beta_2}$, $a_{1i} = B_i + a_{2i} + a_{3i}$, $i = 1, 2, 3$, where β_2 is a nonzero numbers, a_{2i} , a_{3i} and α_1 , α_2 are parameters;
- 2) $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{3(1-\beta_3)}$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_{21} = \beta_2 = \frac{2-3\beta_3}{3(1-2\beta_3)}$, $\gamma_{31} = \beta_3 - \gamma_{32}$, $\gamma_{32} = \frac{2-6\beta_3+6\beta_3^2}{2-3\beta_3}$, $B_1 = 0$, $B_2 = \frac{(1/2-\beta_3)^2}{1/3-\beta_3+\beta_3^2}$, $B_3 = \frac{1}{12(1/3-\beta_3+\beta_3^2)}$, $a_{1i} = B_i + a_{2i} + a_{3i}$, $i = 1, 2, 3$,

where a_{2i} , a_{3i} and β_3 are parameters and $\beta_3 \neq 1/2, 2/3, 1$. To find the numerical solution of the problem (1) in the following key points apply the method of rolling early.

Weak hypercyclicity of composition operator

MOZHYROVSKA Z. H.

Lviv University of Trade and Economics

zoryana.math@gmail.com

Let X be a Fréchet linear space. A continuous linear operator $T : X \rightarrow X$ is called *hypercyclic* if there is a vector $x_0 \in X$ for which the orbit under T ,

$$\text{Orb}(T, x_0) = \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots\}$$

is dense in X . Every such vector x_0 is called a *hypercyclic vector* of T . If $\text{Orb}(T, x_0)$ is dense in X with respect weak topology, then the operator T is *weakly hypercyclic* and such a vector x_0 is a *weakly hypercyclic vector* for T . The norm topology is strictly stronger than the weak topology, and so every hypercyclic operator is a weakly hypercyclic operator.

In [1] Chan and Sanders show that T is weakly hypercyclic on ℓ_p .

Let X be a Banach space and $H_b(X)$ be a space of analytic functions which are bounded on bounded subspaces. We consider translation operator $T_a : H_b(X) \rightarrow H_b(X)$

$$T_a : f(x) \mapsto f(x + a), \quad x, a \in X, \quad a \neq 0.$$

Since $H_b(X)$ is not separable space then T_a is not hypercyclic.

What can we say about "weakly" version of hypercyclicity?

References

- [1] K.C. Chan and R. Sanders, *A weakly hypercyclic operator that is not norm hypercyclic*, J. Operator Theory **52** (2004), 39–59.

Про коректну розв'язність періодичної крайової задачі для рівняння руху балки з нежорстким закріпленням кінців

Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
tarasgoy@yahoo.com

НЕГРИЧ М.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
negrychmariya@gmail.com

САВКА І.Я.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*
s-i@ukr.net

Нехай $D = (0, T) \times (0, L)$, $T > 0$, $L > 0$, $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q[0, L]$, $q \in \mathbb{R}$, — простір усіх тригонометричних рядів $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{L}$ зі скінченною нормою

$\|\varphi\|_{\mathbf{H}_q} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (1+k)^{2q} |\varphi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; $\mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір усіх рядів вигляду $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{L}$, де $u_k \in \mathbf{C}^n[0, T]$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\|u\|_{\mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{H}_q)}^2 = \sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^{(j)}(t) \sin \frac{k\pi x}{L} \right\|_{\mathbf{H}_q}^2 < \infty.$$

В області D розглядаємо задачу

$$u_{tt}(t, x) + \alpha^2 u_{xxxx}(t, x) + \beta u_{xx}(t, x) + \delta u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, L) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(0, x) - u(T, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) - u_t(T, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

де $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, причому $\beta^2 < 4\alpha^2\delta$ (ця умова забезпечує гіперболічність за Петровським рівняння (1)), φ і ψ — задані функції зі шкали просторів $\{\mathbf{H}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$. Розв'язок $u = u(t, x)$ задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $\mathbf{C}^2([0, T]; \mathbf{H}_q)$.

Коректна розв'язність задачі (1)–(3) залежить від діофантових властивостей послідовності $\{1 - \cos \beta_k T\}_{k \in \mathbb{N}}$, де $\beta_k = \sqrt{\alpha^2 \lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \delta}$, $\lambda_k = \pi k / L$.

Якщо ця послідовність не містить нульових членів, тобто для довільних $(k, m) \in \mathbb{N}^2$

$$\beta_k T \neq 2\pi m,$$

то задача (1)–(3) має єдиний формальний розв’язок, який зображується формулою

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k (\cos \beta_k t - \cos \beta_k (t-T)) \varphi_k + (\sin \beta_k t + \sin \beta_k (t+T)) \psi_k}{2\beta_k (1 - \cos \beta_k T)} \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (4)$$

де φ_k і ψ_k — коефіцієнти Фур’є функцій φ і ψ відповідно, які визначаються формулами

$$\varphi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad \psi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx.$$

Існування розв’язку $u \in \mathbf{C}^2([0, T]; \mathbf{H}_q)$ задачі (1)–(3) пов’язане з проблемою малих знаменників, оскільки члени послідовності $\{1 - \cos \beta_k T\}_{k \in \mathbb{N}}$ у знаменнику формули (4), будучи відмінними від нуля, можуть як завгодно близько наближатися до нуля при $k \rightarrow +\infty$. Це спричиняє розбіжність ряду (4) у просторі $\mathbf{C}^2([0, T]; \mathbf{H}_q)$, тобто нерозв’язність задачі у вказаній шкалі. Якщо вдається оцінити знизу малі знаменники $1 - \cos \beta_k T$ певним виразом зі степенною поведінкою стосовно k , то за відповідних обмежень на функції φ і ψ можна отримати коректну розв’язність задачі.

За допомогою метричного підходу [2] отримано такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність*

$$|1 - \cos \beta_k T| \geq T^2 k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma > 2$.

Теорема 2. *Якщо $\varphi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+4}$ і $\psi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+2}$, де $\gamma > 2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T існує єдиний розв’язок $u \in \mathbf{C}^2([0, T]; \mathbf{H}_q)$ задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функцій φ і ψ .*

Крайові задачі з нелокальними, зокрема, з періодичними умовами за часовою або просторовою координатою для рівняння (1) досліджувались у [1, 3].

Література

- [1] Azizbayov E., Mehraliyev Y., *A time-nonlocal boundary value problem for equation of homogeneous bar motion*, Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, Сер. Математика, механіка, **17** (2012), 20–23.

