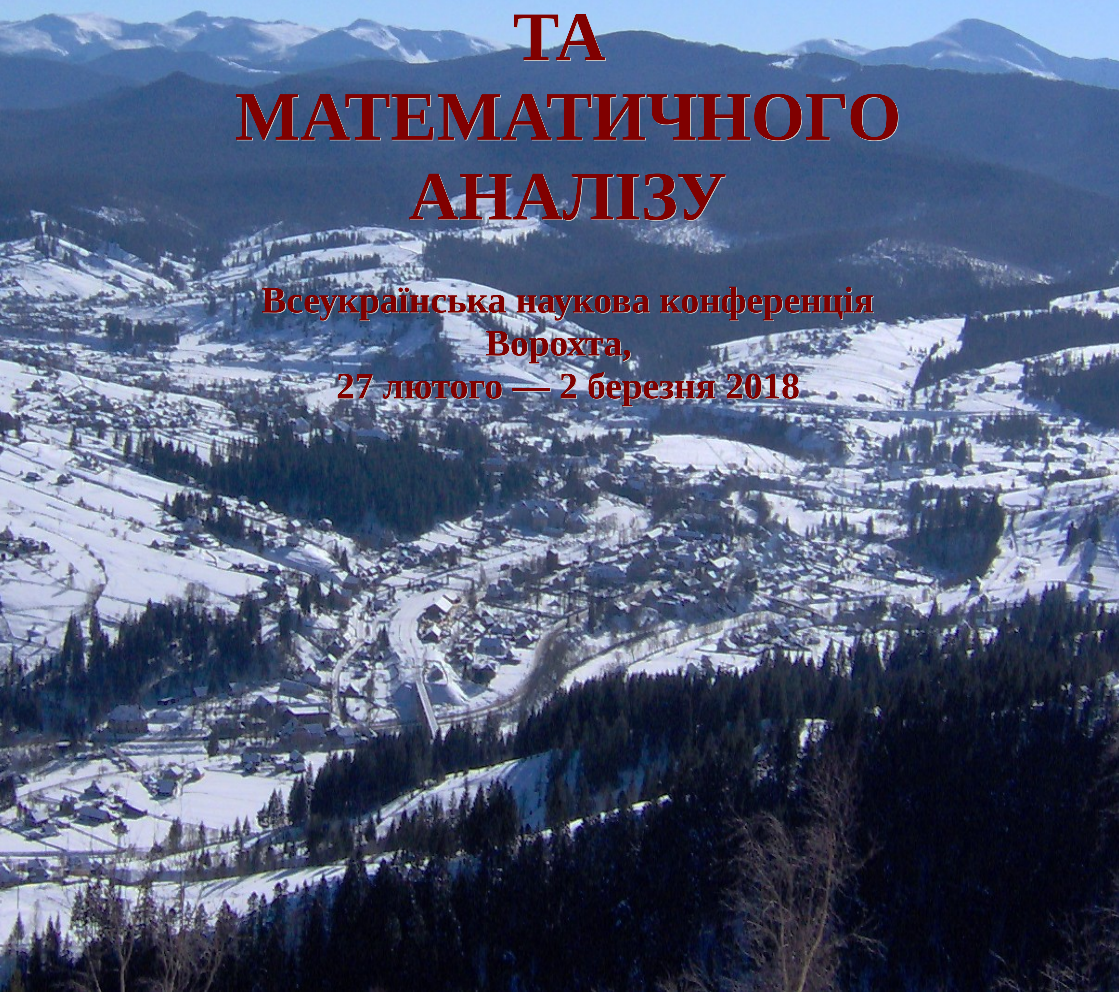
Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція
Ворохта,
27 лютого — 2 березня 2018



Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Ворохта
27 лютого — 2 березня 2018 року

(*тези доповідей*)

Івано-Франківськ, 2018

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 27.02 — 02.03.2018 (тези доповідей), – Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2018. – 106 с.

Організаційний комітет:

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторських варіантах.

Зміст

Пленарні лекції

Composition of entire functions and bounded L-index in direction

Bandura A. I.

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

andriykopanytsia@gmail.com

All definitions and notations are used from [1].

Our main result is following

Theorem 1 ([1]). *Let* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, *$f$ be entire function in* $\mathbb{C}$, *Φ be entire function in* $\mathbb{C}^n$ *satisfying inequality*

$$\left|\frac{\partial^j \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}^j}\right| \leq K \left|\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right|^j, \quad K \equiv \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

for all $z \in \mathbb{C}^n$ *such that* $|\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}| \geq 1$ *and for every* $j \leq p$, *where* $p = N(f, l)$ *or* $p = N_{\mathbf{b}}(F, L)$ *accordingly.*

Let $l \in Q$, $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}$ *and* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, *where*

$$L(z) = \begin{cases} |\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}| l(\Phi(z)), & |\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}| \geq 1, \\ l(\Phi(z)), & |\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}| < 1 \end{cases}.$$

The entire function f has bounded l-index if and only if $F(z) = f(\Phi(z))$ *has bounded L-index in the direction* $\mathbf{b}$.

References

[1] Bandura A. I. Composition of entire functions and bounded L-index in direction // Mat. Stud. **47** (2017), no.2, 179–184. doi:10.15330/ms.47.2.179-184

Гомоморфізми в алгебрах симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі

Загороднюк А.В.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”

andriyzag@yahoo.com

Зміст доповіді буде повідомлено додатково

Обернена задача для сукупно і нарізно неперервних функцій

Волошин Г. А.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

galja.vlshin@gmail.com

Маслюченко В. К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

v.maslyuchenko@gmail.com

Мельник В. С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

windchange7@gmail.com

Згідно з оберенною теоремою Бернштейна [1] для кожної спадної до нуля послідовності невід'ємних чисел α_n, $n = 0, 1, \dots$, існує така неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, у якої для кожного n її найкраще рівномірне наближення $E_n(f)$ поліномами степеня $\leq n$ дорівнює α_n. Ця теорема дістала значний розвиток у працях багатьох математиків (див. [2, 3] і вказану там літературу).

У праці [4] для неперервної відносно другої змінної функції $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ були введені функції $\alpha_n(x) = E_n(f^x)$, де $f^x(y) = f(x, y)$, які неперервні, коли f сукупно неперервна, і належать до першого класу Бера, коли f нарізно неперервна. Там були поставлені питання про опис функціональних послідовностей $\alpha_n(x) = E_n(f^x)$ для сукупно чи нарізно неперервних функцій f. У праці [5] був отриманий перший результат на цю тему.

Теорема 1. *Нехай $\alpha_k : [0,1] \to [0,+\infty)$ – неперервні функції при $k = 0,1,\dots,n$ і $\alpha_0(x) \ge \alpha_1(x) \ge \dots \ge \alpha_n(x) \ge 0$ на $[0,1]$. Тоді існує така сукупно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $E(f^x) = \alpha_k(x)$ при $k = 0,1,\dots,n$ і $x \in [0,1]$.*

Відповідь на природне питання чи для кожної поточково спадної до нуля послідовності неперервних функцій $\alpha_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ існує така сукупно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $E_n(f^x) = \alpha_n(x)$ на $[0,1]$ для кожного $n = 0,1,\dots$ досі залишається невідомою.

Для нарізно неперервних функцій виникає аналогічне питання з заміною неперервності функцій α_n на їх належність до першого класу Бера. Тут нетривіальною є вже нульова обернена задача: для яких функцій $\alpha_0 : [0,1] \to [0,+\infty)$ першого класу Бера існує така нарізно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $E_0(f^x) = \alpha_0(x)$?

Виявилося, що це питання тісно пов'язане з класичною теоремою Гана про проміжну функцію [6], яка дістала значний розвиток у багатьох подальших працях (див. [7] і вказану там літературу). Нагадаємо, що парою Гана на топологічному просторі X називають таку пару (g,h) з двох функцій $g,h : X \to \mathbb{R}$, що g напівнеперервна зверху, h напівнеперервна знизу і $g(x) \le h(x)$ на X. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X, називається проміжною для пари (g,h). Відомо [8, с.105], що T_1-простір X буде нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g,h) на X має неперервну проміжну функцію. Виявляється, що з кожною нарізно неперервною функцією $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ (чи й $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ у загальнішому випадку) природно пов'язана певна пара Гана.

Теорема 2. *Нехай $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція і $g(x) = m(f^x) = \min\limits_{0\le y\le 1} f^x(y)$, а $h(x) = M(f^x) = \max\limits_{0\le y\le 1} f^x(y)$. Тоді (g,h) – пара Гана на $[0,1]$.*

Функціонал E_0 легко виражається через функціонали M і m взяття супремуму та інфімуму, причому їх можна розглядати на довільній непорожній множині X.

Теорема 3. *Нехай X – непорожня множина, $f : X \to \mathbb{R}$ – обмежена функція, $M(f) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ і $m(f) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. Тоді*

$$E_0(f) = \frac{1}{2}(M(f) - m(f)),$$

причому стала функція $c_0 = \frac{1}{2}(M(f) + m(f))$ є єдиною серед сталих функцій c, для якої

$$E_0(f) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\| = \|f - c_0\|.$$

Тут $\|\varphi\| = M(|\varphi|)$ – рівномірна норма функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Наступний результат, що доводиться з допомогою однієї теореми Тонґа про напівнеперервні функції [8, с. 106] методом, застосованим у [9] для побудови нарізно неперервної функції з даною діагоналлю, є основним при розв'язанні нульової оберненої задачі.

Теорема 4. *Нехай $h : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу функція, що задана на досконало нормальному просторі X з нормальним квадратом X^2, в якому діагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ є G_δ-множиною, і $h_0 : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої $h_0(x) \le h(x)$ на X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$, що $h_0(x) \le f(x, y) \le h(x)$ на X^2 і $M(f(x)) = h(x)$ на X.*

Звідси з допомогою теореми Гана про проміжну функцію виводиться такий результат.

Теорема 5. *Нехай $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, де $a < b$, $c < d$, і (g, h) – довільна пара Гана на відрізку X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $g(x) = m(f^x)$ і $h(x) = M(f^x)$ на X.*

Наступний результат дає повне розв'язання нульової оберненої задачі у випадку невиродженого прямокутника $P = X \times Y$, $X = [a, b]$ і $Y = [c, d]$.

Теорема 6. *Для функції $\alpha_0 : X \to \mathbb{R}$ буде існувати нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, у якої $E_0(f^x) = \alpha_0(x)$ на X, тоді і тільки тоді, коли функція α_0 невід'ємна і напівнеперервна знизу.*

Звичайно, виникає природне бажання перенести отримані результати на загальніший випадок відображень $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, де X, Y – певні топологічні простори, та це вже справа майбутнього.

Література

[1] Bernstein S.N., *Sur probleme inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues*, Comp. Rend., (1938), 1520-1523.

[2] Нестеренко О.Н., *Обернена задача наближення та оцінки норм цілих функцій експоненціального типу і многочленів: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук : 01.01.01 – математичний аналіз*, Київ, (2006). 148с.

[3] Волошин Г.А. Маслюченко В.К., *Узагальнення однієї теореми Бернштейна*, Мат. вісн. НТШ., (6) (2009), 62-72.

[4] Власюк Г., Маслюченко В.К., *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції*, Наук. вісн. Чернів. ун-ту, (336-337), Чернівці: Рута, (2007), 52 -59.

[5] Волошин Г.А., Маслюченко В.К., *Функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна*, Мат. студії., (33) (2) (2010), 220-224.

[6] Hahn H., *Uber Halbstetige und unstetige Functionen*, Sitzungsberichte Acad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa., (126) (1917), 91-110.

[7] Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Мельник В.С. *Існування проміжних кусково лінійних і нескінченно дифереційовних функцій*, Бук. мат. журн., (**4**) (3-4) (2016), 93-100.

[8] Энгельтинг Р., *Общая топология*, Москва: Мир, (1986), 752 с.

[9] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Побудова нарізно неперервної функції від n змінних з даною діагоналлю*, Мат. студії, (12) (1), (1999), 101-107.

Аналітичні функції в одиничній кулі обмеженого L-індексу за напрямком

Бандура А.І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
andriykopanytsia@gmail.com

Скасків О.Б.

Львівський національний університет імені Івана Франка
olskask@gmail.com

Зміст доповіді буде повідомлено додатково

Секційні доповіді

Секція теорії ймовірностей та статистичної обробки даних

Про існування стаціонарного розв'язку стохастичного диференціального рівняння з нерегулярним коефіцієнтом переносу

Арясова О. В.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України

oaryasova@gmail.com

Розглянемо d-вимірне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\varphi_t = (-\lambda\varphi_t + \alpha(\varphi_t))\,dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(\varphi_t)dw_k(t), t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $\lambda > 0$, $(w(t))_{t\geq 0} = (w_1(t), \ldots, w_m(t))_{t\geq 0}$ — m-вимірний вінерів процес; $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ і $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — вимірні та обмежені функції.

За припущень, що коефіцієнт дифузії є невиродженим і задовольняє умову Ліпшиця, а коефіцієнт переносу може мати стрибок на фіксованій гіперплощині і є ліпшицевим у кожному з півпросторів, ми доводимо, що для достатньо великих λ існує єдиний стаціонарний у строгому сенсі розв'язок рівняння (1).

Рівняння для ймовірності виродження гіллястого процесу з еміграцією.

Базилевич І. Б.

Львівський національний університет імені Івана Франка

I_Bazylevych@yahoo.com

Якимишин Х. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net

Гіллястий процес з еміграцію для випадку неперервного часу розглядається у [2], а з міграцією у [1].

Розглянемо марківський гіллястий процес з одним типом частинок та міграцією $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$. $\mu(t)$ позначає кількість частинок у момент часу $t \in [0,\infty)$. Вважаємо, що $\mu(0) = 1$.

Процес $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ при $\Delta t \to 0$ визначимо наступним чином

$$P\{\mu(t+\Delta t) = j | \mu(t) = i\} =$$

$$= \begin{cases} 1 + (q_0 + r_0)\Delta t + o(\Delta t), & i = j = 0; \\ q_k \Delta t + o(\Delta t), & i = 0,\ j = 1, 2, ...; \\ (p_0 + r_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 0; \\ 1 + (q_0 + r_0 + p_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 1; \\ (p_k + q_{k-1})\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 2, ...; \\ \sum\limits_{l=i}^{m} r_l \Delta t + o(\Delta t) & 1 < i \le m,\ j = 0; \\ r_{i-j}\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\ j < i; \\ 1 + (q_0 + r_0 + ip_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\ i = j; \\ (ip_{j-i+1} + q_{j-i})\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\ i < j; \\ o(\Delta t), & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{1}$$

де m – деяке фіксоване натуральне число, p_k, q_k та r_n ($k = 0, 1, 2, ...$, $n = 0, ..., m$) інтенсивності еволюції, іммігратиції та еміграції відповідно.

Теорема 1. *Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + g(s)F(t,s) +$$

$$+\sum_{n=0}^{m} P\{\mu(t)=n\}\left(s^n\sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k}+\sum_{k=n+1}^{m} r_k\right)+\sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}s^n r(s) \quad (2)$$

з початковою умовою $F_\mu(0,s)=s$.

Далі розглянемо процес тільки з еміграцією, тобто всі q_k дорівнюють нулю.

Нехай $Q(t) = P\{\mu(t) = 0\}$ – ймовірність того, що до моменту часу $t \in (0,\infty)$ процес вироджиться. Тоді має місце твердження.

Теорема 2. *Ймовірність виродження гіллястого процесу з еміграцією задовільняє наступне диференціальне рівняння*

$$Q'(t) = P\{\mu(t)=1\}(p_0-r_0)+\sum_{k=2}^{m} P\{\mu(t)=k\}\sum_{j=k}^{m} r_j. \qquad (3)$$

Література

[1] Алимов Д. Ветвящийся процес с иммиграцией и ограниченой эмиграцией / Д. Алимов, В. Н. Решетняк // Прикладные задачи теории вероятностей. Сб. научн. труд.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 4-14.

[2] Форманов Ш. К. Марковское ветвящиеся процессы с эмиграцией. I / Ш. К. Форманов, С. В. Каверин // Известия Академии наук УзССР. Сер. Физ.-матем. наук. – 1986. – № 5. – С. 23-28.

Про ймовірність банкрутства за умов великих виплат.

Білинський А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка

andrii.bilynskyi@gmail.com

Кінаш О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Досліджено ймовірність банкрутства за умов виплат, що мають субекспоненційні розподіли [1, с. 189]. Отримано асимптотичні формули для ймовірності банкрутства у випадку цих розподілів [2], [3], [4].

Досліджено імовірність банкрутства за умов великих виплат та нарахування відсотків на резервний капітал.

Література

[1] Зінченко Н. М., *Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник / Н. М. Зінченко.* - К.: ВПЦ "Київський університет 2008. - 224 с.

[2] Білинський А.Я., Кінаш О.М., *Про оцінку ймовірність банкрутства у випадку великих виплат//Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. пр.* - Кам'янець-Поділ.: К-ПНУ ім. Івана Огієнка, 2016, збірник №14. - С.5-10

[3] Білинський А.Я., Кінаш О.М., *Ймовірність банкрутства для випадку субекспоненційних розподілів витрат//Сборник научных трудов SWorld. 2015р. Випуск 1(38). Том 21.* - С. 95-100.

[4] Bilynskyi A., Kinash O. *One case of asymptotic behavior of the probability of bankruptcy of insurance company* in SWorld Journal, Issue №11, Vol.14. Physics and Mathematics (Scientific world, Ivanovo, 2016) - URL: http://www.sworld.education/e-journal/j1114.pdf (November 2016) - P. 8-11 - j1114-002.

Хвильове рівняння на площині зі стохастичною мірою

Боднарчук І. М.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ibodnarchuk@univ.kiev.ua

Доповідь ґрунтується на спільній роботі з професором Радченком В. М.

Розглядаємо наступну задачу Коші для хвильового рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,\vec{x})}{\partial t^2} = a^2 \Delta_{\vec{x}} u(t,\vec{x}) + f(t,\vec{x},u(t,\vec{x})) + \sigma(t,\vec{x})\,\dot{\mu}(t), \\ u(0,\vec{x}) = u_0(\vec{x}); \quad \dfrac{\partial u(0,\vec{x})}{\partial t} = v_0(\vec{x}), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,\vec{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $T > 0$, $a > 0$, та μ – стохастична міра, визначена на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}([0,T])$, тобто, σ-адитивне відображення $\mu : \mathcal{B}([0,T]) \to \mathsf{L}_0(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$.

Доведено, що за певних припущень існує єдиний м'який розв'язок задачі (1), а саме, така вимірна випадкова функція $u(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x},\omega)$:

$[0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, що

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{2a\pi} \int_{\{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{y}| < at\}} \frac{v_0(\vec{y})}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} \, d\vec{y}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2a\pi} \int_{\{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{y}| < at\}} \frac{u_0(\vec{y})}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} \, d\vec{y} \right)$$
$$+ \frac{1}{2a\pi} \int_0^t ds \int_{\{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{y}| < a(t-s)\}} \frac{f(s, \vec{y}, u(s, \vec{y}))}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} \, d\vec{y}$$
$$+ \frac{1}{2a\pi} \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{y}| < a(t-s)\}} \frac{\sigma(s, \vec{y})}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} \, d\vec{y} \, .$$

Встановлено, що м’який розв’язок задачі (1) має неперервні за Гельдером траєкторії.

Gamma process subordinated to the Poisson process with a drift and time-changed Poisson processes

Buchak K. V.

Taras Shevchenko National University of Kyiv

kristina.kobilich@gmail.com

We study Poisson processes with time change, where the role of time is played by Gamma process subordinated to the Poisson process with a drift.

Let $N_1(t)$ be the Poisson process with intensity λ_1. We consider the time-changed process $N_1(G_{N+a}(t))$, where $G_{N+a}(t) = G(N(t)+at)$ is a process with parameters λ, α, β independent of $N_1(t)$. We obtain expressions for probabilities $p_k(t) = P\left(N_1(G_{N+a}(t))\right)$ and the difference-differential equations for $p_k(t)$.

We consider firstly Gamma processes with time change, where the role of time is played by Poisson process with a drift.

Let $N(t)$ be the Poisson process with the intensity parameter λ. Consider the process with a drift

$$N(t) + at, \quad a > 0.$$

The probability law of the process $N(t) + at$ has the following form :

$$p_x(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \delta(x - k - at), x \geq at, a > 0, t > 0.$$

Let $G(t)$ be the Gamma process with parameters (α, β), that is, with the Laplace exponent $f(u) = \alpha \log\left(1 + \frac{u}{\beta}\right)$.

For $a \geq 0$ consider the process

$$G_{N+a}(t) = G(at + N(t)),\ t \geq 0.$$

Its Laplace exponent and the corresponding Levy measure are given by the following formulas:

$$f_{G_{N+a}}(u) = a\alpha \log\left(1 + \frac{u}{\beta}\right) + \lambda\left(1 - \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-\alpha}\right),$$

$$\nu(du) = e^{-\beta u} u^{-1}\left(a\alpha + \frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^\alpha\right) du, \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

and process $G(at+N(t))$ coincides in distribution with the sum of independent processes $\tilde{G}_N(t)+\tilde{G}(at)$, where $\tilde{G}_N(t)$ is the compound Poisson-Gamma process and $\tilde{G}(t)$ is the Gamma process.