- [2] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М., *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наук. думка (2002), 416 с.
- [3] Сабитов К. Б., *Колебания балки с заделанными концами*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **19**(2) (2015), 311–324.

Про декомпозицію неперервності, що пов'язана із замкненим графіком

НЕСТЕРЕНКО В.В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
v.nesterenko@chnu.edu.ua

Під декомпозицію неперервності розуміють теореми, в яких неперервність одержується при одночасному виконанні кількох слабших умов. Серед розмаїття таких результатів особливу увагу заслуговують теореми, де однією з умов є замкненість графіка.

У 1970 році П. Лонг і Е. МакГегі в [1] встановили, що кожне майже неперервне відображення $f : X \rightarrow Y$ між топологічним простором X і гаусдорфовим локально компактним простором Y із замкненим графіком є неперервним. Цей результат узагальнювали для різних топологічних просторів багато математиків (див. [2]–[4]).

Іншу декомпозиційну теорему встановив Й. Добош в [5]: кожна двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Результат Й. Добоша Я.Борсік в [6] переніс на випадок загальних топологічних просторів увівши поняття B -квазінеперервності, яке є узагальненням двосторонньої квазінеперервності дійсних функцій.

Теорема 1 (Я.Борсік, [6]). *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – локально компактний гаусдорфовий топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно B -квазінеперервне і має замкнений графік.*

Слід зауважити, що поняття майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності (B -квазінеперервності) не порівняльні між собою.

В цьому повідомленні подано результати, які для деяких типів просторів охоплюють згадані вище теореми про декомпозицію неперервності за участю майже неперервності чи двосторонньої квазінеперервності.

Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \rightarrow Y$:

- називається *майже неперервним в точці $x \in X$* , якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X , така, що $x \in \text{int} \bar{A}$ і $f(A) \subseteq V$;

- називається *B-квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y і довільної області O в X , такої, що $x \in \overline{O}$ існує відкрита непорожня множина G в X , така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$;
- має *слабку властивість Гібсона*, якщо $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$ для довільної області (відкритої та зв'язної множини) O в X .

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *майже неперервним* чи *B-квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Використовуючи декомпозицію B-квазінеперервності з [7] теорему 1 можна записати так.

Теорема 2. *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – локально компактний гаусдорфовий топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне та має слабку властивість Гібсона і замкнений графік.*

Насправді, умову квазінеперервності в теоремі 2 можна не вимагати.

Теорема 3. *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – локально компактний гаусдорфовий топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно має слабку властивість Гібсона і замкнений графік.*

Теорема 3 узагальнює вище перераховані результати для певних типів просторів.

Література

- [1] P. Long, E. McGehee, *Properties of almost continuous functions*, Proc. Am. Math. Soc., **24** (1970), 175–180.
- [2] A. Berner, *Almost continuous functions with closed graphs*, Can. Math. Bull., **25** (1982), 428–434.
- [3] L. Holaá, *Almost continuous functions with closed graphs*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., **14** (1987), 329–333.
- [4] D. Rose, *On Levine's decomposition of continuity*, Canad. Math. Bull., **21** (1978), 477–481.
- [5] J. Doboš, *Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity*, Tatra Mt. Math. Publ., **2** (1993), 77–80.
- [6] J. Borsik, *Bilateral quasicontinuity in topological spaces*, Tatra Mt. Math. Publ., **28** (2004), 159–168.
- [7] В.В. Нестеренко, *Нові характеристики деяких ослаблень неперервності*, Бук. мат. ж., **1** (2013), 106–113.

Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого L -індексу

БАНДУРА А. І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
andriykopanytsia@gmail.com

ПЕТРЕЧКО Н. В.

Львівський національний університет імені І. Франка
petrechko.n@gmail.com

СКАСКІВ О. Б.

Львівський національний університет імені І. Франка
olskask@gmail.com

У доповіді наведено аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, а також одна властивість розвинення таких функцій у степеневий ряд. Основні позначення та означення див. у [1] та [2]. Нами отримано такі два результати:

Теорема 1. Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. Аналітична функція F у $\mathbb{D}^2$ є обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, якщо існують $p \in \mathbb{Z}_+$ і $c \in \mathbb{R}_+$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{D}^2$ виконується нерівність

$$\max \left\{ \frac{|F^{(j_1, j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)} : j_1 + j_2 = p + 1 \right\} \leq c \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} : k_1 + k_2 \leq p \right\}.$$

Теорема 2. Нехай $\beta > 1$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. Аналітична функція F у $\mathbb{D}^2$ є обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, якщо існують $c \in (0; +\infty)$ і $N \in \mathbb{N}$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{D}^2$ виконується нерівність:

$$\sum_{k_1+k_2=0}^N \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z)|}{k_1!k_2!l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} \geq c \sum_{k_1+k_2=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z)|}{k_1!k_2!l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)}.$$

Література

- [1] A. I. Bandura, N. V. Petrechko, O. B. Skaskiv, *Analytic functions in a bidisc of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables*, <https://arxiv.org/abs/1609.04190>
- [2] A. I. Bandura, N. V. Petrechko, O. B. Skaskiv, *Analytic in a polydisc functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint and separate variables*, Mat. Stud. **46** (2016), no. 1, (accepted for publication).

Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces

PRYIMAK H.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
phm90@ukr.net

The problem of description of the spectrum of $H_b(X)$ was first studied in [1] by R. Aron, B. Cole and T. Gamelin. Later homomorphisms of $H_b(X)$ and related topics were studied in [2],[6],[7],[3] by D.Carando, D.Garcia, M. Maestre, A. Zagorodnyuk, O. Lopushansky and others.

Using known results we are working with of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces $H_b(A \otimes_\pi X)$. In particular, in this talk we give a new of definition the convolution product of operators and prove a theorem about representation of A -valued homomorphism on $H_b(A \otimes_\pi X)$.

Let A be a commutative Banach algebra, X be a Banach space over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, $A \otimes_\pi X$ be the complete projective tensor product of A and X . Every element of $A \otimes_\pi X$ can be represented by the form $\bar{a} = \sum_k a_k \otimes_\pi x_k$, where $a_k \in A$, $x_k \in X$. For every $\bar{a} \in A \otimes_\pi X$ and $f \in H_b(X)$ let us define $\bar{f}(\bar{a})$ the “value” of f at $\bar{a}$ in the means of functional calculus for analytic functions on a Banach spaces ([4]). Then $\tilde{\bar{f}}$ is the Aron-Berner extension of $\bar{f}$.

Let us denote by $\mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A)$ the space of all continuous n -linear operators on $H_b(A \otimes_\pi X)$ to A and let $M_A(H_b(A \otimes_\pi X))$ be the set of all homomorphisms on $H_b(A \otimes_\pi X)$ to A .

For each fixed element $\bar{a} \in A \otimes_\pi X$, we define the translation operator $\tau_{\bar{a}}$ on $H_b(A \otimes_\pi X)$ by $(\tau_{\bar{a}}\bar{f})(\bar{z}) = \bar{f}(\bar{a} + \bar{z})$, $\bar{z} \in A \otimes_\pi X$, $\bar{f} \in H_b(A \otimes_\pi X)$.

Let $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}$ be multiplicative operators, that is, $\bar{\Phi}, \bar{\Theta} \in M_A(H_b(A \otimes_\pi X))$. Let us suppose that $\bar{\Phi}$ satisfies the following condition: $\bar{\Phi}(P) = \lim_\alpha P(\bar{x}_\alpha)$ for every P on $A \otimes_\pi X$, where $(\bar{x}_\alpha)$ are nets in $A \otimes_\pi X$. So we have the subset

$$\Omega = \{\bar{\Phi} \in M_A(H_b(A \otimes_\pi X)) : \exists (\bar{x}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X \quad \forall P \in \mathcal{P}(A \otimes_\pi X)$$

such that $\lim_{\alpha} P(\overline{x_{\alpha}}) = \overline{\Phi(P)}\}.$

Definition 1. For fixed $\Phi, \Theta \in \mathcal{L}(H_b(A \otimes_{\pi} X), A)$ the convolution product $\Phi * \Theta$ in $H_b(A \otimes_{\pi} X)$ is defined to be

$$(\Phi * \Theta)(\overline{f}) = \Phi(\Theta(\tau_{\overline{a}} \overline{f})).$$

Theorem 2. There exists a sequence of dual Banach spaces $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ and a sequence of maps

$$\theta_{\overline{a}}^{(n)} : Z_n \rightarrow \Omega$$

such that

$$Z_1 = (A \otimes_{\pi} X)'', \quad Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \otimes_{\pi} X), A), \quad \theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}}''$$

and such that an arbitrary homomorphism $\overline{\Phi} \in \Omega$ has a representation

$$\overline{\Phi} = \bigstar_{n=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(n)}(u_n)$$

for some $u_n \in Z_n, n = 1, 2, \dots$

The detailed description and the proof are provided in article [9].

References

- [1] R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51 - 93.
- [2] D. Carando, D. Garcia and M. Maestre, Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type, *Adv. Math.*, **197**(2) (2005), 607 - 629.
- [3] O. Lopushansky, A. Zagorodnyuk, Representing measures and infinite-dimensional holomorphy, *J. Math. Anal. Appl.*, **333** (2007), 614 - 625. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.035>
- [4] S. Dineen, R. Hart, C. Taylor, Spectra of tensor product elements III : holomorphic properties, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, **103**(1) (2003), 61 - 92.
- [5] H.M. Pryimak, Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces, *Carpathian Math. Publ.*, **7**(1) (2015), 108 - 113. <http://dx.doi.org/10.15330/cmp.7.1.108-113>
- [6] A.V. Zagorodnyuk, Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), 2559 - 2569. <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08260-8>

- [7] A.V. Zagorodnyuk, Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces, *Contemp. Math.*, **435** (2007), 381 - 394.
- [8] A.V. Zagorodnyuk, H.M. Petriv, Homomorphisms of algebras of entire functions of bounded type on a Banach space, *Appl. Probl. Mech. Math.*, **11** (2013), 7 - 11.
- [9] H.M. Pryimak, Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces, *International Journal of Mathematical Analysis*, **10**(14) (2016), 669 - 676. <http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2016.6459>

Про зліченну кратність функцій першого класу Бера з властивістю Дарбу

САФОНОВ В.М.

Національний університет харчових технологій, Київ
safonov_v_m@ukr.net

Відома теорема [1] стверджує, що кожне зліченнократне неперервне відображення двох многовидів однакової вимірності має щільну множину точок локального гомеоморфізму. Більш того, зліченну кратність відображення можна припустити лише для точок деякої підмножини скрізь другої категорії в образі [2]. Виявляється, що в одновимірному випадку твердження теореми залишається справедливим для функцій першого класу Бера з властивістю Дарбу.

Теорема 1. *Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ніде не стала функція першого класу Бера з властивістю Дарбу, що має множину злічених рівнів E скрізь другої категорії. Тоді існує відкрита щільна множина $G = \bigcup_i G_i \subset [a, b]$, в кожній компоненті G_i якої функція f строго монотонна і неперервна.*

Література

- [1] Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 70. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — 539 с.
- [2] Трохимчук Ю.Ю., Сафонов В.М. О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 4-5. — С. 526–531.

Про точки локального гомеоморфізму зліченнократних B -вимірних відображень

САФОНОВА О.В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
olechkadeadin@ukr.net

Зліченнократним відображенням присвячена низка робіт. Результати, отримані у роботах [1]–[3], послужили відправним пунктом для подальшого проникнення у тематику, пов'язану з дослідженнями зліченнократних відображень. У даній замітці розглядаються зліченнократні B -вимірні відображення повних сепарабельних нульвимірних незліченних просторів. Основними результатами дослідження є такі твердження.

Теорема 1. *Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ — нульвимірна ніде не компактна G_δ -множина і $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ — зліченнократне B -вимірне відображення. Тоді існують множина першої категорії $D \subset A$ та послідовність G_δ -множин (A_j) такі, що $A \setminus D = \bigcup_j A_j$ і звуження відображення $f|_{A_j}$ на кожну множину A_j є гомеоморфізмом.*

Теорема 2. *При зліченнократному B -вимірному відображенні f повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору X існує множина першої категорії $D \subset X$ така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f|_{X \setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ скрізь щільна в $X \setminus D$.*

Література

- [1] Александров П.С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
- [2] Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 360 с.
- [3] Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 70. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — 539 с.

Наближення класів інтегралів Пуассона інтерполяційними тригонометричними поліномами

СЕРДЮК А. С.

Інститут математики НАН України, Київ
serdyuk@imath.kiev.ua

СОКОЛЕНКО І. В.