The probability distribution of the process $G(at+N(t))$ is expressed in terms of the Wright function. When the parameter $\alpha = 1$, the process $G(t)$ becomes the exponential process $E(t)$, and the distribution of $E_{N+a}(t)$ is expressed in terms of the modified Bessel function of the first kind.

The time-changed Poisson process $N_1(G_{N+a}(t)) = N_1(G(N(t)+at))$ is studied.

Theorem 1. *Probability mass function of the process $N_1(G_{N+a}(t))$ is given by*

$$p_k(t) = P\left\{N_1(G_{N+a}(t)) = k\right\} =$$
$$= e^{-\lambda t}\frac{\lambda_1^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{\beta^{\alpha(n+at)}}{\Gamma(\alpha(n+at))}\frac{\Gamma(\alpha(n+at)+k)}{(\lambda_1+\beta)^{\alpha(n+at)+k}}.$$

The probabilities $p_k(t)$ satisfy the following system of difference-differential equations:

$$\frac{d}{dt}p_k(t) = -\left(a\alpha\log\left(1+\frac{\lambda_1}{\beta}\right) + \lambda\left(1 - \left(\frac{\beta}{\lambda_1+\beta}\right)^\alpha\right)\right)p_k(t)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\beta}\right)^m\left(a\alpha\Gamma(m) + \lambda\left(\frac{\beta}{\lambda_1+\beta}\right)^\alpha\frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)p_{k-m}(t).$$

Theorem 2. *Probability mass function of the process $N_1(E_{N+a}(t))$ is given by*

$$\begin{aligned} p_k^E(t) &= P\left\{N_1(E_{N+a}(t)) = k\right\} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{\Gamma(k+at)}{k!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\beta}\right)^k\left(\frac{\beta}{\lambda_1+\beta}\right)^{at}\mathcal{E}_{1,at}^{k+at}\left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda_1+\beta}\right). \end{aligned}$$

The probabilities $p_k^E(t)$ satisfy the following system of difference-differential equations:

$$\frac{d}{dt}p_k^E(t) = -\left(a\log\left(1+\frac{\lambda_1}{\beta}\right)+\frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1+\beta}\right)p_k^E(t) + \sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\beta}\right)^m\left(\frac{a}{m}+\frac{\lambda\beta}{\lambda_1+\beta}\right)p_{k-m}^E(t).$$

References

[1] L. Beghin and M. D'Ovidio, *Fractional Poisson process with random drift*, Electron. J. Probab. 19 (2014), no. 122, 26.

[2] K. Buchak and L. Sakhno, *Properties of Poisson processes directed by compound Poisson-Gamma subordinators*, Submitted to "Modern Stochastics: Theory and Applications" (2018).

Основні методи аналізу і прогнозування часових рядів

Горбач А.А.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськь, Україна

andriana.andriivna@gmail.com

Дослідженню методів аналізу часових рядів та прогнозуванню відповідних показників на їх основі присвячено багато наукових праць (див. [1]). Ці методи широко використовуються для аналізу та прогнозування фінансових і бюджетних показників [2], статистичних динамічних даних [3] тощо.

До основних завдань дослідження часових рядів відносять: опис характерних особливостей ряду та визначення його основних параметрів, прогнозування показників часового ряду, виявлення факторів, що впливають на поведінку часового ряду.

Методи аналізу часового ряду визначаються як завданнями аналізу, так і природою формування значень ряду. Цей процес прийнято називати ідентифікацією моделі. Він складається з таких послідовних етапів:

1) коригування різних рівнів динамічного ряду;

2) визначення систематичних компонент динамічного ряду (характеру тренду, сезонності тощо);

3) аналіз поведінки залишків ряду як випадкової компоненти.

Широкий клас моделей аналізу та прогнозування часових рядів визначається складовими загального трендового характеру та сезонного характеру вигляду $y_t = f_t + s_t + \epsilon_t$, де f_t – загальний тренд, що описує вплив стійких факторів, s_t – сезонна компонента, що відображає вплив циклічних сезонних процесів, ϵ_t – випадкова компонента.

У роботі розглядаються основні методи визначення моделей аналізу та прогнозування часових рядів в цілому та окремих складових, які описують заний динамічний ряд. До них відносяться автокореляційні методи, метод Форстера—Стьюарта, аналіз Фур'є тощо.

Література

[1] Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление: Пер. с англ. / Под ред. В.Ф. Писаренко. - М.: Мир, 1974.

[2] Плескач В.Л., Івасюк І.Я. *Середньострокове прогнозування доходів державного бюджету України з допомогою методу експоненціального згладжування.* Фінанси України 2012, **1**, 58–66.

[3] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976.

Стохастична впорядкованість та метрика, породжені принципами бар'єрного перестрахування

Дрозденко В. О.

Білоцерківський національний аграрний університет

drozdenko0408@gmail.com

Нехай випадкова величина X, з функцією розподілу $F(x)$, відображає грошовий еквівалент збитків пов'язаних з певною страховою угодою. *Страхову премію*, тобто суму, яку клієнт при укладанні угоди платить обраній страховій компанії за захист від ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Нагадаємо, що *премія середнього значення* для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{\text{с.з.}}[X]$, означена за допомогою функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$v(\pi_{\text{с.з.}}[X]) = \mathsf{E}[v(X)]$. Аргументація для приципу середнього значення прихована в нерівності Єнсена $v(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[v(X)]$, тобто, отримана премія буде не меншою за математичне сподівання розміру страхової компенсації.

Важливим частковим випадком премії середнього значення є *експоненційна премія*

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]), \quad \text{для} \quad \beta > 0,$$

яка отримується з премії середнього значення при виборі $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$. Експоненційна премія виникає також як частковий випадок методик страхового оцінювання основаних на використанні гладких функцій корисності.

В роботі Дрозденко (2010) крім іншого демонструвалося, що, якщо для ризику X існує $\delta > 0$ таке, що $\mathsf{E}[|Xe^{\delta X}|] < +\infty$, то має місце граничне співвідношення $\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \to \pi_{\text{нетто}}[X]$ при $\beta \to 0_+$, яке демонструє певного роду взаємозв'язок між експоненційною та нетто преміями.

Розглянемо тепер *контракт надлишкового перестрахування* з бар'єрним рівнем t. В даному випадку перестрахова компанія відшкодовує частину ризику $X - t$ у випадку, коли $X > t$, і весь ризик (без виплат з боку перестраховика) відшкодовується страховою компанією, якщо $X < t$.

За таких обставин, премія, що надходить до перестраховика обрахована за експоненційним принципом матиме вигляд

$$\pi^{\text{перестр.}}_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\beta}\log \mathsf{E}[e^{\beta(X-t)_+}] \;=:\; \pi[X,t,\beta], \quad \text{для} \quad \beta > 0,$$

а нетто премія

$$\pi^{\text{перестр.}}_{\text{нетто}}[X] \;=\; \mathsf{E}[(X-t)_+] \;=:\; \pi[X,t,0].$$

В термінах функцій розподілу щойно отримані премії можна представити наступним чином

$$\begin{aligned}
\pi[X,t,\beta] \;&=\; \frac{1}{\beta}\log\left\{F(t) + \int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}dF(x)\right\} \\
&=\; \frac{1}{\beta}\log\left\{1 + \beta\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[1-F(x)]dx\right\}, \quad \text{для} \quad \beta > 0, \qquad (1)
\end{aligned}$$

а також

$$\pi[X,t,0] \;=\; \int_t^{+\infty}(x-t)dF(x) \;=\; \int_t^{+\infty}[1-F(x)]dx. \qquad (2)$$

Представлення (1) та (2) можна обернути. Позначивши $\pi[X, t, \beta] =: p(t)$, для $\beta \geq 0$, з (1) та (2) отримуємо

$$F(x) = e^{\beta p(x)} p'(x) + 1, \quad \text{для} \quad -\infty < x < +\infty \tag{3}$$

Для $\beta \geq 0$, можна ввести *односторонню впорядкованість* випадкових величин. Вважатимемо, що $X <_\beta Y$, якщо $\pi[X, t, \beta] \leq \pi[Y, t, \beta]$ для $t \in \mathbb{R}$.

З представлень (1) та (2) з урахуванням того, що $e^{0(x-t)} = 1$ слідує, що, для $\beta \geq 0$, умова $X <_\beta Y$ є еквівалентною умові

$$\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)} [F(x) - G(x)] dx \geq 0, \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Більш того, *метрика*, для $\beta \geq 0$, вводиться за допомогою задання наступного співвідношення відстані

$$d_\beta(X, Y) \ := \ \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)} [F(x) - G(x)] dx \right|. \tag{4}$$

Наступна теорема демонструє прості, проте досить корисні достатні умови стохастичної впорядкованості.

Теорема 1. *Якщо для ризику X з функцією розподілу $F(x)$ та ризику Y з функцією розподілу $G(x)$, а також деякого $\beta \geq 0$, виконуються умови:*

$\mathbf{A}_1$ **:** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x} [F(x) - G(x)] dx \geq 0$

$\mathbf{A}_2$ **:** *існує $\Delta \in [-\infty, +\infty)$ таке, що*
$F(x) \leq G(x)$ для $x < \Delta$ та $F(x) \geq G(x)$ для $x \geq \Delta$

то має місце стохастична впорядкованість $X <_\beta Y$.

Наступна теорема демонструє монотонність стохастичної впорядкованості як функції параметра β.

Теорема 2. *Якщо для ризиків X та Y, а також деякого $\beta \geq 0$, має місце нерівність $X <_\beta Y$, то для будь-якого $r > \beta$ матимемо $X <_r Y$.*

Наступна теорема демонструє інваріантність впорядкованості відностно скінченного та зліченного змішувань, а також скінченного згортання.

Теорема 3. *Нехай $F_i(x)$ та $G_i(x)$, для $i = 1, 2, \cdots$, скінченні чи зліченні послідовності функцій розподілу такі, що $F_i(x) <_\beta G_i(x)$ для деякого $\beta \geq 0$ та всіх i. Нехай також $p_1, p_2, \cdots$ — скінченна чи зліченна послідовність ймовірносних мас. Тоді*

(i) $\sum_i p_i F_i(x) <_\beta \sum_i p_i G_i(x)$;

(ii) $F_1 * \ldots * F_n(x) <_\beta G_1 * \ldots * G_n(x)$ *для всіх допустимих* n.

Наступна теорема демонструє вплив на метрику (4) операцій змішування та згортання.

Теорема 4. *Нехай* $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ *— функції розподілу та* $F_i(x)$, $G_i(x)$, *для* $i = 1, 2, \cdots$, *— скінченні чи зліченні послідовності функцій розподілу. Нехай також* p_1, p_2, $\cdots$ *— скінченна чи зліченна послідовність ймовірносних мас. Тоді, для будь-якого* $\beta \geq 0$:

(i) $d_\beta(\sum_i p_i F_i(x), \sum_i p_i G_i(x)) \leq \sum_i p_i d_\beta(F_i(x), G_i(x))$;

(ii) $d_\beta(F * H(x), G * H(x)) \leq d_\beta(F(x), G(x))$;

(iii) $d_\beta(F^{*n}(x), G^{*n}(x)) \leq n \cdot d_\beta(F(x), G(x))$.

Література

[1] В. О. Дрозденко (2010) Гранична поведінка страхових премій залежних від параметрів. *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова.* Серія 1 (фізико-математичні науки), № 11, С. 211-224.

[2] М. В. Працьовитий, В. О. Дрозденко (2017) Стохастична впорядкованість та метрика, породжені принципами бар'єрного перестрахування. *East European Scientific Journal*, 10 (26), С. 70-74.

Про двопараметричну напівгрупу Феллера для одновимірного процесу дифузії в обмеженій області з рухомою мембраною

Копитко Б. І.

Ченстоховський політехнічний університет, Ченстохова, Польща

bohdan.kopytko@im.pcz.pl

Шевчук Р. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

r.v.shevchuk@gmail.com

Доповідь присвячена проблемі побудови двопараметричної напівгрупи Феллера $T_{s,t},\ 0 \le s < t \le T$, якій відповідає неоднорідний марковський процес (не обов'язково неперервний) на відрізку $[X_1(s), X_2(s)]$, розділеному на дві частини деякою точкою $X(s)$ ($X(s),\ X_i(s),\ i = 1, 2,$ — задані функції, $X_1(s) < X(s) < X_2(s),\ s \in [0, T]$), такий, що в інтервалах $(X_1(s), X(s))$ та $(X(s), X_2(s))$ він збігається із заданими там дифузійними процесами, а його поведінка на кінцях відрізка $X_i(s),\ i = 1, 2,$ і в точці $X(s)$ описується заданими крайовими умовами і умовою спряження Феллера-Вентцеля відповідно [1]. Ще одна умова спряження, яка задається в точці $X(s)$, є відображенням властивості феллеровості шуканого процесу. Описану задачу ще називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів [2].

Для розв'язання цієї задачі застосовано аналітичний метод. За такого підходу проблема побудови потрібної напівгрупи практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність останньої задачі встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних параболічних потенціалів простого шару.

Література

[1] А. Д. Вентцель, *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка*, Докл. АН СССР. Математика., **111** (2) (1956), 269–272.

[2] B.I. Kopytko, R. V. Shevchuk, *On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition*, Theory of Stochastic Processes, **17(33)** (2) (2011), 55–70.

Статистичні властивості процесу зсувного деформування гранульованого середовища

Микуляк С.В.

Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України
mykulyak@ukr.net

Куліч В.В.

Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України
kulichvas@gmail.com

Динамічні процеси в гранульованих середовищах мають стохастичний характер навіть при дії неперервних гладких навантажень. Яскравим прикладом є процес зсувного деформування гранульованого масиву при постійному навантажені. Розглядається зсувне деформування гранульованої системи, утвореної гранулами у вигляді кубів. Цей масив кубів міститься у боксі, який складається з нижньої нерухомої частини та верхньої, до якої прикладається постійна сила у горизонтальному напрямі. Даний динамічний процес розраховується чисельно за допомогою методу дискретних елементів. У розрахунках отримано, що відгук такої системи на дію постійної сили є стохастичним, зокрема такими є швидкості руху верхньої частини боксу, сумарні кінетична, обертальна енергія гранул та енергія пружної взаємодії гранул. Також стохастичною величиною є сумарна сила, що діє на нижню стінку бокса. За допомогою методу детрендового флуктуаційного аналізу [1] отримано, що в цьому часовому ряді мають місце довгодіючі часові кореляції. Для дослідження мікрохарактеристик такої складної системи в процесі деформування побудовано розподіли сил взаємодії між структурними елементами у різні моменти часу. Виявлено, що дані розподіли є степеневими функціями впродовж всього терміну деформування. Степеневі розподіли свідчать про наявність далекодіючих просторових кореляцій. Побудовані кореляційні функції підтверджують наявність саме таких кореляцій.

Література

[1] J.V. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Halvin, A. Bunde. *Detecting long-range correlation with detrended fluctuation analysis*, Physica A **251** (2001) 441–454.

Перетворення ротаційно інваріантного α-стійкого процесу, яке породжує липку мембрану для цього процесу

Осипчук М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Портенко М. І.

Інститут математики НАН України, Київ

portenko@imath.kiev.ua

Для ротаційно інваріантного α-стійкого процесу з $\alpha \in (1,2)$ в евклідовому просторі будується мембрана зосереджена на фіксованій обмеженій замкненій поверхні S класу $H^{\gamma+1}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$ така, що точки поверхні володіють властивістю затримки процесу з деяким заданим коефіцієнтом $(p(x))_{x\in S}$. Іншими словами, ті точки S, де $p(x) > 0$, є *липкими* для побудованого процесу. Ми показуємо, що цей процес пов'язаний з деякою початково крайовою задачаю для псевдодиференціального рівняння відповідного даному α-стійкому процесу.

Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ стандартний процес Маркова в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, чия щільність ймовірності переходу g_0 (відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$) задається рівністю

$$g_0(t,x,y) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d,$$

де $c > 0$ та $\alpha \in (1,2)$ фіксовані параметри. Генератор цього процесу (позначатимемо його $\mathbf{A}$) є псевдодиференціальним оператором з символом $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Для деякого одиничного вектора $l \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $\mathbf{B}_l$ псевдодиференціальний оператор, що визначається символом $(2ic|\xi|^{\alpha-2}(\xi,l))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$.

Нехай $(p(x))_{x\in S}$ задана неперервна функція з невід'ємними значеннями. Ми показуємо, що існує W-функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ такий, що його характеристика задається рівністю

$$\mathbb{E}_x\eta_t(p) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(\tau,x,y)p(y)\,d\sigma_y, \quad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Для $t\geq 0$ покладемо $\zeta_t = \inf\{s\geq 0 : s+\eta_s(p)\geq t\}$ і розглянемо стандартний процес Маркова $(\hat{x}(t),\hat{\mathcal{M}}_t,\mathbb{P}_x)$, де $\hat{x}(t)=x(\zeta_t)$, $\hat{\mathcal{M}}_t=\mathcal{M}_{\zeta_t}$.

В доповіді буде показано, що для кожної функції $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$\hat{u}(t,x,\varphi)=\mathbb{E}_x\varphi(\hat{x}(t)), \quad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

є роз'язком (в певному розумінні) наступної задачі

(i) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x)$ в області $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d\setminus S$;

(ii) $u(0+,x)=\varphi(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}^d$;

(iii) $p(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-)$ при всіх $t>0$ та $x\in S$ (тут $\nu(x)$ орт зовнішньої нормалі до поверхні S в точці $x\in S$).

Simulation of linear stochastic system input process taking into account the output process

Rozora I.

National Taras Shevchenko university of Kyiv

irozora@bigmir.net

Lyzhechko M.

National Taras Shevchenko university of Kyiv

marialy@ukr.net

Gaussian stochastic processes with discrete spectrum are investigated. These processes are considered as input processes to a time-invariant linear system with real-valued square integrable impulse response function. More information about linear system with impulse response function and about estimators of impulse function can be found in [3, 2, 4]. The response on the system is supposed to be an output process. The model which approximates the process with given accuracy and reliability in Banach space $C([0,1])$. is constructed taking into account the response of the system. For these purposes the methods and properties of Square-Gaussian processes are used.

Let (Ω,F,P) be some probabilistic space.

Definition 0.1. A stationary stochastic process is called a process with discrete spectrum if it has representation as correlation function can be given as

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t), \tag{1}$$

where ξ_k, $\eta_k$are independent zero-mean random variables, $E\xi_k = E\eta_k = E\xi_k\eta_l = 0$ and $E\xi_k\xi_l = E\eta_k\eta_l = \delta_k^l$, $k \geq 0$, $l \geq 0$.

Consider a time-invariant linear system with a real-valued square integrable impulse response function $H(\tau)$ which is defined on a finite domain $\tau \in [0, T]$. This means that the response of the system to an input signal $X(t)$ which is observed on $[-T, T]$ has the following form

$$Y(t) = \int_0^T H(\tau)X(t-\tau)d\tau, \quad t \in [0, T] \tag{2}$$

and $H \in L_2([0, T])$.

Suppose that the impulse response function is known. We also suggest that the input signal in system (2) is a stationary stochastic process with discrete spectrum. It follows from (1) and (2) that the response of the system $Y(t)$ can be presented as

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)), \tag{3}$$

where the functions $c_k(t)$, $s_k(t)$ are equal to

$$\begin{aligned} c_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau)\cos(\lambda_k(t-\tau))d\tau, \\ s_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau)\sin(\lambda_k(t-\tau))d\tau, \ t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{4}$$

By the model of a stochastic process $X(t)$ we will understand a truncated series from (1).

Definition 0.2. A random process $X_N(t)$ is called a model of the process $X(t)$ if

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k(\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t).$$

If the model $X_N(t)$ is considered as an input signal of linear system then the output process is given as $Y_N(t) = \sum\limits_{k=0}^{N}(\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t))$.

Consider such conditions:

- **Condition A:** There exists a constant $c > 0$ that dominates the impulse response function $H(\tau)$ on the domain $[0, T]$ $|H(\tau)| \le c$.

- **Condition B:** The integral is convergent $I_H = \int_0^T H^2(\tau)d\tau < \infty$.

- **Condition C:** The series $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{2\alpha} < \infty$, $\alpha \in (0, 1]$.

Let's denote

$$
\begin{aligned}
(\delta_0(N))^2 &= (8 + 2T^2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right)^2 + (64c^2 + 2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right)^2 \\
&+ 4T \cdot I_H^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right); \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(N) &= 2^{3-\alpha} \Bigg[\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{2\alpha} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{\alpha} \right)^2 + \\
&+ 8c^2 (\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{2\alpha-1} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{-1} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{\alpha-1} \right)^2) + \\
&+ 16c^4 (\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{2\alpha-2} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{-2} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{\alpha-2} \right)^2) \Bigg]^{1/2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Theorem 1. *Assume that the conditions* ***A, B, C*** *are met. The model $X_N(t)$ approximates a Gaussian stochastic process with discrete spectrum $X(t)$ taking into account the response of the system (1) with given reliability $1-\nu$, $\nu \in (0, 1)$, and accuracy $\delta > 0$ in the space $C([0, T])$ if for N the inequalities*

$$
\max\{\delta_0(N), K(N) \cdot (T/2)^{\alpha}\} < \frac{\alpha\delta}{2\sqrt{2}}, \ \alpha \in (0, 1],
$$

$$
4e^{\frac{3}{\alpha}} \exp\left\{ -\frac{\delta}{2\sqrt{2}\delta_0(N)} \right\} \times \left(\frac{\delta\alpha}{2\sqrt{2}\delta_0(N)} \right)^{2/\alpha} \left(1 + \frac{2\delta}{\sqrt{2}\delta_0(N)} \right)^{1/2} < \nu,
$$

hold true, where the values $K(N)$, $\delta_0(N)$ are from (5) and (6).