Інститут математики НАН України, Київ
sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Нехай, далі, $C_{\bar{\beta},p}^q$, $1 \leq p \leq \infty$, — множина всіх 2π -періодичних функцій f , які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{\bar{\beta}}^q(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0,$$

$$B_p^0 = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1\},$$

із твірним ядром

$$P_{\bar{\beta}}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),$$

де $q \in (0, 1)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, — довільна послідовність дійсних чисел. При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, класи $C_{\bar{\beta},p}^q$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C_{\beta,p}^q$.

Нехай $f(x)$ — довільна 2π -періодична неперервна функція. Через $\tilde{S}_n(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n , що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_n(f; x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$\mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n; x) = \sup_{f \in C_{\bar{\beta},2}^q} |f(x) - \tilde{S}_n(f; x)|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0, 1)$, $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(C_{\bar{\beta}, 2}^q; \tilde{S}_n; x) = \left| \sin \frac{(2n+1)x}{2} \right| \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} \times \\ \times \left(\frac{1 + q^{2(2n+1)}}{1 - 2q^{2(2n+1)} \cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)}} \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Approximations by Fourier sums of generalized Poisson integrals in integral metrics

SERDYUK A.S.

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine
sanatolii@ukr.net

STEPANIUK T.A.

Graz University of Technology, Graz, Austria
tania_stepaniuk@ukr.net

Denote by $C_{\beta, 1}^{\alpha, r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, the set of all 2π -periodic functions, representable for all $x \in \mathbb{R}$ as convolutions of the form (see, e.g., [1])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha, r, \beta}(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_1 \leq 1, \quad \varphi \perp 1, \quad (1)$$

with generalized Poisson kernels of the form

$$P_{\alpha, r, \beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Functions f of the form (1) are called generalized Poisson integrals of the functions φ .

We consider the approximative characteristics of the form

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, 1}^{\alpha, r})_s = \sup_{f \in C_{\beta, 1}^{\alpha, r}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_s, \quad r > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

where $S_{n-1}(f; \cdot)$ are the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f .

In present paper we solve the problem about finding asymptotically unimprovable estimates of given quantities for $r \in (0, 1)$.

For arbitrary fixed $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$ and $1 \leq p \leq \infty$ we denote by $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$ the smallest integer n such that

$$\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \leq \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3} \cdot \frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases}$$

where $\chi(p) = p$ for $1 \leq p < \infty$ and $\chi(p) = 1$ for $p = \infty$.

Also for arbitrary $v > 0$ and $1 \leq s \leq \infty$ assume

$$J_s(v) := \left\| \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right\|_{L_s[0, v]},$$

where

$$\|f\|_{L_s[a, b]} = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}, & 1 \leq s < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in [a, b]} |f(t)|, & s = \infty. \end{cases}$$

With the notations introduced above, the following statement takes place.

Theorem 1. *Let $0 < r < 1$, $1 \leq s \leq \infty$, $\alpha > 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$. Then for $n \geq n_0(\alpha, r, s')$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, the following estimate is true*

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, 1}^{\alpha, r})_s = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{s'}} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+\frac{1}{s}} (\alpha r)^{\frac{1}{s'}}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \gamma_{n, s} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{s'}}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{\frac{1-r}{s'}}} \right) \right)$$

where the quantity $\gamma_{n, s} = \gamma_{n, s}(\alpha, r, \beta)$ is such that $|\gamma_{n, s}| \leq (14\pi)^2$.

References

- [1] A.I. Stepanets, *Methods of Approximation Theory*, VSP: Leiden, Boston (2005).

Entire Dirichlet series and h -measure of exceptional sets

SKASKIV O. B.

Ivan Franko National University of Lviv

olskask@gmail.com

SALO T. M.

National University "Lviv Polytechnic"

tetyan.salo@gmail.com

Let $D(\Lambda)$ be the class of entire Dirichlet series of the form $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ ($1 \leq n \rightarrow +\infty$). For $F \in D(\Lambda)$ and $x \in \mathbb{R}$ we denote $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $m(x, F) = \inf\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$.

It is known [1] that for every entire function $F \in D(\Lambda)$ the relations

$$M(x, F) \sim \mu(x, F), \quad M(x, F) \sim m(x, F) \quad (1)$$

hold as $x \rightarrow +\infty$ outside some exceptional set E of finite Lebesgue measure, if and only if $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty$. In [2] it is proved that the *finiteness* of Lebesgue measure of an exceptional set E is the sharp estimate in the class $D(\Lambda)$.

Let Φ be positive increasing to $+\infty$ on $[0; +\infty)$ continuous function, φ be the inverse function to function Φ and h be a positive a differentiable function h such that $h'(x)$ is non-decreasing to $+\infty$ on $[0; +\infty)$. Denote

$$D(\Lambda, \Phi) = \{F \in D(\Lambda) : (\exists C > 0)[\ln \mu(x, F) \geq Cx\Phi(x) \ (x > x_0)]\}.$$

Theorem 1 ([3]). *If*

$$(\forall b > 0) : \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} h' \left(\varphi(b\lambda_k) + \frac{b}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) < +\infty, \quad (2)$$

then for every $F \in D(\Lambda, \Phi)$ relation (1) holds as $x \rightarrow +\infty$ outside some set E of finite h -measure $(\int_E dh(x) < +\infty)$ uniformly in $y \in \mathbb{R}$.

In the case $\Phi(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) it is true the following criterion.

Theorem 2 ([3]). *In order that for every function $F \in D(\Lambda, x^\alpha)$ the relations (1) hold as $x \rightarrow +\infty$ outside some set E of finite h -measure it is necessary and sufficient*

$$(\forall b > 0) : \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} h' \left(b(\lambda_k)^{1/\alpha} + \frac{b}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) < +\infty.$$

References

- [1] O.B. Skaskiv, *Maximum of the modulus and maximal term of an integral Dirichlet series*, Dop. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A, No.11 (1984), 22–24. (in Ukrainian)
- [2] T.M. Salo, O.B. Skaskiv, O.M. Trakalo, *On the best possible description of exceptional set in Wiman–Valiron theory for entire functions*, Mat. Stud., **16** (2001) No.2, 131–140.
- [3] T.M. Salo, O.B. Skaskiv, *The minimum modulus of gap power series and h -measure of exceptional sets*, arXiv: 1512.05557v1 [math.CV] 17 Dec 2015, 13 p.