References

[1] Yuriy V. Kozachenko, Oleksandr O. Pogorilyak, Iryna V. Rozora and Antonina M. Tegza, *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press - Elsevier (2016).

[2] Kozacenko,Yu. and Rozora, I. *On cross-correlogram estimators of impulse response function*, Theor. Probability and Math. Statist., **93** (2015), 75–83.

[3] Kozachenko, Yu., Rozora, I.*A Criterion For Testing Hypothesis About Impulse Response Function*, Statistics, optimization & information computing, **4**, no. 3 (2016), 214–232.

[4] Rozora I. *Statistical hypothesis testing for the shape of impulse response function* , Communications in Statistics - Theory and Methods, http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2017.1321125, (2017).

Властивості стохастичних хвильових розв'язків моделей структурованих середовищ

Скуратівський С. І.

Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України

skurserg@gmail.com

Скуратівська І. А.

Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України

inna.skurativska@gmail.com

Дослідження динамічних процесів у неоднорідних середовищах (грунти, гранульовані матеріали), які перебувають в умовах інтенсивних навантажень, вказують на їх здатність до утворення дисипативних структур, зокрема хвильових [1]. Джерелом такої поведінки є вплив внутрішньої будови середовища на формування його реакції на збурення.

Врахування певною мірою особливостей внутрішньої структури можливе в рамках теорії суцільного середовища з модифікованим рівнянням стану, яке містить опис релаксаційних та просторово нелокальних ефектів, зумовлених взаємодією структурних елементів. Такий підхід приводить до слабко нелокальних математичних моделей структурованих середовищ, які у гідродинамічному наближенні мають наступний вигляд [1, 2]

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} + \rho u_x =& 0, \quad \rho\frac{du}{dt} + p_x = \gamma\rho, \\
\tau\left(\frac{dp}{dt} - \chi\frac{d\rho}{dt}\right) =& \kappa\rho - p + \theta\left[p_{xx} + \frac{1}{\rho}p_x\rho_x - \chi\left(\rho_{xx} - \frac{1}{\rho}\left(\rho_x\right)^2\right)\right] - \\
& - h\left(\frac{d^2p}{dt^2} + \eta\left(\frac{2}{\rho}\left\{\frac{d\rho}{dt}\right\}^2 - \frac{d^2\rho}{dt^2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{1}
$$

де ρ – густина, p – тиск, u – швидкість, час релаксації τ грає роль параметра часової нелокальності, κ та χ пропорційні квадратам рівноважної та замороженої швидкостей звуку у середовищі, θ – параметр просторової нелокальності, параметри h та η характеризують ефекти часової нелокальності вищих порядків, $\gamma\rho$ – масова сила, $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$.

Однак для опису процесів самоорганізації у відкритих системах важливим питанням є поведінка стохастичних збурень (флуктуацій) в таких системах. Через складність такої задачі для моделі (1), обмежимось вивченням розв'язків системи, коли один із її параметрів зазнає флуктуацій. У такому випадку постає задача про структуру розв'язків стохастичної системи, які виникають в околі детермінованої траєкторії.

Власне, детермінована модель (1), згідно з результатами попередніх досліджень [1, 3], має хвильові розв'язки виду

$$
u = U(s) + D, \rho = \rho_0 \exp(\xi t + S(s)), p = \rho Z(s), s = x - Dt, \tag{2}
$$

де D – стала швидкість хвильового фронту, ξ – параметр [1, 6]. Ці розв'язки задовольняють квадратуру

$$
\frac{dS}{ds} = -\frac{W + \xi}{U}
$$

та автономну нелінійну динамічну систему

$$
\begin{aligned}
U\frac{dU}{ds} = UW, \quad U\frac{dZ}{ds} &= \gamma U + \xi Z + W\left(Z - U^2\right), \\
U\frac{dW}{ds} = (2\gamma\xi\sigma U &- \kappa U^2 + \gamma h\xi U^3 + \gamma\tau U^3 + \eta\xi\sigma W + 2\gamma\sigma UW \\
-2\xi\sigma U^2 W &+ \chi\tau U^2 W - h\xi U^4 W - \tau U^4 W + \eta\sigma W^2 + \\
\eta h(UW)^2 &- \sigma(UW)^2 - hU^4W^2 + U^2 Z + h\xi^2 U^2 Z + \\
&\xi\tau U^2 Z)/(\eta\sigma - \eta h U^2 - \sigma U^2 + hU^4).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Система (3) має стаціонарну точку з координатами

$$
U_0 = -D, \quad Z_0 = \frac{\kappa D^2}{D^2 - 2\theta\xi^2}, \quad W_0 = 0, \quad \gamma = \frac{\xi Z_0}{D}, \tag{4}
$$

в околі якої у фазовому просторі системи (3) виявлені періодичні, мультиперіодичні, квазіперіодичні та гомоклінічні траєкторії.

Коли параметр γ збурити шумом у формі $\gamma + \varepsilon \dot{H}$, H вінерів процес з інтенситвністю ε, то система (3) набуває виду $\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{H}$ та стає неавтономною, а в околі замкнутих орбіт (граничних циклів) системи виникають стохастичні траєкторії, на властивості яких звертається особлива увага у цьому повідомленні.

У випадку слабкого шуму автоколивання формують стохастичний атрактор зі стаціонарною функцією щільності $\psi(x,\varepsilon)$, яка, як показано у роботах [4, 5], задовольняє рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка у гаусовому наближенні

$$\psi \approx K \exp\left(-q(x)/\varepsilon^2\right), \quad q(x) \approx \left(x - \Gamma,\, V(s)(x-\Gamma)\right)/2,$$

де $\varepsilon^2 V$ є коваріантною матрицею, що характеризує дисперсію точок перетину стохастичних траєкторій з площиною Π, ортогональною до періодичної орбіти (граничного циклу) Γ.

На основі матричної функції V (*функції чутливості*) була розроблена техніка [4, 5] побудови довірчих інтервалів для стохастичних траєкторій систем із шумом в околі стійких стаціонарних та періодичних режимів відповідних детермінованих динамічних систем. Важливою перевагою цієї техніки є можливість позбутись необхідності розв'язувати стохастичні рівняння напряму, натомість, можна перейти до розширеної системи детермінованих рівнянь, які описують матричну функцію V.

Її застосування до моделі (1), коли $\theta = h = 0$ [6, 7] та детермінована система, що визначає граничний цикл, є двовимірною

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

приводить до найпростішого випадку функції чутливості $V(s) = \mu(s)P(s)$, де P матриця ортогонального проектування на площину Π, $\mu(s)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d\mu}{ds} = a\,(s)\,\mu + b\,(s) \equiv f_3(x_1, x_2, \mu), \tag{6}$$

де

$$a\,(s) = p^{\mathrm{T}}\left(F^{\mathrm{T}} + F\right)p, \quad F_{ij} = \partial f_i/\partial x_j, \quad b\,(s) = p^{\mathrm{T}} S\, p,$$
$$S = \sigma\sigma^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad s \in [0; T]\,,$$

та p є ортом, ортогональним до $f(\Gamma)$.

Оскільки рівняння (5)–(6) становлять систему із періодичними коефіцієнтами, то її зручно розв'язувати методом стрільби. Результатом застосування методу є компоненти розв'язку детермінованої системи, функція чутливості $\mu(s)$ та мультиплікатори цикла (показники Флоке), які характеризують стійкість граничного циклу.

Знаючи функцію $\mu(s)$, можна обчислити межі $\bar{x}_{1,2}$ довірчих смуг $\bar{x}_{1,2} = \Gamma(s) \pm k\varepsilon\sqrt{2\mu(s)}p(s)$, $k = \mathrm{erf}^{-1}(\beta)$, β – довірча ймовірність. Також було показано, що найбільшого розсіяння стохастичні траєкторії зазнають в околі сідлової стаціонарної точки системи (5).

Застосування техніки функції чутливості до динамічних систем з $3D$ фазовим простором [8], таких як (3), вимагає розв'язання системи з шести ЗДР, а саме системи (3) та додаткових рівнянь

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 v_1^\top \left(F + F^\top\right) v_1 + v_1^\top \hat{S} v_1, \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 v_2^\top \left(F + F^\top\right) v_2 + v_2^\top \hat{S} v_2,$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\dot{\varphi} = \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top \hat{S} v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\,\dot{u}_1^\top u_2.$$

Тут величини $\lambda_{1,2}$ визначають півосі довірчих еліпсів у площині Пуанкаре П, тоді як кут φ характеризує поворот півосей вздовж періодичної орбіти. Тоді матрична функція чутливості $V = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, де $P_i = v_i v_i^\top$ – проектори на напрями власних векторів v_i, які відповідають власним значенням λ_i лінеаризованої системи.

На основі аналізу розв'язків розширеної системи, обчислених методом стрільби, була досліджена структура довірчих торів для стохастичних траєкторій, які розвиваються в околі граничних циклів різних типів. Зокрема, особлива увага зверталась на граничні цикли, які входять до каскаду Фейгенбаума, приховані періодичні орбіти, траєкторії поблизу гомоклінічних траєкторій типу Шильнікова, замкнутих орбіт на торових поверхнях.

У результаті вивчення характеристик довірчих торів були встановлені особливості будови фазових просторів поблизу періодичних траєкторій в залежності від їх типу та показано, що врахування флуктуацій спричиняє утворення додаткових напрямів дисперсії траєкторій в околі детермінованих режимів.

Література

[1] V. A. Danylenko, T. B. Danevych, O. S. Makarenko, S. I. Skurativskyi, V. A. Vladimirov, Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. Kyiv: Subbotin institute of geophysics NASU, 2011.

[2] В.А. Даниленко, Т.Б. Даневич, С.І. Скуратівський, *Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальностями*, Київ: Інститут геофізики ім.С.І. Субботіна НАН України, 2008. – 86 с.

[3] V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyi, *Peculiarities of wave fields in nonlocal media*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **16** (2) (2016), 165–178.

[4] G.N. Milshtein, L.B. Ryashko, *Approximation of the quasipotential in problems of the stability of systems with random non-degenerate perturbations*, J. Appl. Math. Mech. **59** (1) (1995) 47–56.

[5] I. Bashkirtseva, L. B. Ryashko, *Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique*, Phys. Rev., **E00** (2011), 001100.

[6] V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyi,*Stationary and periodic regimes in relaxing media with fluctuations*, Euro. Phys. J., **B87** (2014), 218(8).

[7] В.А. Даниленко, С.І. Скуратівський, *Хвильові локалізовані структури в релаксуючих середовищах з флуктуаціями*, Доповіді НАН України, **12** (2014), 91–98.

[8] S.I. Skurativskyi, I.A. Skurativska, *Dynamics of traveling waves in fluctuating nonlocal media*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **49** (2017), 9–16.

Моделювання гауссового випадкового процесу та перевірка гіпотези про вигляд його коваріаційної функції

Трошкі В. Б.

ДВНЗ«Ужгородський національний університет»
viktor.troshki@uzhnu.edu.ua

Трошкі Н. В.

ДВНЗ«Ужгородський національний університет»
nataliia.troshki@uzhnu.edu.ua

Оскільки часто досліджувати весь процес є або неможливим, або досить економічно не вигідним, тому на практиці, зазвичай, значення випадкових процесів спостерігаються тільки в певні моменти часу. І на основі отриманих даних потрібно робити певні висновки про сам процес. Однак виникає питання: скільки потрібно спостережуваних даних для того, щоб ми змогли із необхідною точністю наблизити цей процес певтою моделлю.

В даній доповіді, спочатку за допомогою модифікованого методу розбиття та рандомізації спектру побудовано модель, яка із заданою точністю та надійністю наближає випадковий процес. Далі, за допомогою запропонованого нового критерію, перевірено гіпотезу про вигляд коваріаційної функції.

Дана робота є продовженням робіт [1], [2], [3].

Подяка: Дослідження першого автора проводились в рамках Visegrad Fund Scholarship No. 51701464.

Література

[1] Kozachenko Yu. V., Hudyvok T. V., Troshki V. B., Troshki N. V. *Estimation of covariance functions of Gaussian stochastic fields and their simulation*: Monograph – Uzhhorod: «AUTDOR–SHARK», 2017. – p. 232.

[2] Kozachenko Yu., Troshki V. *A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process*, Modern Stochastics: Theory and Applications **2**, (2015), 1–11.

[3] Kozachenko Yu.V., Troshki N.V. *Accuracy and reliability of a model of Gaussian random process in $C(\mathbb{T})$ space*, International Journal of Statistics and Management System, **10**, (1-2) (2015), 1–15.

Про напівгрупу Феллера для процесу дифузії з відбиттям в середовищі з напівпрозорою мембраною

Цаповська Ж.Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка

tzhannet@yahoo.com

Новосядло А.Ф.

Львівський національний університет імені Івана Франка

nandrew183@gmail.com

В евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, задана область вигляду

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d | F_1(x') < x_d < F_2(x')\}$$

з межею $\partial\mathcal{D} = S_1 \cup S_2$, де

$$S_m = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = F_m(x')\}, \quad m \in \{1, 2\},$$

а елементарна поверхня

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = F_0(x')\}$$

розділяє область $\mathcal{D}$ на дві області

$$\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d | F_1(x') < x_d < F_0(x')\}$$

і

$$\mathcal{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^d | F_0(x') < x_d < F_2(x')\}$$

так, що $\partial \mathcal{D}_m = S_m \cup S_0$, $S_m \cap S_0 = \emptyset$ і $\rho(S_m, S_0) \geq d_{0m} > 0$, $m \in \{1, 2\}$. Будемо припускати, що елементарні поверхні S_m, $m \in \{0, 1, 2\}$, належать до класу Гельдера $\mathrm{H}^{2+\lambda}$, $\lambda \in (0, 1)$.

Нехай в областях $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ заданий дифузійний процес, що описується диференціальним оператором другого порядку вигляду

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) D_i u,$$

де $b_{ij}(x)$ та $a_i(x)$ – дійсні обмежені неперервні функції на $\mathbb{R}^d$ і матриця $\mathbf{b}(x) = (b_{ij}(x))$ – симетрична та невід'ємно визначена.

Ставиться питання про існування однопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає такий неперервний однорідний марковський процес в області $\mathcal{D}$, що його частини в підобластях $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$, збігаються із заданим в них дифузійним процесом, що керований оператором $\mathcal{L}$, а його поведінка на межах цих областей визначається заданими там різними варіантами загальної крайової умови типу Вентцеля [1]. Зокрема, ці умови передбачають, що на зовнішніх частинах меж підобластей шуканий процес володіє властивістю повного відбиття, а його продовження після потрапляння дифундуючої частинки на поверхню S_0 характеризується властивістю часткового відбиття у комбінації з дифузією вздовж цієї межі.

Для розв'язання даної проблеми нами застосовуються аналітичні методи. За такого підходу питання про існування шуканої напівгрупи практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність цієї задачі при деяких умовах на вихідні дані встановлено методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного фундаментального розв'язку рівномірно-параболічного оператора. Вивчено також деякі властивості, побудованого в описаний спосіб марковського процесу. Зокрема, показано, що породжений знайденою напівгрупою феллерівський процес можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М.І. Портенка [2].

Література

[1] А.Д. Вентцель, *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов*, Теория вероятн. и ее примен., **15** (Вып. 2, № 5) (1959), 172–185.

[2] М.І. Портенко, *Процеси дифузії в середовищах з мембранами*, Київ: Інститут математики НАН України, (1995), 200.

Про оптимальну страхову ставку

Чорний Р. О.

ЛНУ ім. Івана Франка

rostykchornyy@gmail.com

Кінаш О. М.

ЛНУ ім. Івана Франка

okinasch@yahoo.com

Знайдено оптимальну страхову ставку в умовах F-моделі [1, с.248], у випадку, коли виплати мають субекспоненційний розподіл [2, с.189 - 196]. Отримано формули для страхової ставки при різних розподілах виплат [3].

Література

[1] Королев В.Ю. *Математические основы теории риска.* / В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. - , М.:Физматлит, 2011. - 620 с.

[2] Зінченко Н.М. *Математичні методи в теорії ризику : навчальний посібник.* / Н.М. Зінченко. - , К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" , 2008. - 224 с.

[3] Чорний Р.О. *Одна задача визначення оптимальної страхової премії.* / Р.О. Чорний, А.Я. Білинський // Научные труды SWorld. – 2017 – випуск №47, Том 2. – С. 68 - 71

The nonlocal boundary problem for the differential-operator equation of the even order with the involution

Baranetskij Ya.O.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

baryarom@ukr.net

Ivasiuk I.Ya.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

vanobsb@gmail.com

Kopach M.I.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

kopachm2009@gmail.com

Introduction. The boundary value problems for linear differential-operator equations are used in the simulation of boundary value problems for differential equations with partial derivatives, in particular, in the study of nonlocal problems.

During recent years amount of publications, in which authors introduce and investigate an involution operator in various fields of the ordinary differential equations theory, partial differential equations theory, linear operators theory, T-invariant on some group of homeomorphisms theory, differential equations with operator coefficients theory, PT-symmetric operators theory, increased significantly.

Statement of problem. Let us make some notations and definitions. Let H is a separable Hilbert space; $A : D(A) \subset H \to H$ is the closed unbounded linear operator with the discrete spectrum $\sigma(A)$; $V(A)$ is the system of the eigenfunctions which forms the Riesz basis in the space H; $H(A^s) = \{h \in H : A^s h \in H\}$, $s \geq 0$; $W_1 = L_2((0,1), H)$; $D_x : W_1 \to W_1$ is a strong derivative in the space W_1; $W_2 = \{u \in W_1 : D_x^{2n} u \in W_1, A^{2n} u \in W_1\}$.

We consider the following boundary problem.

$$
\begin{aligned}
Lw = (-1)^n\ D_x^{2n} w(x) + \ A^{2n} w(x) \\
+ \sum_{j=1}^{n} a_j \left(D_x^{2j-1} w(x) - D_x^{2j-1} w(1-x) \right) = f(x), \quad x \in (0,1),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$\ell_j w = \ D_x^{m_j} w(0) + \ (-1)^{m_j}\ D_x^{m_j} w(1) = \varphi_j, \tag{2}$$

$$\ell_{n+j} w = \ D_x^{m_{n+j}} w(0) - (-1)^{m_{n+j}}\ D_x^{m_{n+j}} w(1) + l_j^1 w = \varphi_{n+j}, \tag{3}$$

$$\ell_j^1 w = \sum_{r=0}^{m_{n+j}} (b_{j,r,0} D_x^r w(0) + b_{j,r,1} D_x^r w(1)), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

By solution of the problem (1)—(4) we mean a function that satisfies equalities

$$
\begin{aligned}
&\|Lw - f; W_1\| = 0,\ \|l_q w - \varphi_q; H\left(A^{\beta_j}\right)\| = 0,\ \beta_q = 2n - m_q - \frac{1}{2}, \\
&q = 1,\ 2, ..., 2n,\ a_j, b_{j,r,s} \in \mathbb{R},\ b_{j,r,1} = (-1)^r b_{j,r,0},\ r = 0,\ 1, \ldots,\ m_{n+j}, \\
&s = 0, 1,\ j = 1,\ 2, \ldots, n,\ 0 \le m_n < m_{n-1} < \ldots < m_1 < 2n, \\
&0 \le m_{2n} < m_{2n-1} < \ldots < m_{n+1} < 2n.
\end{aligned}
$$

The main theorem. *Assumption.* If $\ell_j^1 = 0, j = 1, 2, \ldots, n$, then the conditions (2), (3) are self-adjoint and strongly regular according to Birkhoff .

Theorem 1. *Let us suppose that the assumption holds. Then for any* $f \in W_1, h_q \in H(A^{\beta_q}), q = 1, 2, \ldots, 2n$, *there exists a unique solution of the problem* (1)–(4).

References

[1] Baranetskij Y.O., Kalenyuk P.I., Kolyasa L.I., Kopach M.I. *The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with the involution.* Carpathian Math. Publ., **9** (2) (2017), 109–119. doi:10.15330/cmp.9.2.109-119

Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутовій області

Боднар Д. І.

Тернопільський національний економічний університет

bodnar4755@ukr.net

Біланик І. Б.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

i.bilanyk@ukr.net

Чорний В. З.

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

vzch@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_0, b_{i(k)} \in \mathbb{C}, i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i_1 i_2 \dots i_k \ : 1 \le i_k \le i_{k-1} \le ... \le i_0; \ k \ge 1; \ i_0 = N\}$, $N -$ фіксоване натуральне число.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД (1) задовольняють умови:*

$$\Re(b_{i(k)}) > 0, \ \left|\arg b_{i(k)}\right| < \theta, \ \theta < \frac{\pi}{2}, \ i(k) \in \mathcal{I},$$

$$\mu_k > N\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right), \ k \ge k_0 \ge 2$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{\mu_k}{N}\right)\cos\theta - 1\right) = \infty,$$

де

$$\mu_k = \min\left(\Re(b_{i(k)})\Re(b_{i(k-1)})\right), \ k = 2, 3, \dots$$

Тоді ГЛД (1) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_n - f_m| \leq \frac{2N}{\min\limits_{i_1} \Re b_{i_1}} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2s} \prod_{k=1}^{2s} \frac{1}{1 + \frac{\mu_{k+1}}{N}},$$

де $n > m$, $s = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Двосторонні інтегральні нерівності з частковою ліпшицієвістю

Богославець А. Я.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mfa@pu.if.ua

Копач М. І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
kopachm2009@gmail.com

В теоремах про інтегральні нерівності, що стосуються розв'язків рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))ds \tag{1}$$

найчастіше виступала вимога монотонності функції $k(t, s, x)$ щодо x. М.В. Азбелєвим [1] умова монотонності була замінена дещо слабшою умовою, яка ввійшла в літературу як $L_1(L_2)$-умова Азбелєва. На дещо іншому підході базувалось обгрунтування теорем про двосторонні оцінки розв'язків рівняння (1) в роботах М.С. Курпеля та Б.А. Шувара (див., напр., [2]).

Слідуючи ідеям із [2] рівняння (1) розглядаємо в припущенні, що $k(t, s, x) = K(t, s, x(s), x(s))$, де $K(t, s, u, v)$ не спадає по u і не зростає по v. Класи операторів $K(t, s, u, v)$ із зазначеною властивістю описані в [3]. Зокрема, можна взяти, що $k(t, s, x(s)) = p(t, s, x(s)) - q(t, s, x(s))$, де $p(t, s, x(s))$, $q(t, s, x(s))$ неспадні щодо x.

В пропонованій доповіді умову ізотонності $p(t, s, x(s))$, $q(t, s, x(s))$ за змінною x замінено припущенням про існування неперервних невід'ємних при $t, s \in [t_0, T]$ функцій $p_1(t, s)$ та $q_1(t, s)$, для яких при $y \leq z, y, z \in E$ ($E-$ банахів простір), $t, s \in [t_0, T]$ виконуються співвідношення

$$-p(t, s)(z - y) \leq p(t, s, z) - p(t, s, y),$$

$$-q(t, s)(z - y) \leq q(t, s, z) - q(t, s, y),$$

які назвемо частковою ліпшицієвістю. Встановлені теореми про строгі та нестрогі двосторонні оцінки для будь-якого розв'язку рівняння (1).

Література

[1] Н. Азбелєв, З. Цалюк *Об интегральных неравенствах*, Мат. зборник, **56** (3) (1962), 325–343.

[2] Н. Курпель, Б. Шувар *Двусторонние операторные неравенства и их применение*, К.: Наукова думка, 1980. – 267 с.

[3] П. Фолькман *Заметка об интегральных неравенствах типа Вольтерра*, Укр. мат. журнал, **36** (3) (1984), 393–395.

Necessary Conditions of Convergence for Branched Continued Fractions

Bodnar D. I.

Ternopil National Economic University

bodnar4755@ukr.net

Bubniak M. M.

QArea

mariabubnyak@gmail.com

Voznyak O. H.

Ternopil National Economic University

olvoz@ukr.net

Branched continued fractions (BCF) with positive elements

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{1}$$

is divergent if series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min b_{i(k)}$ is convergent. This result is not tolerated on the BCF (1) with complex elements. An example of a convergent BCF (1) is constructed, for which the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min |b_{i(k)}|$ is convergent. T. M. Antonova has established the necessary condition for the convergence of the BCF when belonging to some angular regions that contain the ray $(0;\infty)$ and are charged to this ray. V. Semashko, O. M. Sus established the necessary conditions of convergence of two-dimensional continued fractions, under certain additional restrictions. T. M. Antonov and O. M. Sus established the necessary conditions of the figural and the usual convergence of such fractions, too, under certain constraints.

For a 1-periodic BCF of the special form with real elements, a necessary condition of convergence is proved. It's almost sufficient.

Теорема 1. *If 1-periodic BCF with real elements*

$$1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_k}\frac{c_{i_k}}{1}$$

convergent then it's element satisfy following conditions: $c_q \geq -X_{q-1}^2/4$, *where* $X_q = \frac{1}{2}\sqrt{X_{q-1}^2+4c_q}$, $X_0 = 1$, $q = \overline{1,N}$.

Метрика на спектрі алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному просторі L_∞

Василишин Т. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

taras.v.vasylyshyn@gmail.com

Нехай L_∞ – це комплексний банахів простір усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій x на $[0,1]$ із нормою $\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Нехай Ξ – це множина усіх вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$. Функцію $f : L_\infty \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо для кожних $x \in L_\infty$ і $\sigma \in \Xi$

$$f(x\circ\sigma) = f(x).$$

Позначимо $H_{bs}(L_\infty)$ алгебру Фреше усіх цілих симетричних функцій $f : L_\infty \to \mathbb{C}$, які є обмеженими на обмежених множинах, оснащену топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Теорема 1. *Поліноми* $R_n : L_\infty \to \mathbb{C}$, $R_n(x) = \int_{[0,1]}(x(t))^n\,dt$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *утворюють алгебраїчний базис алгебри усіх неперервних симетричних поліномів на* L_∞.

Оскільки кожна функція $f \in H_{bs}(L_\infty)$ може бути подана у вигляді ряду Тейлора із неперервних симетричних однорідних поліномів, то f можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x) \cdots R_n^{k_n}(x).$$

Як наслідок, для кожного нетривіального неперервного гомоморфізма $\varphi : H_{bs} \to \mathbb{C}$, враховуючи, що $\varphi(1) = 1$, отримуємо

$$\varphi(f) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \varphi(R_1)^{k_1} \cdots \varphi(R_n)^{k_n}.$$

Отже, φ цілком визначається послідовністю своїх значень на поліномах $R_n : (\varphi(R_1), \varphi(R_2), \ldots)$. За неперервністю φ, послідовність $\{\sqrt[n]{|\varphi(R_n)|}\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою. З іншого боку,

Теорема 2. *Для кожної послідовності $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такої, що $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|} < +\infty$, існує $x_\xi \in L_\infty$ така, що $R_n(x_\xi) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Отже, для кожної послідовності $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такої, що $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|} < +\infty$, існує функціонал обчислення значення в точці $\varphi = \delta_{x_\xi}$ такий, що $\varphi(R_n) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки кожен такий функціонал є неперервним гомоморфізмом, то спектр (множина всіх неперервних комплекснозначних гомоморфізмів) алгебри $H_{bs}(L_\infty)$, який позначимо M_{bs}, можна ототожнити із множиною всіх послідовностей $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ таких, що $\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою.

Визначимо $\nu : L_\infty \to M_{bs}$ рівністю $\nu(x) = (R_1(x), R_2(x), \ldots)$. Нехай τ_∞ – це топологія на L_∞, породжена нормою $\|\cdot\|_\infty$. Визначимо відношення еквівалентності на L_∞ як $x \sim y \Leftrightarrow \nu(x) = \nu(y)$. Нехай τ – це фактор-топологія на $M_{bs} : \tau = \{\nu(V) : \ V \in \tau_\infty\}$.

Теорема 3. *$(M_{bs}, +, \tau)$ є абелевою топологічною групою, де “$+$” – це операція поточкового додавання послідовностей.*

Теорема 4. *Топологія τ на M_{bs} є метризовною і є породженою метрикою $d(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n - b_n|}$, де $a = (a_1, a_2, \ldots), b = (b_1, b_2, \ldots) \in M_{bs}$.*

Inequalities for the inner radii of symmetric non-overlapping domains

Vyhivska L.V.

Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine

liudmylavygivska@ukr.net

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be a set of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be an expanded complex plain or a sphere of Riemann. Let $r(B,a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$ (see, f.e. [1–3]). The inner radius of the domain B is associated with the generalized Green function $g_B(z,a)$ of the domain B by the relations

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Let U_1 be a unit circle $|w| \leq 1$.

The system of non-overlapping domains is called a finite set of arbitrary domains $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ such that $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{0,n}$.

The set of a points $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \, k = \overline{1,n}\right\}$ is called n-ray system if $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, and

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Denote by $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

The paper deals with the following problem stated in [1] by V.N. Dubinin. Let $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, where $B_0, \ldots, B_n$ are non-overlapping domains, and $B_1, \ldots, B_n$ are symmetric domains about the unit circle. Find the exact upper bound for $r^\gamma(B_0,0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$, where $r(B_k,a_k)$ is the inner radius of B_k with respect to a_k. For $\gamma = 1$ and $n \geq 2$ this problem was solved by L.V. Kovalev [2, 3]. For $\gamma > 1$ the problem was solved in the work [4]. In the present paper it is solved for $\gamma_n = 0,25n^2$ and $n \geq 5$ under the additional assumption that the angles between neighboring line segments $[0,a_k]$ do not exceed $2\pi/\sqrt{2\gamma}$.

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,49$, $\gamma_3 = 3,01$, $\gamma_n = 0,25\,n^2$. Then for any different points of a unit circle $|w| = 1$ such that $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ and for any different system of non-overlapping domains B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, where the domains B_k, $k = \overline{1,n}$, have symmetry with respect to the unit circle $|w| = 1$, the following inequality holds*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (1)$$

Equality in this inequality is achieved when a_k and B_k, $k = \overline{0,n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (2)$$

Література

[1] V. Dubinin, *The method of summetrization in the geometric function theory of a complex variable*, Uspekhi Math. Nauk, **49** (1) (1994), 3–76.

[2] L. Kovalev, *On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **6** (2000), 77–78.

[3] L. Kovalev, *On three nonoverlapping domains*, Dal'nevost. Mat. Zh., **1** (2000), 3–7.

[4] L. Vyhivska, *On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains*, Journal of Mathematical Sciences, **229** (1) (2018), 108–113.

Радіус-функція функціоналів на алгебрі $H_{\mathbb{P}}(X)$

Галущак С. І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
sv.halushchak@ukr.net

Нехай X – банахів простір. Позначимо $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ – послідовність алгебраїчно незалежних поліномів, таких що для кожного $n \in \mathbb{N}$ поліном P_n є неперервним n-однорідним поліномом. Нехай $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ – це алгебра усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Позначимо $H_{\mathbb{P}}(X)$ замикання алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ відносно метрики, породженої системою норм

$$\|f\|_r = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \le r\},$$

де r пробігає множину всіх додатних раціональних чисел.

Означення 0.1. Для $\varphi \in (H_{\mathbb{P}}(X))^*$ назвемо радіус-функцією $R(\varphi)$ інфімум усіх $r > 0$, таких що φ є неперервним відносно $\|\cdot\|_r$.

Теорема 1. *Радіус-функцію R на $(H_{\mathbb{P}}(X))^*$ можна обчислити за наступною формулою:*

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}},$$

де φ_n – звуження функціонала φ на простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}({}^nX)$, де $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}({}^nX)$ – простір усіх n-однорідних поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$.

Апроксимативні властивості сум Пуассона на класі W^1_∞

Гембарський М. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Грабова У. З.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Кальчук І. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

kalchuk_i@ukr.net

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Через $W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\| f^{(r)}(t) \|_\infty \le 1$.

Нехай функція $f \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — її ряд Фур'є. Розглянемо тригонометричні поліноми виду

$$P_{n-1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

які називають сумами Пуассона функції f порядку $(n-1)$.

Робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $n \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\big(W^1_\infty; P_{n-1}\big)_C = \sup_{f \in W^1_\infty} \big\|f(\cdot) - P_{n-1}(f;\cdot)\big\|_C. \tag{1}$$

Задачу про відшукання асимптотичної рівності для величини (1), згідно з О.І. Степанцем [1, с. 198], називають задачею Колмогорова–Нікольського для класу W^1_∞ і методу P_{n-1} в рівномірній метриці.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(W^1_\infty; P_{n-1}\big)_C = \frac{2}{\pi}\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Література

[1] Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 40, Ч. I. — 427 с.

On stability in the Borg–Hochstadt theorem for periodic Jacobi matrices

Golinskii L. B.

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, 47 Science ave., Kharkiv 61103, Ukraine

golinskii@ilt.kharkov.ua

The main object under consideration is a double infinite, p-periodic Jacobi matrix

$$J = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & a_{-1} & b_0 & a_0 & & & \\ & & a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & & & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j > 0,$$

$a_{j+p} = a_j$, $b_{j+p} = b_j$, $j \in \mathbb{Z}$. It generates in an obvious way a bounded, self-adjoint, linear operator J on the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{Z})$. Its spectrum $\sigma(J)$ is known to have a banded structure, i.e., it is composed of p *spectral bands* (closed intervals)

$$\sigma(J) = \bigcup_{j=0}^{p-1} [\alpha_j, \beta_{j+1}], \quad \alpha_0 < \beta_1 \le \alpha_1 < \ldots < \beta_{p-1} \le \alpha_{p-1} \le \beta_p,$$

interspersed with (interior) *gaps* $\gamma_j := (\beta_j, \alpha_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$ of the length $|\gamma_j| = \alpha_j - \beta_j$, and $\alpha_j = \beta_j$ means that the gap is closed (the adjacent bands merge).

The well-known result of Borg–Hochstadt [2] states that all gaps in the spectrum of a p-periodic Jacobi matrix J are closed if and only if $a_j = a_0$, $b_j = b_0$ for all $j \in \mathbb{Z}$. The problem we address here is stability (or a quantitative version) of this result. We show that for such matrices with the "small" variation of parameters a's and b's, the gaps in their spectra are "small", and vice versa.

Література

[1] H. Hochstadt, *On the theory of Hill's matrices and related inverse spectral problems*, Linear Alg. Appl., **11** (1975), 41–52.

Hilbertian structures on spectra of algebras of symmetric analytic functions on ℓ_1

Holubchak O. M.

Ivano-Frankivsk College of Lviv Agrarian University

oleggol@ukr.net

Zagorodnyuk A. V.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

andriyzag@yahoo.com

A function f on complex ℓ_1 is said to be *symmetric* if for every permutation σ on positive integers $\mathbb{N}$, $f(\sigma(x)) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) = f(x), x \in \ell_1$.

In the talk we will discuss algebraic and topological structures on spectra of algebras of symmetric analytic functions on ℓ_1. In particular, we consider the completion of the algebra of symmetric polynomials with respect to a Hilbert norm and related structures on its spectrum.

Узагальнення теореми Юнга і його застосування в теорії універсальних кінематик

Грушка Я.І.

Інститут Математики НАН України

grushka@imath.kiev.ua

В 1910 році В.Г. Юнгом в роботі [1] була доведена така теорема:

Теорема А. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ є нарізно неперервною і для кожного фіксованого $y \in \mathbb{R}$ функція $f(\cdot, y)$ є монотонною, то функція f є неперервною за сукупністю змінних.*

В 1969 році в роботі [2] цю теорему було узагальнено для випадку нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$:

Теорема Б. *Нехай функція $f : \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \mathbb{R}$ ($d \in \mathbb{N}$) є неперервна за кожною змінною нарізно. Якщо $f(t_1, \cdots, t_d, \tau)$ є нарізно монотонною відносно кожної змінної t_i ($1 \le i \le d$), то функція f є неперервною на $\mathbb{R}^{d+1}$.*

Виявляється, що зазначені вище результати можна узагальнити на абстрактні топологічні простори.

Нехай $\mathscr{X}$ і $\mathscr{Y}$ — топологічні простори. Через $\mathbf{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ будемо позначати множину всіх неперервних функцій з $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Нехай, $(\mathbf{T}_1, \le_1)$ і $(\mathbf{T}_2, \le_2)$ — лінійно упорядковані множини. Надалі будемо вважати, що $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$ є топологічними просторами відносно *порядкової топології*, породженої відношеннями порядку $\le_1$ і $\le_2$ відповідно (нагадаємо, що означення порядкової топології можна знайти в [3, стор. 314]). Також будемо вважати, що множина $\mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}$ є топологічним простором відносно *тихоновської* топології на декартовому добутку топологічних просторів.

Для довільного відображення $\boldsymbol{f} : \mathbf{T}_1 \times \mathscr{X} \mapsto \mathbf{T}_2$ і довільної точки $(t, x) \in \mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}$ будемо використовувати позначення, $\boldsymbol{f}^{(t)}(x) := \boldsymbol{f}_{(x)}(t) := \boldsymbol{f}(t, x)$. Відображення $\boldsymbol{f}$ будемо називати ***нарізно неперервним*** якщо $\boldsymbol{f}^{(t)} \in \mathbf{C}(\mathscr{X}, \mathbf{T}_2)$ і $\boldsymbol{f}_{(x)} \in \mathbf{C}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$ для довільної точки $(t, x) \in \mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}$. Множину всіх нарізно неперервних відображень $\boldsymbol{f} : \mathbf{T}_1 \times \mathscr{X} \mapsto \mathbf{T}_2$ будемо позначати через $\mathbf{CC}(\mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}, \mathbf{T}_2)$. Будемо говорити, що функція $f : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$ є ***неспадною*** (***незростаючою***) на $\mathbf{T}_1$ якщо для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ з нерівності $t \le_1 \tau$ випливає нерівність $f(t) \le_2 f(\tau)$ ($f(\tau) \le_2 f(t)$) відповідно. Функцію $f : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$, яка є неспадною або незростаючою на $\mathbf{T}_1$ будемо називати ***монотонною***.

Теорема 1. *Якщо $\boldsymbol{f} \in \mathbf{CC}(\mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}, \mathbf{T}_2)$ і функція $\boldsymbol{f}_{(x)}(t) = \boldsymbol{f}(t, x)$ є монотонною для довільного фіксованого $x \in \mathscr{X}$, то функція $\boldsymbol{f}$ є неперервним відображенням з топологічного простору $\mathbf{T}_1 \times \mathscr{X}$ в $\mathbf{T}_2$.*

Можна довести, що теореми А і Б є наслідками теореми 1.

Також в доповіді планується обговорити деякі застосування теореми 1 до одностайно-поступальних перетворень координат, введених в роботах [4, 5].

Література

[1] W. Young, *A note on monotone functions*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics (Oxford Ser.) **41** (1910), 79–87.

[2] R.L. Krusee and J.J. Deely, *Joint Continuity of Monotonic Functions*, The American Mathematical Monthly **76** (1) (1969), 74–76, `http://www.jstor.org/stable/2316804`.

[3] Г. Биркгоф, *Теория Решёток*, Москва: "Наука", (1984), 567 с.

[4] Грушка Я.І., *Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках*, Буковинський математичний журнал, **5** (3-4) (2017), 56–70; `https://www.researchgate.net/publication/322685969`.

[5] Грушка Я.І., *Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках*, Preprint: ResearchGate, (2017), 15 с.; DOI: 10.13140/RG.2.2.11087.59041; `https://www.researchgate.net/publication/322722045`.

Моногенні функції та одновимірність системи інтегральних рівнянь у крайовій бігармонічній задачі

Грищук С. В.

Інститут математики НАН України, м. Київ

serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

Розглянемо алгебру $\mathbb{B} := \{e_1c_1 + e_2c_2 : c_k \in \mathbb{C}, k + 1, 2\}$, $e_1^2 = e_1$, $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$, $e_2^2 = e_1 + 2ie_2$ (i — уявна комплексна одиниця) над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Нехай D — область в декартовій площині xOy, $D_\zeta := \{xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mathbb{B}$. Кажемо, що $\mathbb{B}$-значна функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}, \Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2$, $\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta$, $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, є *моногенною* в D_ζ, тоді і тільки тоді, коли Φ має класичну похідну в кожній точці D_ζ. Кожна U_k, $k = \overline{1,4}$, є бігармонічною функцією в D.

Тоді крайова *бігармонічна задача* зі знаходження бігармонічної функції $u\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ за заданими граничними значеннями похідних $\frac{\partial u}{\partial x}|_{\partial D}$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_{\partial D}$ зводиться до знаходження моногенної функції Φ, що визначається з інтегральних рівнянь Фредгольма (див. [1]), при цьому межа ∂D задовольняє певні, достатньо широкі, умови гладкості.

Знайдено достатні умови у термінах компонент U_k, $k = \overline{1,4}$, (див. [2]), за яких зазначена система рівнянь Фредгольма з нульовими крайовими значеннями має розмірність розв'язків рівну одиниці.

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

Література

[1] Gryshchuk S. V., Plaksa S. A., *Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem*, Math. Meth. Appl. Sci., **39** (11) (2016), 2939 – 2952.

[2] Грищук С. В., *Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Аналіз та застосування/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2017. — **14**, № 1. — С. 128 – 139.

Інтерполяція функцій багатьох змінних дробом типу Тіле

Демків І. І

Національний університет "Львівська політехніка"

ihor.demkiv@gmail.com

Копач М. І.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

kopachm2009@gmail.com

Узагальненням дробів Тіле на випадок функцій багатьох змінних, переважно двох, займалися багато авторів. Проте, всі дробові інтерполянти, запропоновані у роботах, на відміну від класичного дробу Тіле, мають суттєвий недолік: при заміні останнього інтерполяційного вузла на довільний елемент з відповідної множини визначення інтерполянт не перетворюється у звичайну функцію, що інтерполюється.