Ультразрозподіли Жевре від генераторів (C_0) -напівгруп операторів на банахових просторах

СОЛОМКО А. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
ansolvas@gmail.com

Розглядаємо $G'_+ := G'(\mathbb{R}_+^n)$ підпростір в G' ультразрозподілів Жевре з носіями в конусі $\mathbb{R}_+^n$ (див. [1]). Якщо позначити через $G'_+^\perp$ ортогональне доповнення простору G'_+ , то функціональний простір $G_+ := G/G'_+^\perp = \{\psi : \psi = \varphi + G'_+^\perp, \varphi \in G\}$ є спряженим до G'_+ , де $G := G(\mathbb{R}^n)$ – простір ультрадиференційовних функцій Жевре.

Зауважимо, що фактор-простір G_+ є топологічною алгеброю, і виконується ізоморфізм $G_+ \cong \Theta(G)$, де Θ – характеристична функція конуса $\mathbb{R}_+^n$. В такому випадку двоїстість $\langle G', G \rangle$ породжує нову двоїстість $\langle G'_+, G_+ \rangle$.

Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – банаховий простір. Для фіксованого числа $\aleph > 1$ і кожного вектора $\nu \succ 0$ визначаємо простори

$$G_\nu(\mathbb{R}_+^n, E) = \left\{ x : \text{supp } x \subset \mathbb{R}_+^n, \quad \|x\|_{G_\nu(\mathbb{R}_+^n, E)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+^n} \frac{\|\partial^k x(\tau)\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\}$$

E -значних ультрадиференційовних функцій $x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}_+^n$. На просторі $G_+(E) := G(\mathbb{R}_+^n, E) = \bigcup_{\nu \succ 0} G_\nu(\mathbb{R}_+^n, E)$ вводимо топологію індуктивної границі.

Розглядаємо $S_t : \mathbb{R}_+^n \ni (t_1, \dots, t_n) \longrightarrow e^{-itA} := e^{-it(A_1, \dots, A_n)} \in L[E]$ n -параметричну (C_0) -напівгрупу операторів з генератором $-iA$, де $A = (A_1, \dots, A_n)$. Визначимо підпростір $\hat{G}_A$ в банаховому просторі E виду

$$\hat{G}_A = \left\{ \hat{x}_A : x \in G_+(E) \right\}, \quad \hat{x}_A = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(e^{-itA} \otimes I_+ \right) x(t) dt,$$

де I_+ – одиничний оператор в $L[G_+]$. Крім того, введемо відображення F_A , яке визначається відношенням

$$F_A : G_+(E) \ni x \longrightarrow \hat{x}_A \in \hat{G}_A.$$

Теорема 1. Нехай $\mathbb{R}_+^n \ni t \longrightarrow e^{-itA} \in L[E]$ – n -параметрична (C_0) -напівгрупа операторів. Відображення

$$\Phi : G'_+ \ni f \longrightarrow \hat{f}(A) \in L[\hat{G}_A],$$

де лінійний оператор $\hat{f}(A)$ визначається співвідношенням

$$\hat{f}(A) : \hat{G}_A \ni \hat{x}_A \longrightarrow \hat{f}(A)\hat{x}_A = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(e^{-itA} \otimes T_f \right) x(t) dt,$$

є неперервним гомоморфізмом згорткової алгебри ультрарозподілів Жевре на замкнену підалгебру алгебри $L[\hat{G}_A]$ виду $\{[\widehat{I_E \otimes U_s}]^c : s \in \mathbb{R}_+^n\}$, $[\widehat{I_E \otimes U_s}]^c = F_A \circ (I_E \otimes [U_s]^c) \circ F_A^{-1}$, де $[U_s]^c$ є комутантом напівгрупи зсувів $\{U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$ вздовж конуса $\mathbb{R}_+^n$, T_f – операція крос-кореляції [2].

Зауважимо, що побудоване представлення алгебри ультрарозподілів Жевре використане в [2] для розв'язання проблеми зображення узагальнених похідних та степенів функції Дірака від генераторів напівгруп дробового диференціювання та дробового інтегрування.

Література

- [1] H. Komatsu. *Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math, **20** (1973), 25–105.
- [2] A. Solomko. *Operator calculus for Gevrey ultradistributions and its applications*, Information Technology in Selected Areas of Management. AGH University of Science and Technology Press. Krakow, 2016, 135–143.

Узагальнено опуклі множини та функції

СТЕФАНЧУК М. В.

Інститут математики НАН України

stefanmv43@gmail.com

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m -опуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ знайдеться m -вимірна площа L , яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$. m -опуклий перетин всіх m -опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m -опуклою оболонкою множини E .

Задача про тінь: яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (це еквівалентне тому, що центр сфери належить 1-опуклій оболонці цих куль).

Теорема 1. [2]. Для того, щоб центр $(n - 1)$ -сфери в n -вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n + 1)$ -ї кулі.

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m -півопуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, знайдеться m -вимірна півплощина L , яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$. m -півопуклий перетин всіх m -півопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m -півопуклою оболонкою множини E .

Теорема 2. [2]. Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-півопуклій оболонці сім'ї неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.

Теорема 3. [2]. Для того, щоб центр двовимірної сфери у тривимірному евклідовому просторі належав 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.

Теорема 4. [3]. Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.

Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$) називається m -комплексно (m -гіперкомплексно) опуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ ($x \in \mathbb{H}^n \setminus E$), якщо знайдеться m -вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L , яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$.

Теорема 5. [3]. Для того, щоб центр сфери в n -вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n$ ($4n - 2$) куль.

Гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається $\mathbb{H}$ -квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \cap E) = 0$.

Теорема 6. [4]. Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$ -квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$ -квазіопуклим компактом.

Багатозначна функція $f: E_f \rightarrow \mathbb{H}$ називається лінійно опуклою, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція l , така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \cap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$.

Функцією, спряженою з f , називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H} \setminus \bigcup_x (\langle x, y \rangle - f(x)). \quad (1)$$

Теорема 7. [5]. Нехай багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ така, що $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тоді $f^{**} = f$ тоді і тільки тоді, коли f є лінійно опуклою.

Література

- [1] Зелинский Ю. Б. Задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Доп. НАН України. — 2015. — № 5. — С. 15 – 20.
- [2] Зелинский Ю. Б. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 12. — С. 1658 – 1666.
- [3] Зелінський Ю. Б. Узагальнення задачі про тінь / Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 6. — С. 757 – 762.
- [4] Стефанчук М. В. Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук // Доп. НАН України. — 2016. — № 4. — С. 13 – 19.

- [5] Стефанчук М. В. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 225 – 235.

Граничні трійки для інтегральних систем на скінченному інтервалі

СТРЕЛЬНИКОВ Д. І.