У роботі [1] одержано узагальнення дробів Тіле на випадок інтерполювання нелінійних функціоналів, визначених на лінійному топологічному просторі X, які задовольняють інтерполяційним умовам на каркасі $x_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, і лише одна умова виконувалась на континуальному вузлі $x_n(z,\xi) = x_{n-1}(z) + H(z-\xi)\left(x_n(z) - x_{n-1}(z)\right)$, $\xi \in [0,1]$, $H(z)-$функція Хевісайда.

Розглянемо випадок коли $X = R^n$, тобто інтерполяцію функцій багатьох змінних дробом типу Тіле. Тоді функціонал $F(x) = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є заданим своїми значеннями $f(\vec{x}_i)$ у вузлах $\vec{x}_i = \left({x_1}^{(i)}, {x_2}^{(i)}, ..., {x_n}^{(i)}\right)$, $i = 0, 1, ..., n,$. Інтерполяційний дріб типу Тіле буде мати такий вигляд

$$T_n\left(x\right) = F\left(x_0\right) + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{\int\limits_0^1 {F_i}'\left(x_{i-1} + \tau_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) d\tau_i\left(x - x_{i-1}\right)}{1},$$

$$l_i\left(x\right) = \int\limits_0^1 {F_i}'\left(x_{i-1} + \tau_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) d\tau_i\left(x - x_{i-1}\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\nabla f_i\left(\vec{x}_{i-1} + \tau_i\left(\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\right)\right), \left(\vec{x} - \vec{x}_{i-1}\right)\right) d\tau_i = l_i\left(\vec{x}\right),$$

$$F_i(x) = \mathop{D}_{p=1}^{i} \frac{l_{i-p}\left(x\right)}{-1} = \mathop{D}_{p=1}^{i} \frac{l_{i-p}\left(\vec{x}\right)}{-1} = f_i\left(\vec{x}\right),$$

$$l_0\left(x\right) = F\left(x_0\right) - F\left(x\right) - 1 = f\left(\vec{x}_0\right) - f\left(\vec{x}\right) - 1 = l_0\left(\vec{x}\right).$$

Тут ∇ – градієнт, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у R^n.

Література

[1] В.Л. Макаров, І.І. Демків *Узагальнення дробу Тіле*, Доповіді НАН України, (2) (2016), 17–24.

Про збіжність регулярних багатовимірних C-дробів з нерівнозначними змінними

Дмитришин Р. І.

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”

dmytryshynr@hotmail.com

Нехай N – фіксоване натуральне число,

$$\mathcal{I}_k = \left\{i(k) : \ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \ 1 \le i_p \le i_{p-1}, \ 1 \le p \le k, \ i_0 = N\right\}, \ k \ge 1,$$

– множини мультиіндексів. Досліджується збіжність регулярного багатовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними

$$1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)} z_{i_3}}{1} + \cdots, \tag{1}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, і оберненого до нього

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)} z_{i_3}}{1} + \cdots. \tag{2}$$

Правильними є такі теореми:

Теорема 1. *Регулярний багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (1), де*

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{l_{i_{k+1}}|a_{i(k+1)}|}{(1-g_{i(k+1)})(1+\cos(\arg(a_{i(k+1)})))} \le g_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1,$$

$$\arg(a_{i(k)})=\varphi,\ -\pi<\varphi<\pi,\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 2, \tag{3}$$

$$l_k>0,\ 1\le k\le N,\ 0<g_{i(k)}<1,\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1, \tag{4}$$

збігається до голоморфної функції в області

$$\mathcal{D}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,M}=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:\ |z_k|-\mathrm{Re}(z_k)<l_k,\ |z_k|<M,\ 1\le k\le N\right\}$$

для кожної сталої $M>0$, причому збіжність буде рівномірною на компактах цієї області.

Теорема 2. *Регулярний багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (1), де $a_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 2$, задовольняють умови*

$$|a_{i(k)}|\le g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})(1+\cos(\arg(a_{i(k)})))/l_{i_k},\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 2,$$

і умови (3) та (4), збігається до голоморфної функції в області

$$\mathcal{O}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,M}=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:\ \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k|-\mathrm{Re}(z_k)}{l_k}<1,\ |z_k|<M,\ 1\le k\le N\right\}$$

для кожної сталої $M>0$, причому збіжність буде рівномірною на компактах цієї області.

Теорема 3. *Регулярний багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (2), де $a_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 2$, задовольняють умови*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{l_{i_k}|a_{i(k)}|}{(1-g_{i(k)})(1+\cos(\arg(a_{i(k)})))} \le g_{i(k-1)},\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1,$$

$$\arg(a_{i(k)})=\varphi,\ -\pi<\varphi<\pi,\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1, \tag{5}$$

$$l_k>0,\ 1\le k\le N,\ 0<g_{i(k-1)}<1,\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1, \tag{6}$$

збігається до голоморфної функції в області

$$\mathcal{D}_{l_1,l_2,\ldots,l_N}=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:\ |z_k|-\mathrm{Re}(z_k)<l_k,\ 1\le k\le N\right\},$$

причому збіжність буде рівномірною на компактах цієї області.

Теорема 4. *Регулярний багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (2), де $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, задовольняють умови*

$$|a_{i(k)}| \leq g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})(1 + \cos(\arg(a_{i(k)})))/l_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

і умови (5) та (6), збігається до голоморфної функції в області

$$\mathcal{O}_{l_1,l_2,\ldots,l_N} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k)}{l_k} < 1,\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

причому збіжність буде рівномірною на компактах цієї області.

Повільно зростаючі розподіли з дискретним носієм

Фаворов С.Ю.

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Раніше нами були з'ясовані деякі умови, за якими носій дискретної міри у скінченновимірному просторі є чистим кришталем, тобто є скінченним об'єднанням зсувів решітки максимального рангу. У роботі ми розповсюджуємо ці результати на розподіли повільного зростання з дискретним носієм.

Оцінки ортопроекційних поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у просторі L_∞

Федуник-Яремчук О. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

fedunyk@ukr.net

Соліч К. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

solichkatia@gmail.com

Досліджуються класи $B^\Omega_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних [1], які є аналогами відомих класів Бєсова. Нехай $\Omega(t)$ – функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}, \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де розглядаються логарифми за основою 2 і $\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}$. Вважаємо також, що $0 < r < l$. Це означає, що для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2].

Нехай $L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum\limits_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i$ – ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^\Omega_{p,\theta}$ у просторі $L_\infty(\pi_d)$, які визначаються наступним чином

$$d^\perp_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_\infty) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in B^\Omega_{p,\theta}} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_\infty. \tag{2}$$

Сформулюємо один із одержаних результатів.

Розглянемо випадок $b_1 \leq \ldots \leq b_\nu < r < b_{\nu+1} \leq \ldots \leq b_d$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)-$ *функція виду* (1). *Тоді при* $\frac{1}{p} < r < l$, $\frac{b_j}{rp} > 1, j = \nu+1, \ldots, d$, *має місце співвідношення*

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_\infty) \asymp M^{-r+\frac{1}{p}} \big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)\left(r+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Цей результат для класів H_∞^{Ω} одержаний М.М. Пустовойтовим [3].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами p, $r, b_1, \ldots, b_d$ [4].

Література

[1] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.

[2] Н.К.Бари, С.Б.Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[3] Н.Н.Пустовойтов, *Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители*, Anal. Math., **34** (2008), 187–224.

[4] О.В.Федуник-Яремчук, К.В.Соліч *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у просторі L_∞*, Укр. мат. вісник, **14** (2017), 245–260.

Про зв'язок між стохастичним інтегруванням та віківським численням в аналізі білого шуму Леві

Фрей М. М.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

mashadyriv@ukr.net

Качановський М. О.

Інститут математики НАН України

nkachano@gmail.com

У зв'язку із розвитком фізики та математики існує потреба розвивати теорію основних і узагальнених функцій нескінченої кількості змінних. Один з найбільш успішних підходів до побудови такої теорії полягає у конструюванні просторів щойно згаданих функцій таким чином, що природне спарювання між основними та узагальненими функціями породжується інтегруванням відносно деякої ймовірнісної міри на дуально-ядерному просторі. Спочатку це була стандартна гауссівська міра на просторі Шварца узагальнених функцій, відповідна теорія називається гауссівський аналіз білого шуму (див. напр., [3, 5]); з часом були реалізовані численні узагальнення. Зокрема, важливі для застосувань результати можна отримати, якщо у якості вищезгаданої міри використати так звану міру білого шуму Леві, відповідна теорія називається аналіз білого шуму Леві (див. напр., [1]).

Важлива роль у гауссівському аналізі належить так званій властивості хаотичного розкладу (ВХР): грубо кажучи, кожну квадратично інтегровну відносно гауссівської міри випадкову величину можна розкласти у ряд стохастичних інтегралів Іто від невипадкових функцій. У аналізі Леві нема ВХР (крім гауссівського та пуассонівського частинних випадків), але існують різні узагальнення цієї властивості. Використовуючи ці узагальнення, можна будувати різні простори основних і узагальнених функцій. І у кожному випадку треба уводити природний добуток (віківський добуток) на просторах узагальнених функцій, та вивчати пов'язані питання.

Ми розглядаємо узагальнення ВХР, запропоноване Є. В. Литвиновим [6], та відповідні простори регулярних узагальнених функцій. Нашою метою є вивчити взаємозв'язок між стохастичним інтегруванням [4] та віківським численням [2] на цих просторах. Точніше, ми розглядаємо віківське множення під знаком стохастичного інтеграла, і будуємо формальне представлення розширеного стохастичного інтеграла через інтеграл Петтіса, використовуючи віківський добуток. Як приклади ми розглядаємо деякі стохастичні рівняння з нелінійностями віківського типу.

Дані дослідження можна розглядати як внесок у подальший розвиток аналізу білого шуму Леві.

Література

[1] Di Nunno G., Oksendal B., Proske F., *White noise analysis for Levy processes*, J. Funct. Anal., **206** (1) (2004), 109–148.

[2] Frei M.M., *Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Levy white noise analysis*, Carpathian Mathematical Publications, **10** (2) (2018), ?–?.

[3] Hida T., *Analysis of Brownian Functionals*, In: Carleton mathematical lecture notes, **Vol. 13.** CarletonUniversity, (1975).

[4] Kachanovsky N.A., *Extended stochastic integrals with respect to a Levy process on spaces of generalized functions*, Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society, **10** (2013), 169–188.

[5] Kondratiov Yu.G., *Generalized Functions in Problems of Infinite-dimensional Analysis*, Ph. D. Thesis.Kyiv, (1978) (Russian).

[6] Lytvynov E.W., *Orthogonal decompositions for Levy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **6** (1) (2003), 73–102.

Алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$.

Загороднюк А.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

andriyzag@yahoo.com

Кравців В.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

maksymivvika@gmail.com

Розглянемо простір $\ell_1 \oplus \ell_\infty$, елементами якого є вектори $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$, де $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_\infty$. Норму на цьому просторі визначимо наступним чином

$$||(x,y)||_{\ell_1 \oplus \ell_\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \max_{i \in \mathbb{N}} x_i.$$

Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

У доповіді буде доведено, що алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ утворюють поліноми вигляду

$$H^{p,0}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^p,$$

$$H^{p,q}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^p y_i^q,$$

де $p, q \in \mathbb{N}, p \neq 0$.

Комплекснозначні моделі в економіці

Ільків В.І.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університут імені Василя Стефаника"

vika25051996@ukr.net

Кравців В.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університут імені Василя Стефаника"

vmaksymivvika@gmail.com

Комплексні змінні та їх функції можуть використовуватися у багатьох задачах економіко-математичного моделювання. Це дозволить представити деякі пари економічних показників, які є відображеннями деяких економічних процесів або явищ, у вигляді комплексних змінних. При формуванні комплексних змінних з пар економічних показників, вони будуть розглядатися як одна змінна. Ця змінна буде містити в собі інформацію про дві її складові величини та відображатиме функціональний вплив цих складових на деякий результат. Для того, щоб дві економічні змінні могли бути об'єднані в одну комплексну, потрібно виконання двох умов:

1) ці дві економічні змінні повинні бути різними храктеристиками одного економічного явища;

2) ці дві економічні змінні повинні бути однієї розмірності. [1]

При цьому підході немає сенсу шукати економічне значення уявної частини, так як i об'єднує дві економічні змінні, а дії з нею є новим математичним правилом, яке в економіці почало використовуватися недавно.

Таким чином, завтосування моделей комплексних змінних розширює інструментальну базу в економіці. Актуальність використання теорії комплексних чисел в економіці обумовлена високим значенням проблеми удосконалення математичних методів за рахунок використання теорії комлексних чисел, що дозволить отримати не лише більш компактний запис, а і включити в економіко-математичну модель детальнішу інформацію про об'єкт моделювання.

Література

[1] Светуньков И.С., *Производственные функции комплексных переменных в экономическом анализе*, Санкт-Петербург, 2008 р. , 16-18 ст.

Деякі властивості інтеграла Фруллані

Івасик С. П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mfa@pu.if.ua

Марцінків М. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mariadubey@gmail.com

У пропонованій доповіді будуть розглядатися деякі властивості та застосування одного з типів інтегралів залежних від параметра, а саме інтеграл Фруллані

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

До такого типу інтегралів, з допомогою елементарних перетворень, диференціювання та інтегрування по параметру можна звести багато інших невласних інтегралів. Наведемо умови та формули для обчислення інтегралу Фруллані:

1) Якщо $f(x) \in C[0, +\infty]$ та $\forall A > 0 \exists \int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$, то виконується наступна формула:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) (\alpha > 0, \beta > 0).$$

2) Якщо $f(x) \in C[0, +\infty]$ та $\exists \lim_{x\to\infty} < +\infty$, то виконується така рівність:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) (\alpha > 0, \beta > 0).$$

3) Якщо $f(x) \in C[0, +\infty]$ та $\forall A > 0 \exists \int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ і $\lim_{x\to\infty} < +\infty$, то справедливе співвідношення:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(+\infty) \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Інтеграли Фруллані мають не тільки теоретичний характер – для обчислення певного типу інтегралів Рімана, але й практичне значення - вони застосовуються в економіці в теорії мартингалів.

Література

[1] А. Прудников, Ю. Брычков, О. Маричев *Интегралы и ряды*, М.: Наука, 1981. – 800 с.

[2] Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. "Frullani's Integrals."§12.16 in Methods of Mathematical Physics, 3rd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 406-407, 1988.

The modification of one multiparametric aggregation-iterative algorithm for integral equations

Ivasiuk I.Ya.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
vanobsb@gmail.com

Kopach M.I.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
kopachm2009@gmail.com

Kostyshyn L.P.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
lyubapav@gmail.com

Obshta A.F.

Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
obshta2002@gmail.com

We consider equation

$$x(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} k_j(t,s)x(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds \qquad (1)$$

in the class of square integrated functions on interval (t_1, t_2) with additional equation

$$y_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta_j(t,s)x(s)ds - \\ - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)f(t)dt, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

where y_i is real valued variables, λ_{ij} is real constants and $\varphi_j(t), \beta_j(t,s)$ is square integrated functions in respective area chosen in a such way that following equalities hold:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(k_j(t,s) + \beta_j(t,s)\right) \varphi_j(t)dt = \lambda_{ij}\varphi_j(s), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

We construct and investigate algorithm of approximate solving of equation (1). In particular it is shown that if $k_j(t,s) = \psi_j(t)\varphi_i(s)$ then if we chose starting approximation $\left\{x^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)}\right\}$ in certain way and inequality $||A(x)|| \leq q < 1$ holds for the operator $H(x)\omega$ which is constructed by formula

$$H(x)w = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{N} \psi_j(t)\varphi_j(s) + k_0(t,s) \right) \omega(s)ds \\ + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j(x)}{1-\lambda_{jj}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)\omega(s)ds + \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(s)\omega(s)ds,$$

where $a_j(x^{(n)}) = a_j(t, x^{(n)}(t))$ is square integrated on (t_1, t_2) functions, investigated iterative process tends to components of solution $\{x^*, y_1^*, \ldots, y_N^*\}$ of system (1), (2) not slowly, then convergence speed of geometrical progression with denominator q.

Here we essentially use method of space "sinking" introduced by B.A. Shuvar and expanded by its followers in which the starting equation consider in wider space (see for example [1]).

References

[1] Shuvar B.A., Kopach M.I., Obshta A.F. Aggregative-iterative decomposition of operator equations. Ivano-Frankivs'k, SIMYK, 2016.

Нижні оцінки для площі образу круга

Кліщук Б. А.

Інститут математики НАН України

kban1988@gmail.com

Салімов Р. Р.

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com

Нехай Γ — сім'я кривих γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \ \geqslant\ 1$$

для всіх $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді *p–модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \ = \ \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\,dx\,dy\,.$$

Нехай D — область в комплексній площині $\mathbb{C}$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ є *Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля*, якщо співвідношення

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma) \ \leqslant\ \int\limits_{D} Q(z)\,\varrho^p(z)\,dx\,dy$$

виконується для кожної сім'ї Γ кривих в D і кожної допустимої функції $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Теорема. *Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{C}$ і $f : D \to D'$ — Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > 2$, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{z_0\})$. Тоді для всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ справедлива оцінка*

$$|fB(z_0, r)| \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}},$$

де $B(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ *і* $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0,r)} Q(z)\,|dz|$ — *середнє інтегральне значення функції* Q *по колу* $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Problem with integral conditions for system of partial differential of equations of second order

Kuduk G.

Faculty of Mathematical of Nature Scientes University of Rzeszow, Poland, Graduate of University of Rzeszow, Poland

gkuduk@onet.eu

Let $H(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ be a class of certain function, K_M be a class of quasi-polynomials of the form

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x)\exp[\alpha_i x], \tag{1}$$

where $Q_i(x)$ are given polynomials, $M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_i \in M$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$ Each quasi-polynomial (1) defines a differential operator $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$ of finite order on the class of certain function, in the form

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\exp\left[\alpha_i \frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\Bigg|_{\lambda=0}.$$

Let be $T_{kjp}(t,\lambda) = \widetilde{l}\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)W(t,\lambda)$, $j = 1,...,n$, $p = 1,...,n$, $k = 1,2$, satisfies of system of equations

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)T_j(t,\lambda) = 0, \quad i = 1,...,n,$$

where $\left(\frac{d}{dt},\lambda\right) = \delta_{ij}\frac{d^2}{dt^2} - a_{ij}\frac{d}{dt} - b_{ij}$, δ_{ij} - symbol Kroneckera. Let $L(\lambda,\nu) = \|L(\nu,\lambda)\|_{ij=1,...,n}$, $\psi(\nu,\lambda) = \det L(\nu,\lambda)$, $\widetilde{l}\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)$ - algebraic component element $\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)$ is matrix $L(\lambda,\nu)$. $W(t,\lambda)$ is a solution of the problem $\psi\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)W(t,\lambda) = 0$, satisfies conditions $W^j(0,\lambda) = \delta_{j,2n-1}$, $j = 2n-1$, let be $\eta(\lambda)$ ba a certain function. Denote be

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\} \tag{2}$$

In the strip $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider problem

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} U_j(t,x) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^T t^k U_i(t,x)dt = \varphi_{ki}(x), \quad k = 0,1, \quad i = 1,...,n, \tag{4}$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, are differential expressions with entirel functions $a_{ij}(\lambda) \neq 0, b_{ij}(\lambda) \neq 0$

Theorem. Let $\varphi_{ki}(x) \in K_{L,M}$, $i = 1,...,n$, $k = 1,2$, then the class $K_{M\backslash P}$ exist and unique solution of the problem (3), (4), where P is set (2). Solution of the problem (3), (4) can be represented in the form

$$U_j(t,x) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=1}^{n} \varphi_{kp}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}T_{kjp}(t,\lambda)\exp[\lambda x]\right\}\Bigg|_{\lambda=0}.$$

Solution of the problem (3), (4) according to the differential-symbol [1, 1, 3] method exists and uniquess in the class of quasi-polynomials.

References

[1] *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M.* Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method. — Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. —292 p. (in Ukrainian).

[2] *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G.* Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions // Math. Methods and Phys.- Mech. Polia. 2015. Vol. 58, no. 1. P. 7–19.

[3] *Kalenyuk P. I., Kuduk G., Kohut I. V., and Nytrebych Z. M.* Problem with integral conditiond for differential-operator equation.// J. Math. Sci. —2015.— Vol. 208, no. 3. —P. 267–276.

[4] A. Author, *Name of the paper*, Comp. Math., **23** (2) (1971), 185–188.

On exceptional set in Wiman's type inequality for random entire functions of several variables

Kuryliak A.O.

Ivan Franko National University of L'viv

andriykuryliak@gmail.com

Skaskiv O.B.

Ivan Franko National University of L'viv

olskask@gmail.com

Tsvigun V.L.

Ivan Franko National University of L'viv

12lvan.n@ukr.net

By $\mathcal{E}^p$ we denote the class of entire functions $f(z)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_nz^n$ such that for any $j\in\{1,2,\ldots,p\}\colon \frac{\partial}{\partial z_j}f(z)\not\equiv 0$ in $\mathbb{C}^p$. Here $\|n\|=n_1+\ldots+n_p$ $(p\geq 2)$, $z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p$. For $r=(r_1,r_2,\ldots,r_p)\in\mathbb{R}^p_+$ and $f\in\mathcal{E}^p$ we denote

$$\Delta_r=\{t\in\mathbb{R}^p_+\colon t_j\geq r_j, j\in\{1,\ldots,p\}\},$$
$$\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n\colon n\in\mathbb{Z}^p_+\},\ M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z_j|\leq r_j,\ j\in\{1,\ldots,p\}\}.$$

Let h be positive non-deceasing in each variables function $h\colon\mathbb{R}^p_+\to\mathbb{R}_+$ such that there exists $r_0\in\mathbb{R}^p_+$, $\nu(\Delta_{r_0}):=\int_{\Delta_{r_0}}h(r)\prod_{j=1}^p\frac{dr_j}{r_j}=+\infty$. We say that $E\subset\mathbb{R}^p$ is *a set of asymptotically finite h-logarithmic measure*, if there exists $r_0\in\mathbb{R}^p$ such that $\nu_h(E\cap\Delta_{r_0}):=\int_{E\cap\Delta_{r_0}}h(r)\prod_{j=1}^p\frac{dr_j}{r_j}<+\infty$.

Theorem 1. *For every $f\in\mathcal{E}^p$ and any $\delta>0$ there exists a set $E=E(f,\delta)$ of asymptotically finite h-logarithmic measure such that for all $r\notin E$*

$$M_f(r)\leq\mu_f(r)(h(r))^{(p+1)/2+\delta}\ln^{p/2+\delta}(\mu_f(r)h(r))\prod_{j=1}^p\ln^{p/2+\delta}r_j.$$

For every $f\in\mathcal{E}^p$ denote by $K(f,Z)$ class of entire functions of the form $f(z,\omega)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_nZ_n(\omega)z^n$, where $\{Z_n(\omega)\}$ is a Rademacher sequence, i.e. a sequence of independent random variables such that $\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega)=-1\}=\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega)=1\}=0,5$ $(n\in\mathbb{N})$.

Theorem 2. *For $f \in \mathcal{E}^p$ and any $\delta > 0$ almost surely in $K(f, Z)$ there exists a set $E = E(f, \delta)$ of asymptotically finite h-logarithmic measure such that for all $r \notin E$*

$$M_f(r, \omega) \le \mu_f(r)(h(r))^{(p+1)/4+\delta} \ln^{p/4+\delta}(\mu_f(r)h(r)) \prod_{j=1}^{p} \ln^{p/4+\delta} r_j.$$

Поліноміальні Ω-ультрарозподіли

Лозинська В.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України

vlozynska@yahoo.com

Простір Ω–ультрарозподілів $\mathcal{E}'_\Omega$ [3] є ядерним простором Фреше. З результатів праць [1], [2] слідує, що можна побудувати мультиплікативну алгебру $P(\mathcal{E}'_\Omega)$ неперервних скалярних поліномів на просторі $\mathcal{E}'_\Omega$, а також сильно спряжену до неї згорткову алгебру $P'(\mathcal{E}'_\Omega)$ поліноміальних Ω-ультрарозподілів. Описано тензорну структуру таких поліноміальних алгебр. Крім того, описано узагальнену операцію диференціювання та групу зсувів у просторі поліноміальних Ω–ультрарозподілів.

Література

[1] O. Lopushansky, *Polynomial ultradistributions: Differentiation and Laplace transformation*, Banach Center Publications IM PAN, **88** (2010), 195-209.

[2] O. Lopushansky, S. Sharyn, *Polynomial ultradistributions on* $\mathbb{R}_+^E$, Topology, **48** (2009), 80-90.

[3] А.В. Абанин, *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.* М. "Наука (2007), 222 с.

Розриви нарізно неперервних функцій на кривих у площині Зорґенфрея

Маслюченко В. К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
v.maslyuchenko@gmail.com

Філіпчук О. І.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
o.filipchuk@chnu.edu.ua

В останній час у зв'язку з активним вивченням нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в неметризовних просторах (див. [1] і вказану там літературу) виникло питання про опис множини $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ площини Зорґенфрея у площину Бінґа (див. [2], проблема 1). У [2] була анонсована теорема про те, що для кожного $b \in \mathbb{L}$ існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у якого $D(f) = \mathbb{L} \times \{b\}$. Тут ми подамо розвиток цього результату, в якому йдеться вже про суцільні розриви на кривих $y = g(x)$ у площині Зорґенфрея $\mathbb{L}^2$. Означення прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$ і площини Бінґа $\mathbb{B}$ можна знайти у монографії Р. Енгелькінга [3, с. 47; с. 518].

Нехай $P = [a, b) \times [c, d)$ – невироджений напіввідкритий прямокутник у площині $\mathbb{L}^2$ і Z – довільний топологічний простір. Розглянемо послідовність $\zeta = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок z_n простору Z, яка збігається до точки $z_0 \in Z$, і строго спадну до точки a послідовність дійсних чисел b_n, яка визначається формулою

$$b_n = a + \frac{b - a}{n}.$$

Введемо прямокутники $P_n = [b_{n+1}, b_n) \times [c, d)$ при $n = 1, 2, ...$, і вироджений прямокутник $P_0 = \{a\} \times [c, d)$. Ясно, що $P_n \cap P_m = \emptyset$ при $m \neq n$ і $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$. Визначимо функцію $\varphi = \varphi_{P,\zeta,z_0} : \mathbb{L}^2 \to Z$, у якої $\varphi(p) = z_n$, якщо $p \in P_n$, і $\varphi(p) = z_0$, якщо $p \in \mathbb{L}^2 \setminus P$.

Лема 1. *Функція $\varphi = \varphi_{P,\zeta,z_0} : \mathbb{L}^2 \to Z$ неперервна.*

Розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$.

Лема 2. *Нехай* $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ *– неперервна функція і* $\eta > 0$. *Тоді множина* $G = G_{g,\eta} = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : g(x) < y < g(x) + \eta\}$ *відкрита в* $\mathbb{L}^2$ *і* $\mathrm{pr}_1(G) = \mathbb{L}$.

На основі цих результатів доводиться

Теорема 3. *Нехай* $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ *– неперервна функція і* $\mathrm{Gr}g = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{L}\}$. *Тоді існує таке нарізно неперервне відображення* $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, *що* $D(f) = \mathrm{Gr}g$.

Побудова такої функції здійснюється так. Оскільки простір $\mathbb{B}$ не регулярний і задовольняє першу аксіому зліченності, то в ньому можна вибрати точку z_0, її окіл W і спадну послідовність її околів W_n, які утворюють базу околів точки z_0, причому $\overline{W}_n \not\subseteq W$ для кожного n. Тоді існує послідовність точок $z_n \in \overline{W}_n \setminus W$ і послідовності $\zeta_n = (z_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ точок з W_n, для яких $z_{n,k} \to z_n$ при $k \to \infty$. Розглянемо множини

$$G_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : g(x) + \frac{1}{n+1} < y < g(x) + \frac{1}{n}\right\}.$$

Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – яка-небудь перенумерація раціональних чисел без повторень. З леми 2 випливає, що для кожного n існує такий прямокутник $P_n = [r_n, r_n + \delta_n) \times [s_n, s_n + \varepsilon_n)$, що $P_n \subseteq G_n$. Нехай $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Введемо функцію $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, покладаючи $f(p) = \varphi_{P_n,\zeta_n,z_n}(p)$, якщо $p \in P_n$ при $n = 1, 2, ...$, і $f(p) = z_0$, якщо $p \in \mathbb{L}^2 \setminus S$. Функція f і буде шуканою.

Функція $g_0 : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $g_0(x) = -x$, розривна у кожній точці з $\mathbb{L}$. Чи існує таке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у якого $D(f) = \mathrm{Gr}g_0$?

Література

[1] Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D., Filipchuk O.I., *Joint continuity of separately continuous mappings with values in completely regular spaces*, Tatra Mt. Math. Publ., **68** (2017), 47-58.

[2] Maslyuchenko V.K., Banakh T.O., Filipchuk O.I., *Separately continuous mappings with non-metrizable range*, The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (September, 18-23, 2017, Lviv, Ukraine), 70.

[3] Энгелькинг Р., *Общая топология*, М : Мир, (1986), 752 с.

Topological transitivity on non-separable spaces

Novosad Z. H.

Lviv University of Trade and Economics

zoryana.math@gmail.com

Hypercyclic operators on separable Fréchet spaces have been a subject of extensive study in the last decades. Hypercyclicity is related to the concept of transitivity from topological dynamics. Godefroy and Shapiro in [1], extended the notion of hypercyclicity to Banach spaces X not necessarily separable by calling an operator $T : X \to X$ *topologically transitive* if for each pair U, V of nonempty open subsets of X there is some $n \in \mathbb{N}$ with $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Every hypercyclic operator is transitive, although the converse is false in general [2].

Let X be a Banach space and $H_b(X)$ be a space of analytic functions which are bounded on bounded subspaces. We consider translation operator $T_a : H_b(X) \to H_b(X)$

$$T_a\colon f(x) \mapsto f(x+a), \quad x, a \in X, \quad a \neq 0.$$

Since $H_b(X)$ is not separable space then T_a is not hypercyclic. What can we say about of topologically transitivity?

References

[1] G. Godefroy J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[2] A. Manoussos, *A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to linear dynamics*, J. Operator Theory. **70:1** (2013), 165-174. doi: 10.7900/jot.2011may12.1971.

Об ограниченности преобразования Фурье и потенциала Рисса в пространствах Лоренца

Пелешенко Б.И.

Днепр

dsaupelesh@ukr.net

Семиренко Т.Н.

Днепр

tsemyrenko@ukr.net

Пусть Φ - объединение функции $\phi(t) = sign\ t$ и множества положительных, возрастающих выпуклых или вогнутых на отрезке $[0;1]$ функций $\phi(t)$, для которых выполняются условия $\lim\limits_{t\to+0}\phi(t) = \ = \phi(0) = 0$ и $\phi(2t) = O\left(\phi(t)\right)$, когда $t \to +0$.

Для функции $\phi(t) \in \Phi$ обозначим $M_\phi(t) = \sup\limits_{0<s\le\min(1/t,1)} \dfrac{\phi(st)}{\phi(s)} \quad (0 < t < \infty)$ и α_ϕ, β_ϕ - соответственно ее верхний и нижний показатели растяжения.

Через $S(0;2\pi)$ обозначается пространство измеримых по Лебегу на $(0;2\pi)$ функций и через $f^*(t)$ - невозрастающая перестановка модуля функции $f(x) \in S(0;2\pi)$ относительно нормированной меры Лебега $m(e) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_e dx$.

Пусть LM - множество медленно меняющихся в нуле и на бесконечности функций $h(t)$, заданных на $(0,\infty)$.

Пространство Лоренца $\Lambda_{\phi,a}(0,2\pi)$ для заданных $\phi(t) \in \Phi$ и $a \in (0;\infty]$ состоит из измеримых по мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна квазинорма $\|f\|_{\Lambda_{\phi,a}} = \left\{\int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^a d\phi(t)\right\}^{1/a}$, если $\phi(t) \ne signt$, $0 < a < \infty$, и квазинорма $\sup\limits_{0<t<1}\left(f^*(t)\phi(t)\right)$ для $a = \infty$.

Функция $\phi(t) \in \Phi$ является фундаментальной функцией пространства $\Lambda_{\phi,a}(0;2\pi)$. В случае, если $\phi(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $0 < p < \infty$, то $\Lambda_{\phi,1}(0;2\pi) = L^{p1}(0;2\pi)$, а если $\phi(t) = signt$, то $\Lambda_{\phi,\infty}(0;2\pi) = L_\infty(0;2\pi)$.

Квазилинейный оператор T ограниченно действует из пространства Лоренца $\Lambda_{\phi,1}(0;2\pi)$ в пространство $\Lambda_{\psi,\infty}(0;2\pi)$ ([1], с.177), если существует такое число $M > 0$, что для любого $t \in (0;1]$ и любой функции $f(x) \in \Lambda_{\phi,1}(0;2\pi)$ выполняется неравенство

$$(Tf)^*(t)\psi(t) \le M \int\limits_0^1 f^*(u)d\phi(u).$$

Используя результаты статьи [2], в работе доказана интерполяция преобразования Фурье и потенциала Рисса в пространствах Лоренца.

Теорема 1. *Пусть* $0 < a \le 1$, $0 < t \le 1$, $h(u)$ *- медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, для которой выполняются условия* $\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} = \infty$, $\int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} < \infty$, *и* $\phi(t) = t^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + t^a \int\limits_t^1 \frac{du}{u^{\frac{a}{2}+1}h(u)}$. *Тогда найдется такая постоянная* $C > 0$, *что для любой* $f(t) \in L_{a,\phi}(0,2\pi)$ *и ее преобразования Фурье* $(Ff)(t)$ *[3] справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(Ff)_n^*\right]^a \frac{1}{nh\left(\frac{1}{n}\right)} \le C \int\limits_0^1 (f^*(t))^a \, d\phi(t),$$

где $(Ff)_n^* = (Ff)^*(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < a \le 1$, $1 \le t < \infty$, $h(u)$ *- медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, для которой выполняются условия* $\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} < \infty$, $\int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} = \infty$, *и* $\phi(t) = t^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + t^a \int\limits_t^1 \frac{du}{u^{\frac{a}{2}+1}h(u)}$. *Тогда найдется такая постоянная* $C > 0$, *что для любой* $f(t) \in L_{a,\phi}(0,2\pi)$ *и ее преобразования Фурье справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(Ff)_n^*\right]^a \frac{1}{n^{1-\frac{a}{2}}h\left(\frac{1}{n}\right)} \le C \int\limits_0^1 (f^*(t))^a \, d\phi(t).$$

Литература

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400с.

2. *Пелешенко Б.И.* Интерполяция операторов слабого типа (ϕ_0, ψ_0, ϕ_1, ψ_1) в пространствах Лоренца // Укр.мат.журн. — 2005. — Т.57, №11. — С.1490-1507.

3. *A. Zygmund.* Trigonometric series. — Cambridge, 1959. — Vol.II.

Обмежений L-індекс за сукупністю змінних і аналітичні у бікрузі розв'язки деяких систем рівнянь з частинними похідними

Петречко Н. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка

petrechko.n@gmail.com

Скористаємося означеннями та позначеннями з [1]. Розглянемо таку систему рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{cases} a_{1,k,0}(z)F^{(k,0)}(z) + \sum\limits_{0\le j_1+j_2\le k-1} a_{1,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z) = 0, \\ a_{2,k-1,1}(z)F^{(k-1,1)}(z) + \sum\limits_{0\le j_1+j_2\le k-1} a_{2,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z) = 0 \\ \dots \\ a_{k+1,0,k}(z)F^{(0,k)}(z) + \sum\limits_{0\le j_1+j_2\le k-1} a_{k+1,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1 ([1]). *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$ *й для всіх* $z \in \mathbb{D}^2$ *аналітичні в* $\mathbb{D}^2$ *функції* $a_{i,j_1,j_2}(z)$ *задовольняють умови:* $|a_{i,j_1,j_2}(z)| l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z) \le C l_1^{k+1-i}(z) l_2^{i-1}(z) |a_{i,k+1-i,i-1}(z)|$, $a_{i,k+1-i,i-1}(z) \neq 0$, *де* $0 \le j_1 + j_2 \le k-1$, $i \in \{1,\dots,k+1\}$ *і* $C > 0$ *деяка стала. Якщо аналітична в* $\mathbb{D}^2$ *функція* $F(z_1, z_2)$ *є розв'язком* (1), *то* $F(z_1,z_2)$ *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

Розглянемо таке лінійне диференціальне рівняння вищого порядку, коефіцієнти якого є аналітичними в одиничному крузі функціями:

$$a_k(t)f^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) f^{(j)}(t) = 0. \tag{2}$$

Для цього рівняння сформулюємо одновимірний наслідок.

Наслідок 1.1 ([1]). Нехай $l \in Q(\mathbb{D})$ й аналітичні в $\mathbb{D}$ функції $a_j(t)$ задовольняють умови: $(\forall t \in \mathbb{C})$ $(\forall j \in \{0,1,\dots,k-1\})$ $|a_j(t)| l^j(t) \le C l^k(t) |a_k(t)|$, $a_k(t) \neq 0$, де $C > 0$ деяка стала. Якщо аналітична функція f в $\mathbb{D}$ задовольняє рівність (2) тоді f має обмежений l-індекс.

Література

[1] N.Petrechko, *Bounded* **L***-index in joint variables and analytic solutions of some systems of PDE's in bidisc*, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math., **83** (2017), 100–108.

Про зліченнократні B-вимірні відображення областей евклідових просторів

Сафонова О. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

olechkadeadin@ukr.net

Як відомо, відкрите зліченнократне відображення локально компактного хаусдорфового простору в метричний простір має щільну множину точок локального гомеоморфізму [1]. Що стосується зліченнократного неперервного відображення двох многовидів однакової вимірності, то припущення про відкритість відображення є зайвим для існування щільної відкритої множини точок локального гомеоморфізму [2]. Більш того, зліченну кратність такого неперервного нульвимірного відображення можна припустити лише на множині всюди другої категорії [3]. Виявляється, якщо знехтувати деякою множиною першої категорії, то при зліченнократному довільному B-вимірному відображенні області евклідового простору існує щільна множина точок локального гомеоморфізму [4].

Теорема 1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ - область і $f : D \to \mathbb{R}^n_1$ - зліченнократне B-вимірне відображення. Тоді існує всюди щільна в D відкрита множина $G = \bigcup\limits_j G_j \subset D$ така, що звуження відображення $f|_{Q_j}$ на множину $Q_j \subset G_j$ другої категорії в кожній компоненті G_j є гомеоморфізмом.*

Література

[1] Александров П.С. *О счетнократных открытых отображениях* // Докл. АН СССР. — 1936. – **4, №7**. – С. 283-287.

[2] Трохимчук Ю.Ю. *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности* // Праці Інституту математики НАН України. – **т. 70**. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 539 с.

[3] Трохимчук Ю.Ю., Сафонов В.М. *О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений* // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. – **т. 10, №4-5**. – С. 526-531.

[4] Сафонова О.В. *Про зліченнократні B-вимірні відображення* // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. – **т. 14, №1**. – С. 230-237.

Про скінченні та зліченні рівні неперервної функції

Сафонов В.М.

Національний університет харчових технологій, Київ
safonov_v_m@ukr.net

Якщо на відрізку $[a, b]$ задана функція $f(x)$, то для довільної точки $x_0 \in [a, b]$ повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ називатимемо рівнем функції f. Розуміння властивостей сукупності всіх рівнів функції (відображення) часто дозволяє охарактеризувати її структурні особливості. У зв'язку з цим постає питання про вивчення множини рівнів дійсних функцій.

Відомо, що рівні неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$ являють собою замкнені множини в $[a, b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, існують неперервні функції, у яких всі рівні не тільки нескінченні, але й незліченні.

Позначимо множини скінченних та зліченних рівнів відображення f відповідно через E_1 і E_2. В наступних твердженнях охарактеризовано множину рівнів неперервного нульвимірного відображення в термінах категорії [1].

Теорема 1. *Нехай неперервне нульвимірне відображення $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має множину $E_1 \cup E_2$ скінченних або зліченних рівнів всюди другої категорії. Якщо множина E нескінченних рівнів відображення f щільна в образі $f([a, b])$, то множина зліченних рівнів E_2 другої категорії в $f([a, b])$.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Якщо множина E_2 зліченних рівнів відображення f ніде не щільна в образі $f([a, b])$, то для множини E_1 скінченних рівнів маємо $IntE_1 \neq \varnothing$ (відносно простору $\mathbb{R}$).*

Література

[1] Сафонов В.М. *Про нескінченні рівні неперервної функції* // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. – **т. 12, №3**. – С. 220-224.

Ліпшицевий аналог леми Ікоми-Шварца

Салімов Р. Р.

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com

Стефанчук М. В.

Інститут математики НАН України

stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна, відкрита підмножина $\mathbb{C}$. Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо у цій точці f має повний диференціал та його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ майже всюди (м.в.).

Кажуть, що гомеоморфізм $f\colon G \to \mathbb{C}$ має N-*властивість* (Лузіна), якщо для довільної множини $E \subset G$ з умови $|E| = 0$ випливає, що $|f(E)| = 0$.

Позначимо

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}\,, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $p > 1$. Будемо називати *p-кутовою дилатацією* відображення f відносно точки $z_0 = 0$ величину:

$$D_p(z) = D_p(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})}. \tag{1}$$

Тут $z = re^{i\theta}$, J_f — якобіан відображення f.

Теорема 1. *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, такий, що має N-властивість, і $f(0) = 0$. Припустимо, що $p > 2$ та існує невід'ємне скінченне число k, таке, що*

$$\liminf_{r\to 0} \left(\frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy \right)^{p-1} \leqslant k < \infty.$$

Тоді

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant c_p\, k^{\frac{1}{p-2}} < \infty,$$

де c_p — додатня константа, яка залежить тільки від p.

Література

[1] *Ikoma K.*, On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J., 25 (1965), 175 – 203.

[2] *Боярский Б. В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами // ДАН СССР. — 1955. — **102**. — С. 661 – 664.

[3] *Gehring F., Reich E.* Area distortion under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1966. — **388**. — P. 1 – 15.

[4] *Astala K.* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. — 1994. — **173**. — P. 37 – 60.

[5] *Eremenko A., Hamilton D.* On the area distortion by quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — **123**. — P. 2793 – 2797.