Донецький національний університет ім. Василя Стуса

d.strelnikov@donnu.edu.ua

Розглянемо на скінченному відрізку $[0, l]$ інтегральну систему

$$\vec{f}(x) = \vec{a} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & dP \\ dQ & 0 \end{pmatrix} \vec{f}(t) dt, \quad (1)$$

де $\vec{f}$ – комплекснозначна вектор-функція, $\vec{a} \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, P , Q і W – неспадні скінченні на $[0, l]$ неперервні зліва функції. Частинними випадками (при відповідному виборі функцій P , Q і W) системи (1) є рівняння Штурма-Ліувілля, струни Стілтєса та струни Крейна [2] тощо.

У доповіді будуть розглянуті в гільбертовому просторі $L^2(dW, [0, l])$ максимальне та мінімальне лінійні відношення, що пов'язані з системою (1).

Означення 1. Будемо казати, що пара $\{f, g\}$ функцій з простору $L^2(dW, [0, l])$ належить лінійному відношенню $T_{\max}$, якщо існує функція $f^{[1]} \in BV[0, l]$ така, що в кожній точці $[0, l]$ виконується рівність

$$\begin{pmatrix} f \\ f^{[1]} \end{pmatrix} \Big|_0^x = \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & dP \\ dQ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f^{[1]}(t) \end{pmatrix} dt - \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dW & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Теорема 2. Для будь-яких пар $\{f, g\}$ і $\{u, v\}$, що належать лінійному відношенню $T_{\max}$, справедлива узагальнена тотожність Гріна

$$\int_0^l (g\bar{u} - f\bar{v})dW = (\Gamma_1\{f, g\}, \Gamma_0\{u, v\}) - (\Gamma_0\{f, g\}, \Gamma_1\{u, v\}), \quad \text{де}$$

$$\Gamma_0\{f, g\} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(l) \end{pmatrix} \quad \Gamma_1\{f, g\} = \begin{pmatrix} f^{[1]}(0) \\ -f^{[1]}(l) \end{pmatrix}.$$

Лінійне відношення $T_{\min}$, що є спряженим до $T_{\max}$, отримується накладанням додаткових умов $f(0) = f^{[1]}(0) = f(l) = f^{[1]}(l)$. Знайдено опис усіх самоспряжених розширень лінійного відношення $T_{\min}$ та описано спектр цих розширень. Для цього використовується техніка граничних трійок і функцій Вейля з роботи [1].

Література

- [1] Derkach V. A., Malamud M. M., J. Math. Sciences, **73** (1995), 141–242.
[2] Кац И. С., Крейн М. Г. Дополнение 2 к книге Ф. Аткинсон *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, М. «Мир», (1968), 648–733.

Про симетричні $*$ -поліноми на просторі $\mathbb{C}^n$

СТРУТИНСЬКИЙ М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
strutinski1991@gmail.com

Основна теорема про симетричні поліноми від скінченної кількості змінних стверджує, що кожен такий поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних поліномів. Природним узагальненням поліномів від комплексних змінних є $*$ -поліноми.

Відображення $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ вигляду

$$P((z_1, \dots, z_n)) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \sum_{l_1, \dots, l_n=0}^N a_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \bar{z}_1^{l_1} \dots \bar{z}_n^{l_n},$$

де $N \in \mathbb{N}$, $a_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} \in \mathbb{C}$, називають $*$ -поліномом.

$*$ -Поліном P називають симетричним, якщо

$$P((z_1, \dots, z_n)) = P((z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}))$$

для всіх $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ і для всіх перестановок σ на множині $\{1, \dots, n\}$.

У доповіді буде розглянуто питання опису спектра алгебри всіх симетричних $*$ -поліномів на просторі $\mathbb{C}^n$.

Задача про тінь для областей на площині та у тривимірному просторі

Ткачук М. В.

Інститут математики НАН України

max@imath.kiev.ua

Осипчук Т. М.

Інститут математики НАН України

otm82@mail.ru

Скажемо, що набір куль у просторі $\mathbb{R}^n$ створює тінь у деякій точці цього простору, якщо довільна пряма, що проходить через дану точку, перетне хоча б одну з куль.

Задача 1. *Нехай задано довільну область у просторі $\mathbb{R}^n$ та довільну фіксовану точку у ній. Знайти число замкнених (відкритих) куль з центрами на межі області, які не перетинаються і не містять задану точку, достатнє для того, щоб створити у ній тінь.*

У роботі [9] задача розв'язана для областей при $n = 2, 3$. Для довільної області на площині, два круги є мінімальним числом. Для довільної області у тривимірному просторі, достатньо чотири кулі. Це число не є мінімальним, оскільки існують області і точки в них, для яких мінімальна кількість три кулі (див. [7], [8]).

Існує багато узагальнень цієї задачі. З деякими з них можна ознайомитись із нижче наведеної літератури. Найпершу із подібних задач було поставлено Г. Худайбергановим у 1982 р. і вона полягала у тому, щоб знайти мінімальне число замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} , які попарно неперетинаються, не містять центр сфери, з радіусами меншими радіуса сфери і такі, що створюють тінь в центрі сфери. Ця задача була розв'язана Г. Худайбергановим для випадку $n = 2$: було показано, що для кола на площині достатньо двох куль. В [3] Ю. Зелінський разом зі своїми учнями довів, що для $n = 3$ трьох куль не достатньо, але чотири кулі вже будуть створювати тінь для центру сфери, а для загального випадку необхідно і достатньо $n + 1$ куль.

Для розв'язання задачі 1, у випадку при $n = 2, 3$, використовуються результати задачі зі сферою.

Література

- [1] Зелинский Ю.Б. *Многозначные отображения в анализе*. — Киев: Наукова думка, 1993. — 264 с.
- [2] Зелинский Ю.Б. *Выпуклость. Избранные главы. Праці Інституту математики НАНУ*. — Київ: Інститут математики НАНУ. — 2012. — **92**. — 280 с.
- [3] Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени* // Укр. мат. журн. — 2015. — Т.67, №12. — С. 1658–1666.
- [4] Зелинский Ю. Б. *Обобщённо выпуклые оболочки множеств и задача о тени* // Укр. мат. вісник — 2015. — Т.12, № 2. — С. 278–289
- [5] Зелінський Ю. Б., М.В. Стефанчук *Узагальнення задачі про тінь* // Укр. мат. журн. — 2016. — Т.68, № 6. — С. 757–762.
- [6] Зелинский Ю. Б. *Задача о тени для семейства множеств* // 36. праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — Т.12, № 3. — С. 197–204.
- [7] Ткачук М.В., Осіпчук Т.М. *Задача о тени для эллипсоида вращения* // 36. праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — Т.12, № 4. — С. 246–253.
- [8] М. Tkachuk, Т. Osipchuk *On the shadow problem and its generalizations to ellipsoids*, arXiv preprint arXiv:1501.06747, 2015.
- [9] Т. Osipchuk *On the shadow problem for domains in the Euclidean spaces*, arXiv preprint arXiv:1602.01300, 2016.
- [10] Худайберганов Г. *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* // Рукопись деп. в ВИНТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