[6] *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 136 с.

[7] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane/ Tracts in Mathematics, **19**/. — Warsaw–Donetsk–Helsinki, 2013. — 216 p.

[8] *Ломако Т. В., Салимов Р. Р.* К теории экстремальных задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 264 – 269.

[9] *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143 – 171.

[10] *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949. — 495 с.

[11] *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. — New York: Springer–Verlag, 1973. — 258 p.

On the convergence classes for entire functions

Salo T.M.

National University "Lviv Polytechnic" Ukraine

tetyan.salo@gmail.com

Skaskiv O.B.

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

olskask@gmail.com

Tarnovecka O.Yu.

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

savinskaolga@gmail.com

1. Entire Dirichlet series. Let β be a positive continuous function increasing to $+\infty$ on $[0,+\infty)$, and F be an entire function of the form $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_k)$, $0 \le \lambda_k \uparrow +\infty$ $(0 \le k \uparrow +\infty)$. Let a_n^0 be coefficients of Newton's majorant F_H of Dirichlet series F, $\varkappa_n \stackrel{def}{=} \frac{\ln a_{n-1}^0 - \ln a_n^0}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. The following theorem contains some conditions for the integral convergence

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(x)}{\ln\ln\mu(x,F)}dx = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{d\beta_*(x)}{\ln\ln\mu(x,F)}dx < +\infty, \tag{1}$$

where $\mu(x,F) = \max\{|a_k|e^{x\lambda_k} : k \ge 0\}$, $\beta_*(x) = \int_0^x \beta(t)dt$.

Theorem 1. *In order that for an entire Dirichlet series F condition (1) holds, it is sufficient that*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_*(\varkappa_{n+1}) - \beta_*(\varkappa_n)}{(\varkappa_n - \varkappa_{n-1})\lambda_{n-1}\ln((\varkappa_n - \varkappa_{n-1})\lambda_{n-1})} < +\infty,$$

and it is necessary that $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_*(\varkappa_{n+1}) - \beta_*(\varkappa_n)}{\varkappa_{n+1}\lambda_n \ln(\varkappa_{n+1}\lambda_n)} < +\infty.$

A similar assertion was also established for Taylor-Dirichlet type series in [1].

2. Entire functions of several variables and Goldberg's type condition. Let $(\mathbf{G}_R)_{R\ge 0}$ be an exhaustion of the space $\mathbb{C}^p$ by a system of bounded complete polycircular domains $\mathbf{G}_R$ with the center at the origin. For an entire function $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, $p \geq 1$, of the form

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=0}^{+\infty} a_{k_1,\ldots,k_p} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} \tag{2}$$

and $R > 0$ we denote $M_G(R) = M_G(R, f) = \max\{|f(z)| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R\}$.

Theorem 2. *In order that for an entire function $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$ of form (2) the condition* $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{\ln\ln M_G(r, F)} d\ln r < \infty$ *is valid it is sufficient that* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_*(\varkappa_{n+1}) - \beta_*(\varkappa_n)}{(\varkappa_n - \varkappa_{n-1})(n-1)\ln((\varkappa_n - \varkappa_{n-1})(n-1))} < +\infty$, *and it is necessary that* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_*(\varkappa_{n+1}) - \beta_*(\varkappa_n)}{\varkappa_{n+1} n \ln(\varkappa_{n+1} n)} < +\infty$, *where* $\varkappa_n = \ln A_{n-1}^0 - \ln A_n^0$, (A_k^0) *are the coefficients of Newton's majorant of the entire function* $\sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k$, *and* $A_k = \max\{|a_K| \colon \|K\| = k\}$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $\|K\| = k_1 + \ldots k_n$.

References

[1] Skaskiv O.B., Tarnovetska O.Yu. *About the convergence classes of Taylor-Dirichlet type series* // Bukovyn. Mat. Zh. – 2015. – V.3, no. 3-4. – P.170–172. (in Ukrainian)

Lebesque-type inequalities on classes of generalized Poisson integrals

Serdyuk A.S.

Institute of Mathematics NAS of Ukraine

serdyuk@imath.kiev.ua

Stepanyuk T.A.

Graz University of Technology

tania_stepaniuk@ukr.net

Denote by $C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$, $\alpha>0$, $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq\infty$, the set of all 2π–periodic functions, representable for all $x\in\mathbb{R}$ as convolutions of the form

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\quad \varphi\perp 1, \tag{1}$$

where $\varphi\in L_p$ and $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ are fixed generated kernels

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),\quad \alpha,r>0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

If the functions f and φ are related by the equality (1), then function f in this equality is called generalized Poisson integral of the function φ. The function φ in equality (1) is called as generalized derivative of the function f and is denoted by $f^{\alpha,r}_{\beta}$.

Let $E_n(f)_{L_p}$ be the best approximation of the function $f\in L_p$ in the metric of space L_p, $1\leq p\leq\infty$, by the trigonometric polynomials t_{n-1} of degree $n-1$, i.e.,

$$E_n(f)_{L_p}=\inf_{t_{n-1}}\|f-t_{n-1}\|_{L_p}.$$

We consider a problem about obtaining of Lebesque-type inequalities, for functions from the class $C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$, where norms $\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C$ of deviations of Fourier sums of order $n-1$ are estimated via best approximations $E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}$.

By $F(a,b;c;d)$ we denote Gauss hypergeometric function

$$F(a,b;c;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!},$$

$$(x)_k := \frac{x}{2}\Big(\frac{x}{2}+1\Big)\Big(\frac{x}{2}+2\Big)...\Big(\frac{x}{2}+k-1\Big).$$

For arbitrary $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$ and $1 \le p \le \infty$ we denote by $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$ the smallest integer n such that

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \le \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}\cdot\frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \tag{3}$$

where $\chi(p) = p$ for $1 \le p < \infty$ and $\chi(p) = 1$ for $p = \infty$.

The following statement holds.

Теорема 1. *Let $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then in the case $1 < p < \infty$ for any function $f \in C^{\alpha,r}_\beta L_p$ and $n \ge n_0(\alpha, r, p)$, the following inequality is true:*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \Bigg(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\Big) +$$

$$+\gamma_{n,p}\Bigg(\Bigg(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\Bigg)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}\frac{1}{n^r}\Bigg)\Bigg) E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{4}$$

where $F(a, b; c; d)$ is Gauss hypergeometric function, and in the case $p = 1$ for any function $f \in C^{\alpha,r}_\beta L_1$ and $n \ge n_0(\alpha, r, 1)$, the following inequality is true:

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\Big(\frac{1}{\pi\alpha r} + \gamma_{n,1}\Big(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\Big)\Big) E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}. \tag{5}$$

In (4) and (5) the quantity $\gamma_{n,p} = \gamma_{n,p}(\alpha, r, \beta)$ is such that $|\gamma_{n,p}| \le (14\pi)^2$.

Одностайна неперервність обернених відображень в евклідовому просторі

Севостьянов Є. О.

Житомирський державний університет імені Івана Франка
esevostyanov2009@gmail.com

Скворцов С. О.

Житомирський державний університет імені Івана Франка
serezha.skv@yandex.ru

Усюди далі D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$. *Кривою* γ називається неперервне відображення $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, де $I \subset \mathbb{R}$ – замкнений, відкритий або напіввідкритий інтервал в $\mathbb{R}$. *Модулем* сім'ї кривих Γ називається величина $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\, dm(x)$, де запис $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ означає, що $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ є борелевою функцією з умовою $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \quad \forall\, \gamma \in \Gamma$. Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і довільної вимірної за Лебегом функції $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю всіх відображень $g : D' \to D'$ таких, що $f = g^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \quad \forall\, \rho \in \operatorname{adm}\Gamma\,. \tag{1}$$

Теорема 1. *Припустимо, що $\overline{D}$ і $\overline{D'}$ – компакти в $\mathbb{R}^n$. Якщо $Q \in L^1(D)$, то сім'я $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ є одностайно неперервною у D'.*

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континууму $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відображень $g : D' \to D$ таких, що $f = g^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (1), при цьому, $\operatorname{diam} f(A) \geqslant \delta$.

Теорема 2. *Припустимо, що область D є локально зв'язною в усіх точках межі, $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ є компактами в $\mathbb{R}^n$, а область D' має слабо плоску межу. Припустимо також, що будь-яка зв'язна компонента $\partial D'$ є невиродженим континуумом. Якщо $Q \in L^1(D)$, то кожне відображення $g \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$, $\overline{g}|_{D'} = g$, при цьому, $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$, що складається з усіх продовжених відображень $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$, є одностайно неперервною у $\overline{D'}$.*

Як показує приклад сім'ї конформних відображень $f_n^{-1}(z)=\frac{z-(n-1)/n}{1-z(n-1)/n}$ одиничного круга на себе, умову $\operatorname{diam} f(A)\geqslant\delta$ відкинути не можна.

Одностайна неперервність відображень у замиканні області у випадку, коли образи цієї області є змінними

Скворцов С. О.

Житомирський державний університет імені Івана Франка

serezha.skv@yandex.ru

Севостьянов Є. О.

Житомирський державний університет імені Івана Франка

esevostyanov2009@gmail.com

Усюди далі D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, m – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$, $A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n : r_1<|x-x_0|<r_2\}$. *Кривою* γ називається неперервне відображення $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$, де $I\subset\mathbb{R}$ – замкнений, відкритий або напіввідкритий інтервал в $\mathbb{R}$. *Модулем* сім'ї кривих Γ називається величина $M(\Gamma)=\inf\limits_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_D\rho^n(x)\,dm(x)$, де запис $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$ означає, що $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ є борелевою функцією з умовою $\int\limits_\gamma\rho(x)|dx|\quad\forall\,\gamma\in\Gamma$. Будемо говорити, що сім'я областей D_i, $i\in I$, є *одностайно рівномірною,* якщо для кожного $r>0$ існує $\delta>0$ таке, що нерівність $M(\Gamma(F^*,F,D_i))\geqslant\delta$ виконано для всіх $i\in I$ і довільних континуумів $F,F^*\subset D$ з умовами $h(F)\geqslant r$ і $h(F^*)\geqslant r$, де $h(F),h(F^*)$ – хордальні діаметри множин $F,F^*\subset\overline{\mathbb{R}^n}$. Для заданого числа $\delta\geqslant 0$, фіксованої області D, континууму $A\subset D$ і заданої (вимірної за Лебегом) функції $Q:D\to[0,\infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_{Q,A,\delta}(D)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, які задовольняють для будь-яких континуумів $E_1\subset\overline{B(x_0,r_1)}\cap D$, $E_2\subset(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(x_0,r_2))\cap D$ оцінку $M\left(f\left(\Gamma\left(E_1,\,E_2,\,D\right)\right)\right)\leqslant\int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)}Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\quad\forall\,x_0\in\overline{D}$ для будь-якої вимірної функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ з умовою $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1$, таких що $h(f(A))\geqslant\delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geqslant\delta$, де $h(f(A))$, $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))$ – хордальні діаметри $f(A)$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))$, відповідно. Покладемо $q^{\prime}_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q^{\prime}(x)\,dS$, $Q^{\prime}(x)=\max\{Q(x),1\}$, ω_{n-1} – площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Нехай $\delta > 0$, область D є локально зв'язною в кожній точці $x_0 \in \partial D$, і нехай області $D'_f = f(D) \subset \mathbb{R}^n$ є одностайно рівномірними по всіх $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}(D)$. Якщо функція Q має скінченне середнє коливання в $\overline{D}$, або в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$ при деякім $\beta(x_0) > 0$ виконано умову $\int\limits_0^{\beta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{n-1}} q'^{\frac{1}{n-1}}_{x_0}(t)} = \infty$, то кожне $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}(D)$ має неперервне продовження в $\overline{D}$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{F}_{Q,A,\delta}(\overline{D})$, що складається з усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

Апроксимація класів $(\psi, \bar{\beta})$–диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами

Сердюк А. С.

Інститут математики НАН України, Київ

serdyuk@imath.kiev.ua

Соколенко І. В.

Інститут математики НАН України, Київ

sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і $L_p,\ 1 \le p \le \infty,$ — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Через $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ позначимо множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\varphi \in B_2^0 = \{g \in L_2 :\ \|g\|_2 \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

з фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_2$, ряд Фур'є якого має вигляд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right)$, де $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — послідовності довільних дійсних чисел. Якщо $\psi(k) \ne 0,\ k \in \mathbb{N}$, то функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції f і позначають $f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x)$. Поняття $(\psi, \bar{\beta})$-похідної належить О. І. Степанцю [1]. Якщо $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta_k \equiv r,\ r \in \mathbb{N}$, то класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ є відомими класами диференційовних функцій W^r_2. Якщо $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, то класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ будемо позначати $C^{q}_{\bar{\beta},2}$.

При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C^q_{\bar\beta,2}$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,2}$. Зрозуміло, що умова включення $\Psi_{\bar\beta} \in L_2$ еквівалентна наступній умові:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f \in C$ і $\widetilde{S}_n(f;x)$ — тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx),$$

де $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ — коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f (див.[2, с. 128-129]).

Розглядаються задачі про знаходження точних значень величин

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \sup_{f \in C^\psi_{\bar\beta,2}} |f(x) - \widetilde{S}_n(f;x)|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\bar\beta,2}} \|f(\cdot) - \widetilde{S}_n(f;\cdot)\|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1 ([3]). *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2). Тоді для довільної послідовності $\bar\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{1/2}.$$

Теорема 2 ([4]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2) і така, що послідовність $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є опуклою донизу. Тоді для довільної $\bar\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Із означень (3) і (4) випливають очевидні співвідношення

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C.$$

Як випливає з теореми 2, опуклість донизу послідовності $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є достатньою умовою того, що величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x)$ досягають значень $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C$ рівно посередині між вузлами інтерполяції, тобто при $x = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2j\pi}{2n+1}, j \in \mathbb{Z}$. Неважко переконатись, що при достатньо великих n умову опуклості послідовності α_m задовольняють $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$. Утім, наступне твердження показує, що для зазначених $\psi(k)$ рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C, \tag{5}$$

мають місце при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3 ([4])**.** *Нехай $q \in (0,1)$, $\bar\beta = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(C^{q}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^{q}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})}}.$$

Наступне твердження показує, що (5) має місце і для $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$.

Теорема 4 ([4])**.** *Нехай $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$, $\bar\beta = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(W^{r}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(W^{r}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}(2n+1)^r} \left(\int\limits_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)} \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1+\rho)} d\rho \right)^{1/2},$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція.

Література

[1] А.И. Степанец.*Методы теории приближений: В 2 ч.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 1.

[2] А.И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 2.

[3] А.С. Сердюк, І.В.Соколенко. *Наближення класів $(\psi, \bar\beta)$−диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами.* Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13** (1) (2016), 289–299.

[4] А.С. Сердюк, І.В.Соколенко. *Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа.* Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14** (1), (2017), 238–248.

Рівність Карлемана для мультиплікативно періодичної мероморфної функції в проколеному замиканні верхньої півплощини

Сокульська Н. Б.

НАСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, ЛНУ ім. І. Франка
natalya.sokulska@gmail.com

Тарасюк С.І.

НАСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, ЛНУ ім. І. Франка
svt.tarasyuk@gmail.com

Хорощак В.С.

НАСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, ЛНУ ім. І. Франка
vasylyna1992@rambler.ru

Христіянин А.Я.

НАСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, ЛНУ ім. І. Франка
khrystiyanyn@ukr.net

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$. Зафіксуємо q: $0 < q < 1$. Позначимо $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \le t\},\ t > 0$. Зауважимо, що $\bigcup\limits_{t>0} \overline{\mathcal{A}_t} = \mathcal{H}^*$.

Означення 0.1. Функція f називається мероморфною в $\mathcal{H}^*$, якщо вона мероморфна в замиканні кожного півкільця $\mathcal{A}_t$.

Означення 0.2. Мероморфна в $\mathcal{H}^*$ функція f називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0 < q < 1$, якщо для всіх $z \in \mathcal{H}^*$ виконується рівність

$$f(qz) = f(z).$$

Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{M}_q$.

Нехай f мультиплікативно періодична мероморфна функція в $\mathcal{H}^*$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай $z_0 \in \mathcal{H}^*$, $f(z_0) \neq 0, \infty$, і $\log f(z)$ визначений співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з'єднує точки z_0 і z, у $\mathcal{H}^*$ з радіальними розрізами від нулів та полюсів функції f.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай $a \in \mathbb{C}$, $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ – a-точки функції f, а $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ – полюси f в $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$.*

Тоді

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{{r_n}^k} - \frac{{r_n}^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt =$$

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<\rho_n\leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{{\rho_n}^k} - \frac{{\rho_n}^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\beta_n dt, \qquad (1)$$

для всіх $r > 0$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$.

Співвідношення (1) – це рівність Карлемана для мультиплікативно періодичної мероморфної функції в проколеному замиканні верхньої півплощини.

Наслідок 1.1. Нехай функція f є голоморфною і мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0 < q < 1$, у $\mathcal{H}^*$, $f \neq const$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай, крім того, точки $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ є a-точками функції f, $a \in \mathbb{C}$. Тоді для всіх $r > 0$ та кожного $k \in \mathbb{Z}$, справедливе співвідношення

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{{r_n}^k} - \frac{{r_n}^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt = 0.$$

Рівняння згортки та теореми з двома радіусами для розв'язків лінійних еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Трофименко О. Д.

Донецький національний університет імені Василя Стуса

odtrofimenko@gmail.com

Робота присвячена теоремам про середнє значення для розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині, ліва частина яких представлена у вигляді добутку деяких невід'ємних цілих степенів формальних похідних Коші. Іншими словами, мова йде про дослідження розв'язків однорідного рівняння згортки, породженого конкретного вигляду розподілом з компактним носієм.

У частковому випадку результати вичерпуються відомими результатами В. В. Волчкова, які відносяться до теорії рівнянь згортки із радіальним розподілом. В загальному ж випадку ця теорія беспосердньо не може бути застосована до вихідного рівняння, і тому редукція загального випадку пов'язана з доведенням того, що функція $g(z) := \partial^{m-s}\bar{\partial}^m f(z)$ ($m \in \mathbb{N}$ та $s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \leq m$) є розв'язком рівняння згортки із конкретним радіальним розподілом з компактним носієм. На підставі цього дано опис диференційовних функцій f у крузі в термінах розкладу коефіцієнтів Фур'є функції $g(z)$ в ряди по посилено лінійно незалежним системам спеціальних функцій.

Література

[1] Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, М.: Изд-во иностр. лит., (1958), 159 с.

[2] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, (2003), 454 p.

[3] L. Zalcman, *Mean values and differential equations*, Israel J.Math., **14** (1973), 339–352.

[4] O. D. Trofymenko, *Two-radii theorem for solutions of some mean value equations*, Мат. студії, **40** (2) (2013), 137–143.

[5] O. D. Trofymenko, *Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane*, Journal of Mathematical Sciences, **229** (1) (2018), 96–107.

Dual spaces to spaces of entire functionsof bounded type

Cherneha I.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

icherneha@ukr.net

By $\mathcal{H}_b(X)$ we denote the algebra of all analytic functions of bounded type defined on a complex Banach space X. By a *symmetric* function on ℓ_p we mean a function which is invariant under any reordering of the sequence in ℓ_p. The algebra of symmetric analytic functions with the topology of the uniform convergence on bounded sets will be denoted $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

In the talk we investigate dual spaces of $\mathcal{H}_b(X)$ and $\mathcal{H}_{bs}(X)$.

Про послідовності нулів і критичних точок цілих розв'язків рівняння $f^{(n)} + Af^m = 0$

Шавала О. В.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

olena.shvl@gmail.com

Проф. А.А.Кондратюк (див. наприклад [1]) звернув увагу на те, щоб досліджувати властивості розв'язків нелінійного рівняння

$$f^{(n)} + Af^m = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – послідовність комплексних чисел λ_k, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$, $\mathrm{P} = \{p_k\}$ і $\mathrm{Q} = \{q_k\}$ – послідовності натуральних чисел, $\mathrm{M} = \{\mu_k\}$ – послідовність комплексних чисел μ_k, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$.

Ми отримали наступний результат

Теорема 1. *Для заданих послідовностей* Λ, P, M *і* Q, *таких, що* $\lambda_l \neq \mu_k$, $l, k \in \mathbb{N}$ *існує мероморфна функція* A *така, що рівняння* (1) *має цілий розв'язок* f *з нулями в точках* λ_k *кратності* p_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

Подібні задачі розглядались у працях [2] і [3].

Залишається відкритим питання, чи можна зазначену вище теорему поширити на ширший клас нелінійних диференціальних рівнянь.

Література

[1] Д. Луківська, О. Шавала, *Про мероморфні розв'язки диференціальних рівнянь з заданими полюсами*, Буковинський математичний журнал, **3** (2) (2015), 57–59.

[2] О. Шавала, *Деякі властивості лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з мероморфними коефіцієнтами: дис. ... канд. фіз.-мат. наук*, Дрогобич, 2008, 127 с.

[3] O. Shavala, *On the sequences of zeros and critical points of entire solutions of the equation* $f'' + Af = 0$, Міжнар. матем. конфер. ім. В.Я.Скоробогатька, Львів, 2015, С.148.