Теорема про середнє для розв’язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

ТРОФИМЕНКО О. Д.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
odtrofimenko@gmail.com

В роботі дано опис нескінченно диференційовних функцій $f(z)$, визначених у крузі $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ($R > 0$), які для заданих чисел $r \in (0, R)$, $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ та $s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s < m$, задовольняють співвідношення

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s} \bar{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta-z| \leq r} f(\zeta) (\zeta-z)^s d\xi d\eta, \quad (1)$$

при всіх $z \in B_{R-r}$, де $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ ($x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця). З цього опису випливає, що довільний розв'язок рівняння

$$\partial^{m-s} \bar{\partial}^m f = 0$$

задовольняє умову (1) при кожному $r \in (0, R)$.

Література

- [1] Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, М.: Изд-во иностр. лит., (1958), 159 с.
- [2] А. В. Покровский, *Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными*, Мат. заметки, **64** (2) (1998), 260–272.
- [3] О. Д. Трофименко, *Two-radii theorem for solutions of some mean value equations*, Мат. студії, **40** (2) (2013), 137–143.
- [4] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, (2003), 454 p.
- [5] L. Zalcman, *Mean values and differential equations*, Israel J.Math., **14** (1973), 339–352.

Оцінки ортопроекційних поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК О. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,

Луцьк

fedunyk@ukr.net

Досліджуються класи $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних, які розглянуті в [1] і є аналогами відомих класів Бесова. Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{(\log \frac{1}{t_j})_{+}^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, \ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут розглядаються логарифми за основою 2, крім того $(\log \frac{1}{t_j})_+ = \max \{1, \log \frac{1}{t_j}\}$. Вважаємо також, що $b_j < r$, $j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$.

Це означає, що для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2] (позначаємо (S) і (S_l)).

Нехай $L_q(\pi_d)$ – простір 2π -періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$ – ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників $d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$, які визначаються наступним чином

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_q. \quad (2)$$

Сформулюємо один із одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1). Тоді при $0 < r < l$ має місце співвідношення*

$$d_M^\perp(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_q) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Цей результат для класів $B_{\infty,\theta}^r$ одержаний А.С. Романюком [3], а для класів H_∞^Ω – М.М. Пустовойтовим [4].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами p та q .

Література

- [1] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.
- [2] Н.К.Бари, С.Б.Стєчкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.
- [3] А.С.Романюк, *Поперечники и наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных*, Anal. Math., **37** (2011), 181–213.
- [4] Н.Н.Пустовойтов, *Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержат как степенные, так и логарифмические множители*, Anal. Math., **34** (2008), 187–224.

Базиси в алгебрах симетричних аналітичних функцій на банахових просторах

ЧЕРНЕГА І. В.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

icherneha@ukr.net

Під симетричною функцією на просторі ℓ_1 ми розуміємо функцію, яка є інваріантною відносно дії довільних перестановок послідовностей в ℓ_1 . Через $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ будемо позначати алгебру симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1 . Спектр алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ досліджувався в [1, 2].

У доповіді продовжується дослідження алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. Зокрема, ми зацікавлені в питанні про існування безумовного базису у даній алгебрі.

Література

- [1] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **54** (2011), 1–17.
- [2] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*, J. Math. Anal. Appl., **395** (2012), 569–577.

Властивості перетворення Фур'є поліноміальних основних та узагальнених функцій

СКІДАНЮК О. С.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ШАРИН С. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

sharyn.sergii@gmail.com

Подібно до того, як це зроблено у статті [1], ми вводимо поліноміальні швидко спадні функції та поліноміальні розподіли повільного росту та узагальнюємо перетворення Фур'є на ці простори.

Для поліноміального перетворення Фур'є доведено ряд властивостей, частина з яких є узагальненням класичних формул, інша частина — принципово нові властивості, що відсутні у лінійному випадку.

Література

- [1] Шарин С.В. *Перетворення Фур'є в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту* // Математичний вісник НТШ. – Т 9. – 2012. – С. 366–374.

Найкращі M -членні тригонометричні наближення узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі

ШВАЙ К. В.

Інститут математики НАН України, Київ
kate.shvai@gmail.com

Розглянемо простір $L_q(\pi_d)$, $1 \leq q < \infty$, 2π -періодичних за кожною змінною функцій f зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

де $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, а $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$.

Для періодичних функцій багатьох змінних D_β^ψ [1], ряди Фур'є яких мають вигляд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \psi_j(|k_j|) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j} e^{i(k, x)},$$

вивчається поведінка їх найкращих M -членних тригонометричних наближень.

Означення 1. Найкращим M -членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q < \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — система векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ із цілочисельними координатами, а c_j , $j = \overline{1, M}$, — довільні комплексні числа.

Через D позначимо множину функцій натурального аргументу $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, d}$, які задовольняють умови:

- 1) $\psi_j(\cdot), j = \overline{1, d}$, — додатні та незростаючі;
- 2) $\forall j = \overline{1, d} \exists M_j > 0$ такі, що $\forall l \in \mathbb{N} \frac{\psi_j(l)}{\psi_j(2l)} \leq M_j$.

Для величин A та B під записом $A \ll B$ будемо розуміти, що існує стала $C_1 > 0$ така, що $A \leq C_1 B$. Якщо $A \ll B$ і $B \ll A$, то будемо позначати $A \asymp B$.

Теорема 2. *Нехай $2 \leq q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{1+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n , що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{2}} \ll e_M \left(D_{\beta}^{\psi} \right)_q \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{де } \Phi(n) = \min_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}), \Psi(n) = \max_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}), (s, 1) = (s_1 + \dots + s_d).$$

Також встановлено порядкові оцінки величин $e_M \left(L_{\beta,1}^{\psi} \right)_q$, $2 \leq q < \infty$, для класу (ψ, β) -диференційованих періодичних функцій багатьох змінних $L_{\beta,1}^{\psi}$ (див. означення, наприклад, [2]). Зазначимо, що кожну із $f \in L_{\beta,1}^{\psi}$ можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = \left(\varphi * D_{\beta}^{\psi} \right)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(x-t) D_{\beta}^{\psi}(t) dt,$$

де $\|\varphi\|_1 \leq 1$ і функція φ майже всюди співпадає із (ψ, β) -похідною функції f .