Теорема типу Сілі в класі швидко спадних нескінченно диференційовних функцій

Шарин С. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

sharyn.sergii@gmail.com

Відомо [1], що нескінченно гладку функцію, задану на підпросторі, можна продовжити на весь простір із збереженням класу гладкості. Ми доводимо теорему типу Сілі, яка стверджує, що швидко спадну функцію, задану на $\mathbb{R}^d_+$, можна продовжити на весь простір зберігши крім нескінченної гладкості ще й властивість швидкого спадання.

Для довільних $t \in \mathbb{R}^d$ та $m, k \in \mathbb{Z}^d_+$ позначимо $t^m = t_1^{m_1} \dots t_d^{m_d}$ і $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$, де $\partial_j^{k_j} := \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $j = 1, \dots, d$; запис $m \preccurlyeq k$ означає $m_j \leq k_j$ для всіх $j = 1, \dots, d$.

Нехай $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ позначає банаховий простір функцій на $\mathbb{R}^d$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}} := \max_{m \preccurlyeq \alpha;\, k \preccurlyeq \beta} \sup_{t \in \mathbb{R}^d} \left| t^m \partial^k \varphi(t) \right|, \qquad \alpha, \beta, m, k \in \mathbb{Z}^d_+.$$

Кожне вкладення $\mathcal{S}^{\alpha,\beta} \hookrightarrow \mathcal{S}^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ і $\gamma \preccurlyeq \beta$ цілком неперервне (див. [2]). Тому простір Шварца $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}^d_+} \mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ нескінченно диференційовних швидко спадних функцій на $\mathbb{R}^d$ можна наділити топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta} \mathrm{pr}\, \mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ відносно цих вкладень.

Нехай $\mathcal{S}'_+$ — замкнутий підпростір в $\mathcal{S}'$ тих розподілів, носії яких містяться в $\mathbb{R}^d_+$. Визначимо простір $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+ = \{\psi|_{\mathbb{R}^d_+} : \psi \in \mathcal{S}^{\alpha,\beta}\}$, і наділимо його нормою

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}^d_+} \left|t^m \partial^k \varphi(t)\right|, \qquad \alpha,\beta,m,k \in \mathbb{Z}^d_+.$$

Тут $\psi|_{\mathbb{R}^d_+}$ позначає звуження функції ψ на конус $\mathbb{R}^d_+$. Зауважимо, що всі похідні $\partial^k\varphi(t)$ в точках границі конуса $\mathbb{R}^d_+$ ми розуміємо як односторонні. Позначимо $\mathcal{S}_+ := \bigcap\big\{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+ : \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^d_+\big\}$ і наділимо цей простір топологією проективної границі $\lim\limits_{\alpha,\beta}\mathrm{pr}\, \mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_+ \looparrowright \mathcal{S}^{\eta,\gamma}_+$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ і $\gamma \preccurlyeq \beta$.

Теорема 1. *Існує лінійний неперервний оператор розширення*

$$\Lambda\colon \mathcal{S}_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in \mathcal{S}$$

такий, що $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}^d_+$.

Відкритим для автора залишається питання: чи правильною є теорема типу Сілі для ультрадиференційовних функцій?

Література

[1] R.T. Seeley, *Extensions of C^∞-functions defined in a half-space*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 625–626.

[2] В.В. Жаринов, *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS*, Успехи мат. наук., **34** (1979), 97–131.

Секція диференціальних рівнянь та математичної фізики

Двоточкова задача для рівнянь із частинними похідними у необмеженій смузі

Волянська І. І.

Національний університет „Львівська політехніка“

i.volyanska@i.ua

Ільків В. С.

Національний університет „Львівська політехніка“

ilkivv@i.ua

Симотюк М. М.

Національний університет „Львівська політехніка“,
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Нехай $\Pi(T) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0;T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, — простір функцій $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi\|_{\mathbf{E}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\xi|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\xi|)|\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi},$$

де $\tilde{\varphi}(\xi)$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$, $C^n([0,T];\mathbf{E}_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, — простір функцій $u(t,x) : \Pi(T) \to \mathbb{C}$, що похідні $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r = 0,1,\ldots,n$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Норму в просторі $C^n([0,T];\mathbf{E}_{\alpha,\beta})$ визначаємо за формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T];\mathbf{E}_{\alpha,\beta})\| = \sum_{r=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\right\|_{\mathbf{E}_{\alpha,\beta}}.$$

В області $\Pi(T)$ для рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = 0, \quad (t,x) \in \Pi(T), \tag{1}$$

досліджено задачу з двоточковими умовами

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{l_j-1}u(t,x)}{\partial t^{l_j-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j=1,\ldots,m, \\ \dfrac{\partial^{r_j-1}u(t,x)}{\partial t^{r_j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{m+j}(x), \quad j=1,\ldots,n-m, \end{cases} \tag{2}$$

де $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $1 \le l_1 < \ldots < l_m \le n$, $1 \le r_1 < \ldots < r_{n-m} \le n$.

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) у просторах $C^n([0,T];\mathbf{E}_{\alpha,\beta})$, якщо корені многочлена $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j}\lambda^j$ справджують певні додаткові вимоги.

Асимптотична поведінка спостережуваних для плинів твердих куль

Гап'як І.В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

gapjak@ukr.net

Герасименко В.І.

Інститут математики НАН України

gerasym@imath.kiev.ua

В доповіді розглядається новий підхід для опису кінетичної еволюції плинів твердих куль за допомогою скейлінґової границі Больцмана – Ґреда для маргінальних спостережуваних. Для початкових даних, які визначаються в термінах одночастинкової функції розподілу встановлено зв'язок між асимтотичною поведінкою непертурбативного розв'язку задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ системи твердих куль та розв'язку кінетичного рівняння Больцмана.

Розглядається побудова кінетичного рівняння типу Больцмана з початковими кореляціями, які можуть описувати конденсовані стани плинів твердих куль. Також, в доповіді описується процес поширення початкових кореляцій в скейліґовій границі Больцмана – Ґреда.

Література

[1] V.I. Gerasimenko, *On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions*, Proc. Inst. Math. NASU, **10** (2) (2013), 71–95.

[2] І.В. Гап'як, *Кінетичні рівняння для систем пружних куль з початковими кореляціями*, Збір. пр. Інст. мат. НАНУ, **11** (2014), 160–177.

Про задачу з нелокальними за часом умовами для рівняння коливань однорідної балки

Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

tarasgoy@yahoo.com

Негрич М.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

negrychmariya@gmail.com

Савка І.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

s-i@ukr.net

У прямокутнику $D = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in [0,L]\}$ досліджуються умови класичної коректності задачі

$$u_{tt}(t,x) + a^2 u_{xxxx}(t,x) + b u_{xx}(t,x) + c u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$u(t,0) = u_x(t,0) = u_{xx}(t,L) = u_{xxx}(t,L) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) + u(T,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) + u_t(T,x) = \psi(x), \tag{3}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – задані функції зі шкали просторів $\{\mathbf{H}_q[0,L]\}_{q\in\mathbb{R}}$, $\mathbf{H}_q[0,L]$ – простір усіх тригонометричних рядів вигляду $\omega(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \omega_k Y_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\omega\|_{\mathbf{H}_q[0,L]} = \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (1+k)^{2q} |\omega_k|^2\right)^{1/2}$, $q \in \mathbb{R}$, $Y_k(x)$ – повна ортонормована система з простору $L_2[0,L]$.

Розв'язок $u(t,x)$ задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $\mathbf{C}^2([0,T]; \mathbf{H}_q[0,L])$.

Коректна розв'язність задачі (1)–(3) залежить від діофантових властивостей послідовності $\{1 - \cos\beta_k T\}_{k\in\mathbb{N}}$, де $\beta_k = \sqrt{a^2 r_k^4 - b r_k^2 + c}$, $r_k \approx \frac{\pi}{L}(2k-1)$ – наближений корінь рівняння $\operatorname{ch} rL \cdot \cos rL = 1$. Якщо ця послідовність не містить нульових членів, тобто для довільних $(k,m) \in \mathbb{N}^2$

$$\beta_k \neq 2\pi m/T,$$

то задача (1)–(3) має єдиний розв'язок

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2t+T)\beta_k}{2}\cos\frac{\beta_k T}{2}\cdot\psi_k-\sin\frac{(2t-T)\beta_k}{2}\sin\frac{\beta_k T}{2}\cdot\beta_k\varphi_k}{2\beta_k\sin^2\frac{\beta_k T}{2}}\cdot Y_k(x),$$

де φ_k і ψ_k – коефіцієнти Фур'є функцій φ і ψ відповідно,

$$X_k(x)=\frac{\sin r_kL-\operatorname{sh} r_kL}{\cos r_kL-\operatorname{ch} r_kL}(\operatorname{ch} r_kx-\cos r_kx)+\operatorname{sh} r_kx-\sin r_kx,$$

$$\|X_k(x)\|=\int\limits_0^L\left(\frac{\sin r_kL-\operatorname{sh} r_kL}{\cos r_kL-\operatorname{ch} r_kL}(\operatorname{ch} r_kx-\cos r_kx)+\operatorname{sh} r_kx-\sin r_kx\right)^2dx=C,$$

де C – деяка стала, $Y_k(x)=\frac{X_k(x)}{\|X_k(x)\|}$.

За допомогою метричного підходу [1] отримано такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a\in[a_1,a_2]$ нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq 2k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k\in\mathbb{N}$ і $\gamma>0$.

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq T^2k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k\in\mathbb{N}$ при $\gamma>2$.

Теорема 3. *Нехай для довільних $(k,m)\in\mathbb{N}^2$ $\beta_k\neq 2\pi m/T$ та існують числа $C_1>0$ і $\gamma\in\mathbb{R}$ такі, що нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq C_1k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k. Тоді, якщо $\varphi\in\mathbf{H}_{q+\gamma+4}[0,L]$ і $\psi\in\mathbf{H}_{q+\gamma+2}[0,L]$, де $\gamma>2$, то існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), що неперервно залежить від правих частин умов (3), тобто

$$\|u\|^2_{\mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q[0,L])}\leq C_2\Big(\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{q+\gamma+4}[0,L]}+\|\psi\|^2_{\mathbf{H}_{q+\gamma+2}[0,L]}\Big),$$

де C_2 – незалежна від k стала.

Література

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М., *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К. : Наук. думка (2002), 416 с.

Задача з нелокальною умовою для рівнянь з оператором узагальненого диференціювання

Каленюк П. І.

Національний університет „Львівська політехніка“

pkalenyuk@gmail.com

Нитребич З. М.

Національний університет „Львівська політехніка“

znytrebych@gmail.com

Симотюк М. М.

Національний університет „Львівська політехніка“,
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Нехай $f(t) = \sum\limits_{k=0} f_k t^k$ – ціла функція з ненульовими коефіцієнтами f_k, $k \geq 0$. Для цілої функції $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$ оператор

$$D_{f(t)}\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \frac{f_{k-1}}{f_k} t^{k-1},$$

називається оператором узагальненого диференціювання функції φ, що відповідає функції f [1].

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі зліченною базою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ та скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$. Функція $u(t):\mathbb{C}\to H$ числового аргументу $t\in\mathbb{C}$ зі значеннями в просторі H називається цілою, якщо для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $(u(t), e_k)_H$ є цілою.

Доповідь присвячена викладу результатів, отриманих при дослідженні такої нелокальної задачі:

$$D_{f(t)}u(t) = Au(t), \quad t\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

$$u(0) - \mu u(T) = \varphi, \quad \mu\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \varphi\in H, \tag{2}$$

де $A : H \to H$ – такий лінійний оператор, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda_j \neq \lambda_q$ $(j\neq q)$, причому $|\lambda_k| \geq 1$, $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k| = \infty$. Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у класах цілих за t функцій $u(t):\mathbb{C}\to H$, якщо права частина φ нелокальних умов (2) належить до певного підпростору, породженого оператором A, простору H.

Література

[1] *A.O. Gelfond, A.F. Leontiev.* On a generalization of the Fourier series, Mat. Sbornik 29 (71) (1951), 477–500, in Russian.

Про умови неіснування розв'язку двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними

Нитребич З. М.

Національний університет "Львівська політехніка"
znytrebych@gmail.com

Маланчук О. М.

Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького
Oksana.Malan@gmail.com

В області $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $x = (x_1, \ldots, x_s)$, $s \in \mathbb{N}$, за допомогою диференціально-символьного методу [1] досліджено розв'язність двоточкової за часом задачі для неоднорідного рівняння

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\,a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big]U(t, x) = f(t, x) \qquad (1)$$

з однорідними локальними умовами

$$A_{j1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h(j-1), x) + A_{j2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h(j-1), x) = 0,\ j = 1, 2,\ h > 0. \qquad (2)$$

У рівнянні (1) вирази $a\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$, $b\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – це диференціальні вирази зі сталими комплексними коефіцієнтами, символи яких $a(\nu)$, $b(\nu)$ є цілими функціями для $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$, $f(t, x)$ – задана ціла ненульова функція.

В умовах (2) $A_{j1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_{j2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $j = 1, 2$, – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, символи яких справджують умову $\left(|A_{11}(\nu)|^2 + |A_{12}(\nu)|^2\right)\left(|A_{21}(\nu)|^2 + |A_{22}(\nu)|^2\right) \neq 0$ для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Розглянуто випадок, коли характеристичний визначник задачі (1), (2) тотожньо дорівнює нулю. Доведено, якщо існує $x \in \mathbb{R}^s$, для якого виконується хоча б одна з умов

$$f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{A_{1k}(\nu)\Phi(\lambda, \nu)e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_s x_s}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \neq 0,\ \ k = 1, 2,$$

де $\Phi(\lambda, \nu)$ – деяка ціла функція, то розв'язок задачі (1), (2) у класі цілих функцій не існує.

Література

[1] Каленюк П.І., Нитребич З.М., *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод.* – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка" (2002), 292 с.

Двоточкова крайова задача рівнянь з частинними похідними у просторах періодичних функцій

Ільків В. С.

Національний університет „Львівська політехніка“

ilkivv@i.ua

Нитребич З. М.

Національний університет „Львівська політехніка“

znytrebych@gmail.com

Пукач П. Я.

Національний університет „Львівська політехніка“

ppukach@gmail.com

Вовк М. І.

Національний університет „Львівська політехніка“

mira.i.kopych@gmail.com

У циліндрі $\mathcal{D} = [0,h] \times \Omega$, де $h > 0$, Ω — одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, розглядається задача з двоточковими умовами

$$\partial_t^2 u - 2a(\partial_x)\partial_t u + b(\partial_x)u = 0, \tag{1}$$

$$a_1(\partial_x)\partial_t u + b_1(\partial_x)u\Big|_{t=0} = \varphi_1, \tag{2}$$

$$a_2(\partial_x)\partial_t u + b_2(\partial_x)u\Big|_{t=h} = \varphi_2, \tag{3}$$

де диференціальні вирази $a(\partial_x) = a_0\partial_x + a_1$, $b(\partial_x) = b_0\partial_x^2 + b_1\partial_x + b_2$, $a_\alpha(\partial_x) = a_{\alpha 0}\partial_x + a_{\alpha 1}$, $b_\alpha(\partial_x) = b_{\alpha 0}\partial_x^2 + b_{\alpha 1}\partial_x + b_{\alpha 2}$, мають комплексні коефіцієнти $a_\alpha, b_\alpha, a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$; функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ і $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ — задані, а функція $u = u(t,x)$ — шуканий розв'язок.

Для дійсних чисел q, α і функції $\beta\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ використовується пара шкал $\{\mathbf{E}^q_\alpha\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{E}^{2,q}_\beta\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{E}^q_\alpha = \mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)$ — простір періодичних за x функцій $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{ikx}$ з нормою $\|v\|_{\mathbf{E}^q_\alpha} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^q e^{2\alpha|k|} |v_k|^2\right)^{1/2}$; $\mathbf{E}^{2,q}_\beta = \mathbf{E}^{2,q}_\beta(\mathcal{D})$ — простір функцій $u = u(t,x)$, похідні яких $\partial^r_t u(t,\cdot)$ для кожного $r = 0,1,2$ і для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}^{q-r}_{\beta(t)}(\Omega)$ і неперервні за змінною t у цих просторах.

За умови, що корені квадратного тричлена $\lambda^2 - 2a_0\lambda + b_0$ є ненульовими, не лежать на горизонтальній прямій і не є коренями квадратного тричлена $(a_{10}\lambda + b_{10})(a_{20}\lambda + b_{20})$, встановлено розв'язність задачі (1)–(3) у вказаних шкалах просторів. Знайдено вигляд розв'язку, його гладкість у шкалі і доведено скінчену вимірність ядра задачі.

Показано відсутність проблеми малих знаменників [1], яка зазвичай виникає у випадку багатовимірної змінної x.

Література

[1] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

* * *

Обчислення резерву незаробленої премії при страхуванні різних типів рент

Данилюк Р. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mfa@pu.if.ua

Марцінків М. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mariadubey@gmail.com

У міжнародній практиці страхування життя поділяють на: страхування капіталів та страхування рент. При рентному страхуванні певна обумовлена договором частка виплачується страхувальникові (застрахованому) у вигляді регулярних періодичних виплат, а загальна сума таких виплат залежить від тривалості життя страхувальника (застрахованого). Різновидами рентних виплат є: щорічна рента, помісячна рента, відстрочена рента, сімейна рента, довічна рента та інші.Страхування ренти (ануїтету) передбачає, що страхувальник вносить до страхової компанії за один раз або розстроченими платежами певну суму, яку вона використовує для цілей інвестування. Необхідність наявності страхових резервів обумовлена тимчасовим розривом між надходженням страхової премії і її витратою на страхові виплати. Оскільки страхова премія по договорах страхування завжди надходить раніше, ніж відбуваються страхові випадки і провадяться страхові виплати, те необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат шляхом створення страхового фонду. Під незаробленою премією на сучасний момент часу розуміють частина технічної премії, призначеної для здійснення майбутніх страхових виплат по діючим договорах страхування з урахуванням адміністративних витрат. У доповіді розглядатимуться різні типи ануїтетів та методи обчислення резерву незаробленої премії, зокрема метод 365 часток, метод 24 часток, метод 8 часток, а також обчислення середнього рівня резерву незаробленої премії.

Література

[1] Н.М.Внукова, В.І. Успаленко, А.В. Временко *Стархування: теорія і практика*, Х.: Бурун Книга. – 2003. – 40 с.

[2] О.В. Козьменко, О.В. Кузьменко *Актуарні розрахунки. Навчальний посібник*, Суми: Ділові перспективи. – 2011. – 224 с.

Декомпозиція неперервності n-лінійних і поліноміальних відображень

Маслюченко В. К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@gmail.com

Нестеренко В. В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
v.nesterenko@chnu.edu.ua

У праці [1] було введено поняття перехідності відображень $f: X \to Y$ між топологічними і була доведена загальна теорема про декомпозицію неперервності з участю перехідності і слабкої властивості Дарбу для локально зв'язного простору X. Потім в роботі [2] було встановлено, що кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ між топологічними векторними просторами (коротко: ТВП) має *слабку властивість Дарбу*, тобто переводить кожну область у зв'язну множину, і тому перехідність лінійного відображення рівносильна його неперервності. Тут ми переносимо цей результат на n-лінійні і поліноміальні відображення.

Нехай $X = X_1 \times ... \times X_n$ – добуток векторних просторів X_k над одним і тим же полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел і Y – ще один векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що нарізно лінійні відображення $f : X \to Y$ називаються n-лінійними. Якщо X_k при $k = 1, ..., n$ – це ТВП, то і їх добуток X з топологією добутку – це теж ТВП.

Розвиваючи метод, застосований у [2] індукцією відносно n нескладно доводиться

Теорема 1. *Для довільних ТВП X_1, ..., X_n і Y кожне n-лінійне відображення $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ має слабку властивість Дарбу.*

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається *перехідним у точці* x_0, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y існують окіл U точки x_0 у просторі X і відкритий окіл W точки y_0 у просторі Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким у кожній точці з простору X.

З допомогою теореми 1 і загальної теореми про декомпозицію неперервності з [1] отримується

Теорема 2. *Нехай $X = X_1 \times ... \times X_n$ – добуток ТВП, Y – ТВП і $f : X \to Y$ – n-лінійне відображення. Тоді f буде перехідним у тому і тільки тому випадку, коли f неперервне.*

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між векторними просторами над полем $\mathbb{K}$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує таке n-лінійне відображення $g : X^n \to Y$, що $f(x) = g(x, ..., x)$ на X. *Поліном* $f : X \to Y$ степеня $\leq n$ – це сума $f = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, де $f_k : X \to Y$ – це k-однорідний поліном при $k = 0, ..., n$.

Подібно до теореми 1 доводиться і

Теорема 3. *Нехай X та Y – ТВП і $f : X \to Y$ – поліном степеня $\leq n$. Тоді f має слабку властивість Дарбу.*

Звідси випливає

Теорема 4. *Нехай X та Y – ТВП і $f : X \to Y$ – поліном степеня $\leq n$. Тоді f буде перехідним у тому і тільки тому випадку, коли f неперервне.*

Література

[1] Маслюченко В.К. *Декомпозиція неперервності та перехідні відображення / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ – 2011. – **8**. – С. 132–150.*

*[2] Маслюченко В.К. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, 1. – С. 79–88.*

Іменний покажчик авторів