Література

- [1] А. С. Романюк, *Приближение периодических функций в метрике L_q* , Приближение периодических функций в метрике пространства L_p , Киев, (1987), 42–59. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47).
- [2] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных*, Укр. мат. журн., **44** (5) (1992), 662–672.

Іменний покажчик авторів

- Антонова Т. М. , 51
Арясова О. В., 14
Аюбова Н. С., 15
Баєв А. В., 16
Бандура А. І., 114
Басюк Ю. В., 53
Базилевич І. Б. , 16
Біланік І. Б., 54
Білінський А. Я., 18, 35
Боднар Д. І., 54
Болдирєва В. О., 21
Буртняк І. В., 101
Цвігун В. Л., 98
Чернега І. В., 133
Чорний Р. О., 50
Дакхіл Х. К., 59
Деркач В. О., 76
Дирів М. М., 83
Дмитришин М. І., 77
Дмитришин Р. І., 76
Добушовський М. С., 78
Дрозденко В. О., 30
Дворак І.Я., 79
Фаворов С.Ю., 13
Федуник-Яремчук О. В., 131
Фотій О.Г., 103
Гаєвський М.В., 85
Галушак С. І., 63
Герасименко В.І., 63
Гладун В.Р. , 51
Гоєнко Н. П., 72
Гой Т.П., 110
Григорчук Г.В., 65
Григорчук Л. І., 65
Гришук С. В., 69
Грушка Я.І., 64
Гуменчук А. І., 70
Християнин А. Я., 99
Ільків В. С., 89
Качановський М. О., 83
Капустей М. М., 34
Карпенко І., 90
Кінаш О. М., 35, 50
Кліщук Б. А., 5
Копач М. І., 90, 92
Копитко Б. І., 36
Костишин Л.П., 92
Ковальов І.М., 76
Козаченко Ю. В., 10
Козак П. С., 38
Красікова І. В., 70
Кравців В. В., 56
Кучмінська Х. Й., 95
Курченко О. О., 15
Куриляк А. О., 98
Луківська Дз. В., 99
Малицька Г. П., 101
Маслюченко В. К., 103, 105
Масол В. І., 39
Мельник В. С., 105
Млавець Ю. Ю., 40
Моклячук М. П., 38, 41, 42
Негрич М.П., 110
Нестеренко В.В., 112
Обшта А. Ф., 90
Осипчук М. М., 43
Осипчук Т. М., 129
Остапенко В. І., 42
Пашко А. О., 6
Пелешенко Б., 8
Петранова М. Ю., 10
Петраш А.І., 65
Петречко Н. В., 114
Пилипенко А.Ю., 8
Плакса С. А., 69
Попов М. М., 70

- Портенко М. І., 43
 Пригара Л.І., 45
 Сафонов В.М., 117
 Сафонова О.В., 118
 Савка І.Я., 110
 Сердюк А. С., 119
 Синявська О.О., 40
 Сідей М. І., 41
 Сізонов Ю. В., 39
 Скасків О. Б., 98, 114
 Скіданюк О. С., 133
 Сливка-Тилищак Г. І., 48
 Слюсарчук П. В., 34
 Соколенко І. В., 119
 Соломко А. В., 123
 Стефанчук М. В., 125
 Стрельников Д. І., 127
 Струтинський М. М., 128
 Шаповаловська Л. О., 98
 Шарин С. В., 133
 Шеремета М. М., 78
 Шевчук Р. В., 36
 Шувар Б. А., 90
 Швай К. В., 134
 Танцюра М. В., 47
 Тегза А. М., 48
 Ткачук М. В., 129
 Трофименко О. Д., 130
 Василенко Н. А., 86
 Василишин Т. В., 56
 Вентик Л. С., 95
 Веремій М.А., 85
 Виговська І. Ю., 59
 Власик Г., 56
 Войтович В. А., 58
 Возна С.М. , 51
 Якимишин Х. М., 16
 Заболоцький М. В., 53
 Задерей П.В., 85
 Замрій І. В., 86
 Затула Д. В., 32
 Зелінський Ю. Б., 5, 87
 Жерновий К. Ю., 31
 Жмихова Т. В., 21
 Abdelhamid Tallab, 102
 Bandura A. I., 52
 Bubniak M., 55
 Buchak K. V., 23
 Denega I. V., 73
 Holubchak O.M., 3
 Kovalyov I., 93
 Kuduk G., 96
 Kuryliak A.O., 12
 Martsinkiv M. V., 102
 Mentynskyi S. M., 107
 Mozhyrovska Z. H., 109
 Nowakowski A., 6
 Pelekh R. Ya., 107
 Pelekh Ya. M., 107
 Pryimak H., 115
 Sakhno L. M., 23
 Salo T. M., 122
 Serdyuk A.S., 120
 Skaskiv O. B., 12, 122
 Stasiv N.Yu., 12
 Stepaniuk T.A., 120
 Vasylyk O. I., 25
 Voznyak O., 55
 Vyhivska L. V., 61
 Zabolotnij Ja. V., 73
 Zagorodnyuk A.V., 3

Зміст

Пленарні лекції	3
Секційні доповіді	14
1 Секція теорії ймовірностей	14
2 Секція математичного аналізу	51



Карпатські математичні публікації

Шановні колеги!

“Карпатські математичні публікації” – це науковий математичний журнал, що видається у Івано-Франківську. Він заснований Прикарпатським національним університетом імені Василя Стефаника у 2008 році. Журналом публікуються статті оглядового і проблемного характеру, в яких висвітлюються актуальні питання математики.

Журнал індексується та відображається у таких науково-метричних базах та реферативних ресурсах, як Mathematical Reviews, Zentrblatt MATH, DOAJ, Index Copernicus International та інших. У виданні для індексації статей використовується DOI ідентифікатор. Журнал виходить двічі на рік.

Запрошуємо Вас подавати у наш журнал до друку статті. Приймаються матеріали англійською мовою оформлені у сердовищі $\text{\LaTeX}$ 2_ε згідно з вимогами, з якими можна детально ознайомитись на сайті журналу за адресою <http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp/index>. За додатковою інформацією можна звертатись за електронною адресою cmp.if.ua@gmail.com.

З повагою,
редакція журналу “Карпатські математичні публікації”.

